УДК. 550.384

Л.М. Журавчак, Ю.О. Федоришин

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПРОСТОРІ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для кусково-однорідного провідного півпростору розглянуто аналітично-чисельну методику знаходження компонент векторів напруженості електромагнітного поля (ЕМП), яке збуджене стороннім джерелом струму. Запропоновано стаціонарну та квазістаціонарну моделі для знаходження компонент векторів напруженості ЕМП. Проведено числові експерименти для неоднорідного включення з вищою та нижчою, ніж у геосередовищі, провідністю.

Ключові слова: рівняння Максвелла; рівняння Гельмгольца; усталені коливання ЕМП; непрямий метод граничних елементів.

Вступ

Останнім часом при математичному моделюванні поширення ЕМП у геофізичному середовищі широко застосовують чисельні та чисельно-аналітичні методи з використанням швидкодіючих комп'ютерів. Найбільш розповсюдженими є методи скінченних різниць та методи скінченних елементів, які дають хорошу точність, але вимагають покриття сіткою всієї області, що в свою чергу потребує великих обсягів пам'яті та роботи з масивами великих розмірів. Використання методу граничних інтегральних рівнянь [Табаровский, 1975] методів граничних елементів [Бенерджи, Баттерфилд, 1984] дає можливість дискретизувати тільки граничну поверхню об'єкта, що економить оперативну пам'ять під час реалізації алгоритму та дає порівняно високу точність розрахунків у внутрішніх точках.

Постановка задачі

Розглядається кусково-однорідний півпростір, що у декартовій системі координат x_1,x_2,x_3 займає область $\Omega = R^{3-} = \{(x_1, x_2, x_3): -\infty < x_{1,2} < \infty,$ $-\infty < x_3 < 0\}$ і містить включення Ω_1 (просторове тіло форми паралелепіпеда), яке перебуває в ідеальному електромагнітному контакті з геосередовищем $\Omega_1 = \Omega / \Omega_2$. Середовище Ω_1 і включення Ω_2 характеризуються постійними електропровідностями σ_1, σ_2, магнітними проникностями μ_1, μ_2 і діелектричними провідностями ε_1, ε_2 відповідно (рис. 1). На поверхні півпростору $\Gamma = \partial\Omega$ електричне поле (ЕП) відсутнє, а в контурі $\Omega_c \subset \Omega_1$ діє сторонній струм інтенсивності $\vec{\psi}(\bar{x},\tau) = (\psi_1(\bar{x},\tau),\psi_2(\bar{x},\tau),\psi_3(\bar{x},\tau))$, де τ – час, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – точка простору. В початковий момент часу спостерігається нульовий розподіл компонент вектора напруженості ЕП $E_i^l(\bar{x},\tau)$ у середовищі Ω_1 та у включенні Ω_2, i=1,2,3, l=1,2.

Рівняння Максвелла для кусково-однорідного тіла, в якому діють сторонні струми, мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&rot\vec{H}^1 = \sigma_1\vec{E}^1 + \varepsilon_1\frac{\partial\vec{E}^1}{\partial\tau} + \vec{\psi},\\
&div\vec{H}^1 = 0,\\
&rot\vec{E}^1 = -\mu_1\frac{\partial\vec{H}^1}{\partial\tau},\\
&div\vec{E}^1 = 0,\\
&rot\vec{H}^2 = \sigma_2\vec{E}^2 + \varepsilon_2\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial\tau},\\
&div\vec{H}^2 = 0,\\
&rot\vec{E}^2 = -\mu_2\frac{\partial\vec{H}^2}{\partial\tau},\\
&div\vec{E}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

де $\vec{H}^l(\bar{x},\tau) = (H_1^l(\bar{x},\tau), H_2^l(\bar{x},\tau), H_3^l(\bar{x},\tau))$ – вектор напруженості магнітного поля в Ω_l (l=1,2), $\vec{E}^l(\bar{x},\tau) = (E_1^l(\bar{x},\tau), E_2^l(\bar{x},\tau), E_3^l(\bar{x},\tau))$– вектор напруженості електричного поля в Ω_l.

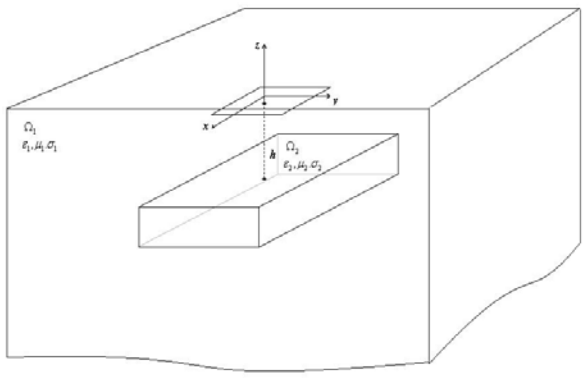

Рис. 1. Геоелектрична модель півпростору з включенням

Для багатьох задач електродинаміки доцільно розділити рівняння Максвелла (1), тобто записати окремо рівняння для електричного та магнітного полів. Зробивши ці перетворення, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих компонент ЕП $E_j^1 = E_j^1(\bar{x},\tau)$ (j=1,2,3) у середовищі Ω_1 та $E_j^2 = E_j^2(\bar{x},\tau)$ у включенні Ω_2, яка представляє собою початково-крайову задачу, що складається з системи телеграфних рівнянь

$$\Delta E_j^1 - \sigma_1\mu_1 \frac{\partial E_j^1}{\partial \tau} - \varepsilon_1\mu_1 \frac{\partial^2 E_j^1}{\partial \tau^2} = \mu_1 \frac{\partial \psi_j}{\tau}, \quad (2)$$

$$\Delta E_j^2 - \sigma_2\mu_2 \frac{\partial E_j^2}{\partial \tau} - \varepsilon_2\mu_2 \frac{\partial^2 E_j^2}{\partial \tau^2} = 0,$$

граничних умов

$$E_j^1 = 0, \;\; \bar{x} \in \partial\Omega_1, \quad (3)$$

початкових умов

$$E_j^k = 0, \frac{\partial E_j^k}{\partial \tau} = 0, \;\; x \in \Omega_k \;\; (k=1,2), \text{ при } \tau = 0. \quad (4)$$

Тут $\Delta-$ оператор Лапласа. Також потрібно додати умови ідеального контакту середовища Ω_1 та включення Ω_2, які полягають в наступному [Кауфман, 2000]: дотичні компоненти ЕП і МП та нормальні компоненти електричного струму є неперервними, нормальні компоненти МП є розривними, тобто

$$\begin{aligned} \vec{E}_d^1(x,\tau) &= \vec{E}_d^2(x,\tau), \\ \vec{H}_d^1(x,\tau) &= \vec{H}_d^2(x,\tau), \\ \sigma_1\vec{E}_n^1(x,\tau) &= \vec{E}_n^2(x,\tau), \\ \mu_1\vec{H}_n^1(x,\tau) &= \mu_2\vec{H}_n^2(x,\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Гармонічні коливання

Якщо проводити спостереження через досить тривалий час після зародження збурень, то можна припустити, що фізичні величини гармонічно змінюються в часі з кутовою частотою ω, тобто ми маємо справу з задачею про усталені коливання. Припускаючи, що

$$E_j^k(\bar{x},\tau) = \tilde{E}_j^k(\bar{x},\tau)e^{-i\omega\tau},$$

$$\psi_j^k(\bar{x},\tau) = \tilde{\psi}_j^k(\bar{x},\tau)e^{-i\omega\tau},$$

аналіз сильно спрощується, бо часова змінна виключається з рівнянь (1)-(5) і одержується задача:

$$\Delta\tilde{E}_j^1(\bar{x},\omega) + \mu_1\omega(\varepsilon_1\omega + i\sigma_1)\tilde{E}_j^1(\bar{x},\omega) =$$
$$= -i\omega\mu_1\tilde{\psi}_j(\bar{x},\omega), \quad (6)$$

$$\Delta\tilde{E}_j^2(\bar{x},\omega) + \mu_2\omega(\varepsilon_2\omega + i\sigma_2)\tilde{E}_j^2(\bar{x},\omega) = 0 \quad (7)$$

$$\tilde{E}_j^1 = 0. \quad (8)$$

Тут $\tilde{E}_j^k(\bar{x},\omega) = \tilde{E}_j^{k1}(\bar{x},\omega) + i\tilde{E}_j^{k2}(\bar{x},\omega)$, $\tilde{\psi}_j^k(\bar{x},\omega) = \tilde{\psi}_j^{k1}(\bar{x},\omega) + i\,\tilde{\psi}_j^{k2}(\bar{x},\omega)$ – комплексні амплітуди компонент вектора напруженості ЕП та сторонніх джерел струму.

Для знаходження розв'язку задачі (6)-(8) використано непрямий метод граничних елементів [Бенерджи, Баттерфилд, 1984].

Квазістаціонарна модель

У випадку квазістаціонарної моделі рівняння системи (6)-(7) дещо спростяться:

$$\Delta\tilde{E}_j^1(\bar{x},\omega) + i\mu_1\omega\sigma_1\tilde{E}_j^1(\bar{x},\omega) = -i\omega\mu_1\tilde{\psi}_j(\bar{x},\omega),$$

$$\Delta\tilde{E}_j^2(\bar{x},\omega) + i\mu_2\omega\sigma_2\tilde{E}_j^2(\bar{x},\omega) = 0 \quad (9)\text{-}(10).$$

Числові дослідження

Для числових експериментів було розглянуто включення Ω_2 форми паралелепіпеда розмірами p_x=100, p_y=100, p_z=30, розташованого на глибині h_0=40. Стороннім джерелом, яке збурює ЕМП є квадратна рамка зі стороною h=100 на глибині h_3=-0.001. Обчислення проводились для включення з різними фізичними характеристиками (провідністю, діелектричною й магнітною проникностями). На рис. 2 зображено залежність вертикальної компоненти $H_3^1(0,0,h_3,\omega)$, одержаних в центрі рамки, від кутової частоти ω, для параметрів: $\sigma_2=0{,}25\sigma_1$, $\mu_2=0.99994\mu_1$, $\varepsilon_2=2\varepsilon_1$, $\sigma_2=0.1\sigma_1$, $\mu_2=1.00008\mu_1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_1$, $\sigma_2=5\sigma_1$, $\mu_2=\mu_1$, $\varepsilon_2=30\varepsilon_1$, які відповідають нафтовому (ряд 3), газовому (ряд 2) та провідному (ряд 1) включенням. Також, для порівняння, наведено величини для однорідного півпростору: σ_1=1 См/м, $\mu_1=4\pi10^7$ Гн/м, $\varepsilon_1=15\varepsilon_0$, $\varepsilon_0=1/36\,\pi\,10^{-9}$ Ф/м (ряд 4).

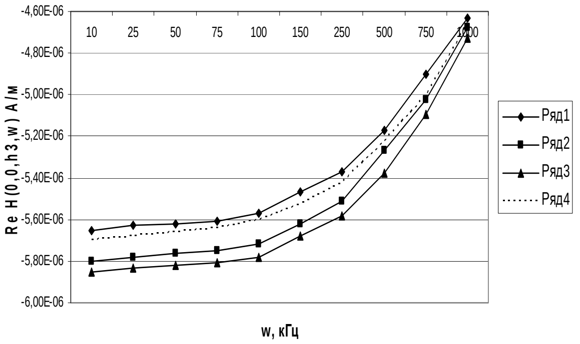

Рис. 2. Вплив електромагнітних параметрів включення на вертикальну компоненту МП

На основі числових експериментів було досліджено вплив глибини залягання включень на значення компонент ЕМП. Зокрема, на рис. 3 наведено графіки залежності амплітуди позірного питомого опору у випадку високоомних включень.

На основі числових експериментів було досліджено вплив глибини залягання включень на значення компонент ЕМП. Зокрема, на рис. 3 графіки залежності амплітуди позірного питомого опору у випадку високоомних включень.

Висновки

Методи граничних елементів дають можливість розв'язувати прямі тривимірні задачі у кусково-однорідному півпросторі. Проте такі методи дають хорошу точність лише у внутрішніх точках, на граничній поверхні чи контактній поверхні точність розрахунків різко зменшується, що є основним недоліком методів граничних елементів.

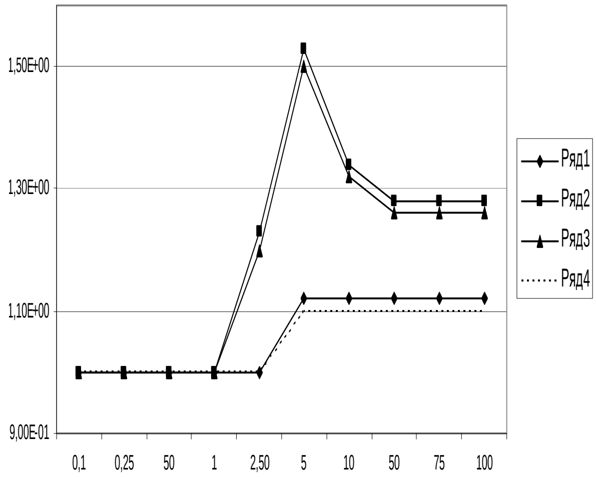

Рис. 3. Залежність амплітудних кривих від глибини залягання включення

Як відомо, обернену задачу розв’язують переважно на базі аналізу чутливості прямої задачі до змін геопараметрів і проводять його найчастіше шляхом багатократного використання процедури прямої задачі.

Література

Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. – Новосибирск, Наука, 1975. – 144 с.

Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

Кауфман А.А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля. – М.: Недра, 2000. – 483 с. – С. 190.

Жданов М.С. Электроразведка. – М.: Недра, 1986 – 316 с.

Электроразведка: Справочник геофизика. – М.: Недра, 1979. – 517 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.М. Журавчак, Ю.О. Федоришин

Для кусочно-однородного проводящего полупространства рассмотрена аналитически-численная методика нахождения компонент векторов напряженности электромагнитного поля (ЭМП), которое возбуждается посторонним источником тока. Предложено стационарную и квазистационарную модели для нахождения компонент векторов напряженности ЭМП. Проведены численные эксперименты для неоднородного включения с высшей, чем в геосреде, проводимостью.

Ключевые слова: уравнения Максвелла; уравнения Гельмгольца; устоявшиеся колебания ЭМП; косвенный метод граничных элементов.

MATHEMATICAL MODELLING OF STEADYOSCILLATIONS OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS ENVIROMENT BY MEANS OF THE INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD

L.M. Zhuravchak, Y.O. Fedoryshyn

The numerical-analytic technique for finding electric and magnetic components of electromagnetic field (EMF) in a piecewise homogeneous conductive half-space is suggested. EMF is inducted by a horizontal contour with current harmonically changing in time. The problem of Maxwell is formulated and solved by means of the boundary element method.

Keywords: Maxwell's equations; the Helmholtz equation; established EMF fluctuations; indirect boundary element method.

КВ ІГФ ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Львів Надійшла 16.08.2013