УДК 517.958+550.

Л. М. ЖУРАВЧАК

Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б, тел. +38(032)2648563, ел. пошта lzhuravchak@ukr.net

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСТОТНИХ ЗОНДУВАНЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПОЛЕМ У ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОМУ ПІВПРОСТОРІ

Мета. З метою адекватнішого опису реальних процесів, що характеризують поширення в земній корі гармонічного електромагнітного поля (ЕМП), збудженого штучними джерелами, розглянуто, на відміну від класичних моделей півпростору (однорідного та кусково-однорідного), локально-неоднорідне середовище (його електрофізичні характеристики залежать від координат лише в межах локальної області). Врахування залежності від координат електропровідності, магнітної та діелектричної проникності приводить до лінійних крайових задач математичної фізики зі змінними коефіцієнтами, для розв’язування яких переважно поєднують аналітичні та обчислювальні методи. **Методика**. Для знаходження розв’язків таких задач розроблено числово-аналітичний підхід, який ґрунтується на поєднанні методу інтегральних рівнянь (враховуючи його переваги щодо однорідних безмежних середовищ) з виділенням оператора, що характеризує вплив локальної області неоднорідності, подальшою дискретизацією цієї області, знаходженням невідомих компонент ЕМП у вузлах сітки після їх інтерполяції в межах елементів дискретизації. **Результати.** Розглянуто півпростір, що містить локальну область з довільною криволінійною межею, електрофізичні характеристики якого є неперервними функціями від координат. Для знаходження компонент вектора напруженості електричного поля (ЕП) побудовано математичну модель задачі, складену з системи рівнянь Гельмгольца з правою частиною, що описує вплив локальної неоднорідності і містить невідомі компоненти вектора напруженості ЕП та нульових крайових умов на вільній поверхні півпростору. Використовуючи спеціальний фундаментальний розв’язок рівняння Гельмгольца, записано інтегральні зображення (ІЗ) розв’язків вихідних рівнянь задачі з урахуванням крайових умов. Їх використано для побудови системи лінійних алгебраїчних рівнянь, утвореної внаслідок задоволення умов збігу невідомих компонент вектора напруженості ЕП, обчислених за допомогою інтегральних зображень, зі значеннями у вузлах елементів дискретизації локальної області. Після розв’язання вказаної системи за допомогою ІЗ розв’язку та похідних від них за координатами обчислено компоненти векторів напруженості електричного та магнітного полів у довільній точці півпростору. **Наукова новизна.** Без уведення потенціалів електричного чи магнітного типів обґрунтовано ефективність поєднання методу інтегральних рівнянь з методом зважених нев’язок для побудови числово-аналітичного розв’язку задачі про усталені коливання ЕМП у локально-неоднорідному півпросторі з урахуванням залежності усіх його електрофізичних характеристик від трьох декартових координат. **Практична значущість.** Побудовані дискретно-континуальні моделі, що враховують окремий та взаємний вплив залежності від координат електропровідності, магнітної та діелектричної проникності на поширення ЕМП, дають змогу вивчати процеси виникнення кондуктивних зарядів, зумовленої поляризації та магнітної поляризованості (намагніченості).

Ключові слова: частотні зондування, електромагнітне поле, усталені коливання, залежні від координат електрофізичні характеристики середовища.

Вступ

Електромагнітні (ЕМ) методи досліджень у різних прикладних галузях математичної фізики, зокрема, в пошуковій геофізиці, ґрунтуються на використанні змінного електромагнітного поля (ЕМП), яке проникає в середину об’єкта, і вивченні розподілу фізичних характеристик у тілі за виміряними на його граничній поверхні компонентами ЕМП. На цей час гармонічно змінні в часі електромагнітні поля в однорідних та горизонтально-шаруватих моделях земної кори під дією природних та штучних зовнішніх джерел досліджені за допомогою добре розвинутої теорії спектрального аналізу. Це особливо стосується широкого класу двовимірних магнітотелуричних задач, коли зовнішнє поле задавалось у вигляді однорідного магнітного поля або плоскої однорідної хвилі. Відомі також аналітичні розв’язки задач розподілу ЕМП в порівняно простих електричних умовах для чужорідних локальних включень канонічної чи близької до неї форми у дво- та тривимірних горизонтально-шаруватих моделях [Жданов, 2007; Кауфман, 2000]. Щодо об’єктів із областями неоднорідності складної форми, які краще відображають реальну геоелектричну ситуацію, то для математичного моделювання ЕМП, збудженого штучними джерелами, в останні роки на базі сучасних швидкодіючих комп'ютерів все ширше використовують числові та числово-аналітичні методи розв'язування прямих задач геоелектрики. Застосування найпоширеніших різницевих методів [Fomenko and Mogi, 2002] чи методів скінченних елементів [Badea et. al, 2001] потребує покриття сіткою всієї області, яку займає різнорідне тіло, що потребує великих об'ємів пам'яті й програм точного обернення матриць великої розмірності. Методи інтегральних рівнянь [Табаровский, 1975; Dmitriev and Nesmeyanova, 1992; Avdeev et al, 2002; Paulsen et al, 1988], які використовують під час знаходження фізичних полів у кусково-однорідних півбезмежних середовищах, економлять об'єм оперативної пам'яті під час роботи алгоритму внаслідок дискретизації лише граничної поверхні об'єкта та поверхонь поділу середовищ.

Водночас практично важливі задачі геоелектрики (вплив зони проникнення фільтрату бурового розчину на становлення поля опущеного в свердловину диполя, вплив горизонтальних неоднорідностей у структурній електророзвідці, рудна геофізика), пов'язані з виділенням аномалій, зумовлених локальними провідниками і магнетиками, на фоні впливу вміщувальних порід, досліджені ще недостатньо. Ця робота є частковою спробою математично вирішити поставлену проблему.

Мета

З метою адекватнішого опису реальних процесів, що характеризують поширення в земній корі гармонічно електромагнітного поля (ЕМП), збудженого штучними джерелами, розглянуто, на відміну від класичних моделей півпростору (однорідного та кусково-однорідного), локально-неоднорідне середовище (його електрофізичні характеристики залежать від координат у межах локальної області). Врахування залежності від координат електропровідності, магнітної та діелектричної проникності (так званої геометричної неоднорідності) приводить до лінійних крайових задач математичної фізики зі змінними коефіцієнтами, для розв'язування яких переважно поєднують аналітичні та обчислювальні методи.

Методика

Для знаходження розв'язків таких задач розроблено числово-аналітичний підхід, який ґрунтується на поєднанні методу інтегральних рівнянь (враховуючи його переваги щодо однорідних безмежних середовищ) з виділенням оператора, що характеризує вплив локальної області геометричної неоднорідності, подальшою дискретизацією цієї області, знаходженням невідомих компонент ЕМП у вузлах сітки після їх інтерполяції в межах елементів дискретизації.

Результати

1. Математична модель знаходження компонент ЕМП у випадку залежності електропровідності, магнітної та діелектричної проникностей від координат

1.1. Формулювання задачі

Розглянемо локально-неоднорідний півпростір, що займає область $\Omega = \mathbf{R}^{3-} = \{(x_1, x_2, x_3):$ $-\infty < x_1 < \infty,\ -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < 0\}$ у декартовій системі координат x_1, x_2, x_3, електропровідність, магнітна та діелектрична проникності якого неперервно залежать від координат у деякій локальній області Ω_g :

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_g(x)\chi_g(x),\ \ \mu(x) = \mu_0 + \mu_g(x)\chi_g(x),$$
$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_g(x)\chi_g(x), \tag{1}$$

причому $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega_g \cap \Gamma = \varnothing$, $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty,\ -\infty < x_2 < \infty, x_3 = 0\}$ – денна поверхня півпростору, $\partial\Omega_g$ – гранична поверхня області Ω_g , $\sigma_g(x), \mu_g(x), \varepsilon_g(x)$ дорівнюють нулю на $\partial\Omega_g$, $\chi_g(x)$ – характеристична функція області Ω_g , тобто $\chi_g(x) = 1$ при $x \in \Omega_g$, $\chi_g(x) = 0$ при $x \notin \Omega_g$. На денній поверхні півпростору задано нульовий розподіл компонент вектора напруженості електричного поля (ЕП), джерелом збурення є замкнений або відкритий контур *C*, розміщений у $\mathbf{R}^{3-} \setminus \Omega_g$.

Оскільки компоненти електричного та магнітного полів, а також сторонні струми гармонічно змінюються в часі з кутовою частотою ω , тобто $\tilde{\mathbf{E}}(x,\tau) = \mathbf{E}(x)e^{-i\omega\tau}$, $\tilde{\mathbf{H}}(x,\tau) = \mathbf{H}(x)e^{-i\omega\tau}$, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(x,\tau) = \boldsymbol{\psi}(x)e^{-i\omega\tau}$, для неоднорідного півпростору рівняння Максвела мають вигляд:

$$rot\mathbf{H}(x) = \sigma(x)\mathbf{E}(x) - i\omega\varepsilon(x)\mathbf{E}(x) + \boldsymbol{\psi}(x), \tag{2}$$

$$rot\mathbf{E}(x) = i\omega\mu(x)\mathbf{H}(x), \tag{3}$$

$$div\big(\mu(x)\mathbf{H}(x)\big) = 0, \tag{4}$$

$$div\big(\varepsilon(x)\mathbf{E}(x)\big) = g(x), \tag{5}$$

де $\mathbf{E}(x), \mathbf{H}(x), \boldsymbol{\psi}(x)$ – комплексні амплітуди компонент векторів напруженості електричного й магнітного полів та сторонніх джерел струму, в яких з метою спрощення записів залежність від частоти ω опущена, $g(x)$ – об'ємна густина електричних зарядів.

Застосувавши операцію *rot* до правої і лівої частин рівняння (3):

$$rotrot\mathbf{E}(x) = i\omega rot\big(\mu(x)\mathbf{H}(x)\big),$$

використавши тотожності

$$rotrot\mathbf{E}(x) = -\Delta\mathbf{E}(x) + grad\ div\mathbf{E}(x),$$

$$rot\big(\mu(x)\mathbf{H}(x)\big) = \mu(x)rot\mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x)\times grad\mu(x),$$

$$div\big(\varepsilon(x)\mathbf{E}(x)\big) = \varepsilon(x)div\mathbf{E}(x) + (\mathbf{E}(x), grad\varepsilon(x)),$$

рівняння (2), (3), (5) та подання (1), одержимо

$$-\Delta\mathbf{E}(x) + graddiv\mathbf{E}(x) = -i\omega\mu(x)\big(\sigma(x) - i\omega\varepsilon(x)\big)\mathbf{E}(x) - \\ -\mathbf{H}(x)\times grad\mu(x) - i\omega\mu(x)\boldsymbol{\psi}(x),\ x\in\Omega,$$

$$\Delta\mathbf{E}(x) + k_e^2\mathbf{E}(x) = -i\omega f_g(x)\mathbf{E}(x) - \\ -grad\big(\mathbf{E}(x), grad\ln\varepsilon(x)\big) - \frac{rot\mathbf{E}(x)}{\omega}\times grad\ln\mu(x) + \\ + grad\big(g(x)/\varepsilon(x)\big) - i\omega\mu(x)\boldsymbol{\psi}(x),\ x\in\Omega, \quad (6)$$

де $k_e^2 = \mu_0\omega(\varepsilon_0\omega + i\sigma_0)$, Δ – оператор Лапласа, $f_g(x) = \mu_g(x)\big(\sigma_0 - i\omega\varepsilon_0\big) + \mu(x)\big(\sigma_g(x) - i\omega\varepsilon_g(x)\big)$.

Розглянемо детальніше внесок кожного доданка, що входить у праву частину рівняння (6). ЕП у середовищі створюється не тільки вільними і сторонніми зарядами, але й зарядами, які виникають внаслідок поляризації речовини (поляризаційними або зв'язаними зарядами). Зв'язані заряди у речовині бувають двох типів. Заряди першого типу виникають навколо сторонніх (або вільних) зарядів, мають протилежний знак і саме тому створене ними ЕП зменшує початкове поле. Заряди другого типу виникають під дією ЕП у місцях неоднорідності середовища по $\varepsilon(x)$ [Светов, 2008]. Їхній вплив описують у правій частині рівняння (6) другий й четвертий доданки та частина $-\omega^2\mu(x)\varepsilon_g(x)\mathbf{E}(x)$ першого. Зрозуміло, що в однорідному ізотропному середовищі надлишкова густина зв'язаних електричних зарядів другого типу не виникає, середовище залишається нейтральним, а зв'язані заряди проявляють себе у формі неперервно розподілених диполів.

Зв'язані струми, які визначаються неоднорідною намагніченістю, подібно до зв'язаних зарядів, з одного боку, концентруються поблизу вільних і сторонніх струмів та змінюють відповідну їм величину магнітної індукції, а з іншого боку, вони виникають у місцях неоднорідності по $\mu(x)$ [Светов, 2008]. Їхній вплив у правій частині рівняння (6) описують третій доданок та частина $-i\omega\mu_g(x)\big(\sigma(x) - i\omega\varepsilon(x)\big)\mathbf{E}(x)$ першого. На відміну від магнітної індукції $\mathbf{B}(x)$ напруженість магнітного поля $\mathbf{H}(x)$ визначається лише вільними і сторонніми струмами, так само як вектор електричної індукції $\mathbf{D}(x)$ лише вільними і сторонніми зарядами (на відміну від $\mathbf{E}(x)$).

Аналогічно до того як під час поляризації електричним полем неоднорідного по $\varepsilon(x)$ середовища в ньому виникають зв'язані поляризаційні заряди, під час протікання струму провідності в неоднорідному по $\sigma(x)$ середовищі також виникають зв'язані заряди, але іншого походження, які називають кондуктивними [Светов, 2008]. Їхній вплив у правій частині рівняння (6) описує частина першого доданка $-i\omega\mu(x)\sigma_g(x)\mathbf{E}(x)$. Отже, якщо опір середовища збільшується в напрямку ЕП, то в цих місцях відбувається нагромадження зарядів, які зменшують це поле, а водночас і електричний струм. Як бачимо, перший доданок у правій частині рівняння (6) описує взаємний вплив усіх трьох розглянутих вище явищ.

Записавши векторне рівняння (6) через скалярні компоненти і доповнивши отриману систему крайовими умовами на вільній поверхні, маємо таку задачу для знаходження компонент вектора напруженості ЕП:

$$\Delta E_j(x) + k_e^2 E_j(x) = -i\omega f_g(x)E_j(x) - \\ -\big(\mathbf{E}(x), grad\ln\varepsilon(x)\big)_{,j} - \\ -\frac{1}{\omega}\Big[rot_s\mathbf{E}(x)\ln\mu(x)_{,m} - rot_m\mathbf{E}(x)\ln\mu(x)_{,s}\Big] + \\ +\big(g(x)/\varepsilon(x)\big)_{,j} - i\omega\mu(x)\psi_j(x),\ x\in\Omega,\ j=1,2,3, \quad (7)$$

$$E_j(x) = 0,\ x\in\Gamma, \quad (8)$$

де $f(x)_{,j} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $rot_s\mathbf{E}(x) = E_{m,j} - E_{j,m}$, $rot_m\mathbf{E}(x) = E_{j,s} - E_{s,j}$, співвідношення між індексами *j, s, m* таке: *j* = 1, *s* = 2, *m* = 3; *j* = 2, *s* = 3, *m* = 1; *j* = 3, *s* = 1, *m* = 2, $\left(\dfrac{g(x)}{\varepsilon(x)}\right)_{,j} = \dfrac{g(x)_{,j}\varepsilon(x) - g(x)\varepsilon(x)_{,j}}{\varepsilon^2(x)}$.

1.2. Побудова інтегральних зображень розв'язків крайової задачі

Для знаходження розв'язків поставленої задачі використаємо метод інтегральних рівнянь. Замість диференційного рівняння в часткових похідних запишемо інтегральне зображення розв'язку задачі (7), (8) для компонент вектора напруженості ЕП $E_j(x)$ та похідних від них за координатами $E_{j,k}(x)$ (k = 1, 2, 3) аналогічно [Журавчак Л. М., 2002]:

$$E_j(x) = i\omega I_g(x,\Phi_h, f_g, E_j) + \\ +\int_{\Omega_g}\Phi_h(x,\xi)\big(\mathbf{E}(\xi), grad\ln\varepsilon(\xi)\big)_{,j}d\Omega_g(\xi) + \\ +\frac{1}{\omega}[I_g(x,\Phi_h,\ln\mu_{,m},E_{m,j}) - I_g(x,\Phi_h,\ln\mu_{,m},E_{j,m}) - \\ -I_g(x,\Phi_h,\ln\mu_{,s},E_{j,s}) + I_g(x,\Phi_h,\ln\mu_{,s},E_{s,j})] - \\ -I_{\Omega j}(x,\Phi_h) + i\omega I_{cj}(x,\Phi_h,\mu), \quad (9)$$

$$E_{j,k}(x) = i\omega I_g(x, \Phi_{h,k}, f_g, E_j) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} \Phi_{h,k}(x,\xi)\big(\mathbf{E}(\xi), grad \ln \varepsilon(\xi)\big)_{,j} d\Omega_g(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{\omega}[I_g(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,m}, E_{m,j}) - I_g(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,m}, E_{j,m}) -$$

$$- I_g(x, \Phi_h, \ln\mu_{,s}, E_{j,s}) + I_g(x, \Phi_h, \ln\mu_{,s}, E_{s,j})] -$$

$$- I_{\Omega j}(x, \Phi_{h,k}) + i\omega I_{cj}(x, \Phi_{h,k}, \mu), \qquad (10)$$

Тут $\Phi_h(x,\xi)$ – спеціальний фундаментальний розв'язок (СФР) рівняння Гельмольця для півпростору, який автоматично задовольняє граничну умову (8), $\Phi_h(x,\xi) = \Phi(r) - \Phi(r')$,

$$I_g(x, \Phi_h, f, F) = \int_{\Omega_g} \Phi_h(x,\xi) f(\xi) F(\xi) d\Omega_g(\xi),$$

$$I_{\Omega j}(x, \Phi_h) = \int_{\Omega} \Phi_h(x,\xi)(g(\xi)/\varepsilon(\xi))_{,j} d\Omega(\xi),$$

$$I_{cj}(x, \Phi_h, f) = \int_C f(\xi)\Phi_h(x,\xi)\psi_j(\xi) dC(\xi),$$

$$\Phi_{h,j}(x,\xi) = \frac{\partial \Phi_h(x,\xi)}{\partial x_j}, \quad \Phi(r) = \frac{\exp(irk_e)}{4\pi r},$$

$$r^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j - \xi_j)^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3,$$

$$r'^2 = \sum_{j=1}^{2}(x_j - \xi_j)^2 + (x_3 + \xi_3)^2.$$

Спростимо інтеграли по Ω_g, що містять похідні $E_{j,m}(\xi)$, здійснивши інтегрування частинами за формулами:

$$\int_{\Omega_g} \Phi_h(x,\xi) F_{,m}(\xi) d\Omega_g(\xi) = \int_{\partial\Omega_g} \Phi_h(x,\xi) F(\xi) n_m(\xi) d\partial\Omega_g(\xi) -$$

$$- \int_{\Omega_g} \Phi_{h,m}(x,\xi) F(\xi) d\Omega_g(\xi),$$

де $n_1(x), n_2(x), n_3(x)$ – компоненти зовнішньої однозначно визначеної одиничної нормалі до $\partial\Omega_g$.

Тоді замість виразів (9), (10) одержимо:

$$E_j(x) = i\omega I_g(x, \Phi_h, f_g, E_j) +$$

$$\sum_{t=1}^{3}[I_\Gamma(x, \Phi_h, \ln\varepsilon_{,t} n_j, E_t) - I_g(x, \Phi_{h,j}, \ln\varepsilon_{,t}, E_t)] +$$

$$+ \frac{1}{\omega}[I_\Gamma(x, \Phi_h, \ln\mu_{,m} n_j, E_m) - I_g(x, \Phi_h, \ln\mu_{,mj}, E_m) -$$

$$- I_g(x, \Phi_{h,j}, \ln\mu_{,m}, E_m) -$$

$$- I_\Gamma(x, \Phi_h, \ln\mu_{,m} n_m + \ln\mu_{,s} n_s, E_j) +$$

$$+ I_g(x, \Phi_h, \ln\mu_{,mm} + \ln\mu_{,ss}, E_j) + I_g(x, \Phi_{h,m}, \ln\mu_{,m}, E_j) +$$

$$+ I_g(x, \Phi_{h,s}, \ln\mu_{,s}, E_j) + I_\Gamma(x, \Phi_h, \ln\mu_{,s} n_j, E_s) -$$

$$- I_g(x, \Phi_h, \ln\mu_{,sj}, E_s) - I_g(x, \Phi_{h,j}, \ln\mu_{,s}, E_s)] -$$

$$- I_{\Omega j}(x, \Phi_h) + i\omega I_{cj}(x, \Phi_h, \mu), \qquad (11)$$

$$E_{j,k}(x) = i\omega I_g(x, \Phi_{h,k}, f_g, E_j) +$$

$$\sum_{t=1}^{3}[I_\Gamma(x, \Phi_{h,k}, \ln\varepsilon_{,t} n_j, E_t) - I_g(x, \Phi_{h,jk}, \ln\varepsilon_{,t}, E_t)] +$$

$$+ \frac{1}{\omega}[I_\Gamma(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,m} n_j, E_m) - I_g(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,mj}, E_m) -$$

$$- I_g(x, \Phi_{h,jk}, \ln\mu_{,m}, E_m) -$$

$$- I_\Gamma(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,m} n_m + \ln\mu_{,s} n_s, E_j) +$$

$$+ I_g(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,mm} + \ln\mu_{,ss}, E_j) + I_g(x, \Phi_{h,mk}, \ln\mu_{,m}, E_j) +$$

$$+ I_g(x, \Phi_{h,sk}, \ln\mu_{,s}, E_j) + I_\Gamma(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,s} n_j, E_s) -$$

$$- I_g(x, \Phi_{h,k}, \ln\mu_{,sj}, E_s) - I_g(x, \Phi_{h,jk}, \ln\mu_{,s}, E_s)] -$$

$$- I_{\Omega j}(x, \Phi_{h,k}) + i\omega I_{cj}(x, \Phi_{h,k}, \mu), \qquad (12)$$

де $f(x)_{,tj} = \partial^2 f(x)/\partial x_t \partial x_j$.

Зауважимо, що для отримання (11), (12) використано подання скалярного добутку у вигляді:

$$\big(\mathbf{E}(x), grad \ln \varepsilon(x)\big) = \sum_{t=1}^{3} E_t(x) \ln\varepsilon(x)_{,t}$$

та уведено позначення:

$$I_\Gamma(x, \Phi_h, f, F) = \int_{\partial\Omega_g} \Phi_h(x,\xi) f(\xi) F(\xi) d\partial\Omega_g(\xi).$$

1.3. Узгоджена дискретизація області локальної неоднорідності та її межі. Інтерполяція невідомих функцій

Оскільки в праву частину рівняння (7) та інтегральні зображення (11), (12) входять невідомі $E_j(x)$, топологічно відобразимо область Ω_g та її межу $\partial\Omega_g$ на одиничний куб, а потім здійснимо узгоджену дискретизацію його внутрішньої області на елементи Ω_{gq} (q=1,…,Q) та межі на елементи Γ_v (v= 1,…,V) [Журавчак Л. М., 2002]. Для інтерполяції в елементах дискретизації Ω_{gq}, Γ_v використаємо лагранжеві 27-вузлові просторові та 9-вузлові поверхневі елементи відповідно [Бреббия и др., 1987]:

$$I_{gq}(x, \Phi_h, f, F) = \int_{\Omega_{gq}} \Phi_h(x,\xi) f(\xi) F(\xi) d\Omega_{gq}(\xi) =$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \Phi_h(x,\xi) f(\xi) |J(\xi,\eta)| F(\xi) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad (13)$$

$$I_{\Gamma v}(x, \Phi_h, f, F) = \int_{\Gamma_v} \Phi_h(x,\xi) f(\xi) F(\xi) d\Gamma_v(\xi) =$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \Phi_h(x,\xi) f(\xi) |J_2(\xi,\zeta)| F(\xi) d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (14)$$

Тут $J(\xi,\eta)$, $J_2(\xi,\zeta)$ – якобіани переходу від змінних ξ до η, ζ відповідно:

$$J(\xi,\eta)=\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_3}\right)-$$

$$-\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_3}\right)+\frac{\partial\xi_3}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_3}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_3}\right),$$

$$J_2(\xi,\zeta)=\sqrt{g_1^2(\xi,\zeta)+g_2^2(\xi,\zeta)+g_3^2(\xi,\zeta)}\ ,$$

$$g_1(\xi,\zeta)=\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_2},$$

$$g_2(\xi,\zeta)=\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_1},$$

$$g_3(\xi,\zeta)=\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}.$$

Змінні інтегрування та невідомі компоненти ЕП у просторовому Ω_{gq} та поверхневому Γ_v елементах дискретизації інтерполюємо за їх вузловими значеннями аналогічними формулами:

$$\tau_j^q=\tau_j^q(\eta)=\sum_{l_3=1}^{3}\sum_{l_2=1}^{3}\sum_{l_1=1}^{3}\beta_{l_1}(\eta_1)\beta_{l_2}(\eta_2)\beta_{l_3}(\eta_3)\tau_j^{ql_1l_2l_3}=$$

$$=\sum_{l=1}^{27}\phi_l(\eta)\tau_j^{ql}\ ,\ \tau\in\{\xi,E\},\ \eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\ ,$$

$$\tau_j^v=\tau_j^v(\zeta)=\sum_{l_2=1}^{3}\sum_{l_1=1}^{3}\beta_{l_1}(\zeta_1)\beta_{l_2}(\zeta_2)\tau_j^{vl_1l_2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{9}\alpha_n(\zeta)\tau_j^{vn}\ ;\ \zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\ ,$$

$$\beta_1(\eta_j)=0.5\eta_j(\eta_j-1),\ \ \beta_2(\eta_j)=1-\eta_j^2,$$

$$\beta_3(\eta_j)=0.5\eta_j(\eta_j+1)\ ,$$

$$\phi_l(\eta)=\beta_{l_1}(\eta_1)\beta_{l_2}(\eta_2)\beta_{l_3}(\eta_3)\ \text{ при}$$

$$l=l_1+l_1(l_2-1)+(l_1+l_1(l_2-1))(l_3-1)\ ;$$

$$\alpha_n(\zeta)=\beta_{l_1}(\zeta_1)\beta_{l_2}(\zeta_2)\ \text{ при }\ n=l_1+l_1(l_2-1)\ .$$

1.4. Побудова СЛАР для знаходження невідомих у вузлах сітки

Запишемо умови збігу значень $E_j(x^{ql})$, обчислених за допомогою інтегральних зображень (11) з урахуванням (13), (14), з невідомими E_j^{ql} у вузлах елемента дискретизації. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}E_j^{ql}[i\omega I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_h,f_g)-\delta_{pq}\delta_{wl}]+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}\ E_t^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\varepsilon_{,t}n_j)-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}\ \sum_{t=1}^{3}\ E_t^{ql}I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_{h,j},\ln\varepsilon_{,t})+$$

$$+\frac{1}{\omega}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[E_m^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\mu_{,m}n_j)-$$

$$-E_j^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\mu_{,m}n_m+\ln\mu_{,s}n_s)+$$

$$+E_s^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\mu_{,s}n_j)]+$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[E_j^{ql}I_{gq}^{lms}(x^{pw},\Phi_h,\mu)-$$

$$-E_m^{ql}I_{gq}^{lmj}(x^{pw},\Phi_h,\mu)-\ E_s^{ql}I_{gq}^{lsj}(x^{pw},\Phi_h,\mu)]=$$

$$=I_{\Omega j}(x^{pw},\Phi_h)-i\omega I_{cj}(x^{pw},\Phi_h,\mu),\qquad(15)$$

де $I_{gq}^{lms}(x,\Phi_h,\mu)=I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,mm}+\ln\mu_{,ss})+$

$$+I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m},\ln\mu_{,m})+I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s},\ln\mu_{,s})\ ,$$

$$I_{gq}^{lmj}(x,\Phi_h,\mu)=I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,mj})+I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,j},\ln\mu_{,m})\ ,$$

$$I_{\Gamma v}^{n}(x,\Phi_h,f)=\sum_{m_1=1}^{N}\sum_{m_2=1}^{N}w_{m_1}w_{m_2}\Phi_h(x,\xi^{ql})f(\xi^{ql})\times$$

$$\times\left|J_2(\xi^v,\zeta)\right|\alpha_n(\zeta_{1m_1},\zeta_{2m_2}),\qquad(16)$$

$$I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,f)=\sum_{m_1=1}^{N}\sum_{m_2=1}^{N}\sum_{m_3=1}^{N}w_{m_1}w_{m_2}w_{m_3}\Phi_h(x,\xi^{ql})\times$$

$$\times f(\xi^{ql})\left|J(\xi^{ql},\eta)\right|\phi_l(\eta_{1m_1},\eta_{2m_2},\eta_{3m_3})\ ,\qquad(17)$$

тобто для інтегрування (13), (14) використано квадратурні формули Гаусса; N – загальне число точок інтегрування; $(\zeta_{1m_1},\zeta_{2m_2})$, $(\eta_{1m_1},\eta_{2m_2},\eta_{3m_3})$ – координати точки інтегрування; w_{m_1},w_{m_2},w_{m_3} – відповідні вагові множники; при N=4 вони мають вигляд: $\zeta_{j1}=\eta_{j1}=-0.86114;\ \zeta_{j2}=\eta_{j2}=-0.33998;$ $\zeta_{j3}=\eta_{j3}=0.33998;\ \zeta_{j4}=\eta_{j4}=0.86114$ (j=1,2,3); $w_1=w_4=0.34785;\ w_2=w_3=0.65215$.

Підставивши отримані як розв'язки системи (15) E_j^{ql} у аналог (9) з урахуванням (16), (17), знайдемо значення компонент вектора напруженості ЕП у будь-якій точці півпростору:

$$E_j(x)=i\omega\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}E_j^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,f_g)+$$

$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}\ E_t^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\varepsilon_{,t}n_j)-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}\ \sum_{t=1}^{3}\ E_t^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,j},\ln\varepsilon_{,t})+$$

$$+\frac{1}{\omega}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[E_m^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,m}n_j)-$$

$$-E_j^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,m}n_m+\ln\mu_{,s}n_s)+$$

$$+E_s^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,s}n_j)]+$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[E_j^{ql}I_{gq}^{lms}(x,\Phi_h,\mu)-\ E_m^{ql}I_{gq}^{lmj}(x,\Phi_h,\mu)-$$

$$-E_s^{ql}I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_h,\mu)]-I_{\Omega j}(x,\Phi_h)+i\omega I_{cj}(x,\Phi_h,\mu)\ .(18)$$

Для компонент вектора напруженості магнітного поля (МП) маємо такі інтегральні зображення, отримані на основі рівнянь (3) та аналогу (10) :

$$H_j(x)=-\frac{i}{\omega\mu(x)}rot_j\mathbf{E}(x)=-\frac{i}{\omega\mu(x)}\Big(E_{s,m}(x)-E_{m,s}(x)\Big),$$

$$H_j(x) = -\frac{i}{\omega\mu(x)}\{\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} i\omega(E_s^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m}, f_g) -$$

$$- E_m^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s}, f_g)) + \sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}\sum_{t=1}^{3} E_t^{vl} I_{\Gamma vsm}^{lt}(x,\Phi_{h,m},\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[E_j^{vl} I_{\Gamma vsm}^{lj}(x,\Phi_h,\mu) - E_s^{vl} I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi_h,\mu) +$$

$$+E_m^{vl} I_{\Gamma v}^{lmsj}(x,\Phi_h,\mu)] + \frac{1}{\omega}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[E_s^{ql}\left(I_{gq}^{ljm}(x,\Phi_{h,m},\mu) +\right.$$

$$\left.+ I_{gq}^{lsm}(x,\Phi_{h,s},\mu)\right) - E_j^{ql}\left(I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m},\ln\mu_{,js}) -\right.$$

$$\left.- I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s},\ln\mu_{,jm})\right) - E_m^{ql}\left(I_{gq}^{lms}(x,\Phi_{h,m},\mu) +\right.$$

$$\left.+ I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_{h,s},\mu) - I_{\Omega s}(x,\Phi_{h,m}) + I_{\Omega m}(x,\Phi_{h,s}) +\right.$$

$$+i\omega(I_{cs}(x,\Phi_{h,m},\mu) - I_{cm}(x,\Phi_{h,s},\mu))\}, \qquad (19)$$

де

$$I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi_h,\mu) = I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{h,m},\ln\mu_{,j} n_j + \ln\mu_{,m} n_m) +$$

$$+ I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{h,s},\ln\mu_{,s} n_m),$$

$$I_{\Gamma vsm}^{lj}(x,\Phi_h,\mu) = I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{h,m},\ln\mu_{,j} n_s) - I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_{h,s},\ln\mu_{,j} n_m).$$

2. *Математична модель знаходження компонент ЕМП для дослідження впливу кондуктивних зарядів*

Якщо лише електропровідність півпростору неперервно залежить від координат у деякій локальній області Ω_g, а магнітна та діелектрична проникності середовища є постійними, рівняння (7) значно спрощується:

$$\Delta E_j(x) + k^2 E_j(x) = -i\omega\mu_0\sigma_g(x)\chi_g(x)E_j(x) +$$

$$+g(x)_{,j}/\varepsilon_0 - i\omega\mu_0\psi_j(x),\ x\in\Omega,\ j=1,2,3. \qquad (20)$$

Відповідно будуть простішими СЛАР для знаходження невідомих E_j^{ql} (15) і вирази для інтегральних зображень компонент ЕП (18) та МП (19):

$$i\omega\mu_0\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} E_j^{ql}[I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_h,\sigma_g) - \delta_{pq}\delta_{wl}] =$$

$$= I_{\Omega j}(x^{pw},\Phi_h) - i\omega\mu_0 I_{cj}(x^{pw},\Phi_h,1), \qquad (21)$$

$$E_j(x) = i\omega\mu_0\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} E_j^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,\sigma_g) -$$

$$- I_{\Omega j}(x,\Phi_h) + i\omega\mu_0 I_{cj}(x,\Phi_h,1), \qquad (22)$$

$$H_j(x) = -\frac{i}{\omega\mu_0}\{\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} i\omega(E_s^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m},\sigma_g) -$$

$$- E_m^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s},\sigma_g)) - I_{\Omega 0s}(x,\Phi_{h,m}) + I_{\Omega 0m}(x,\Phi_{h,s}) +$$

$$+i\omega\mu_0(I_{cs}(x,\Phi_{h,m},1) - I_{cm}(x,\Phi_{h,s},1))\}, \qquad (23)$$

де $I_{\Omega 0 j}(x,\Phi_h) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Omega}\Phi_h(x,\xi)g(\xi)_{,j}\,d\Omega(\xi)$.

3. *Математична модель знаходження компонент ЕМП для дослідження впливу магнітної поляризованості*

Якщо лише магнітна проникність півпростору неперервно залежить від координат у деякій локальній області Ω_g, а електропровідності та діелектрична проникність середовища є постійними, то рівняння (7) запишемо так:

$$\Delta E_j(x) + k^2 E_j(x) = -i\omega\sigma_0\mu_g(x)E_j(x) -$$

$$-\frac{1}{\omega}\left[\left(E_{m,j} - E_{j,m}\right)\ln\mu(x)_{,m} - \left(E_{j,s} - E_{s,j}\right)\ln\mu(x)_{,s}\right] +$$

$$+g(x)_{,j}/\varepsilon_0 - i\omega\mu(x)\psi_j(x),\ x\in\Omega,\ j = 1,2,3. \quad (24)$$

СЛАР для знаходження невідомих E_j^{ql} (15) і вирази для інтегральних зображень компонент ЕП (18) та МП (19) мають вигляд:

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} E_j^{ql}[i\omega\sigma_0 I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_h,\mu_g) - \delta_{pq}\delta_{wl}] +$$

$$+\frac{1}{\omega}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}[E_m^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\mu_{,m} n_j) -$$

$$- E_j^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\mu_{,m} n_m + \ln\mu_{,s} n_s) +$$

$$+ E_s^{vn} I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\mu_{,s} n_j)] +$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[E_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x^{pw},\Phi_h,\mu) -$$

$$- E_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x^{pw},\Phi_h,\mu) - E_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x^{pw},\Phi_h,\mu)] =$$

$$= I_{\Omega 0 j}(x^{pw},\Phi_h) - i\omega I_{cj}(x^{pw},\Phi_h,\mu), \qquad (25)$$

$$E_j(x) = i\omega\sigma_0\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} E_j^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,\mu_g) +$$

$$+\frac{1}{\omega}[\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[E_m^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,m} n_j) -$$

$$- E_j^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,m} n_m + \ln\mu_{,s} n_s) +$$

$$+ E_s^{vl} I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\mu_{,s} n_j)] +$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[E_j^{ql} I_{gq}^{lms}(x,\Phi_h,\mu) - E_m^{ql} I_{gq}^{lmj}(x,\Phi_h,\mu) -$$

$$- E_s^{ql} I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_h,\mu)] - I_{\Omega 0 j}(x,\Phi_h) + i\omega I_{cj}(x,\Phi_h,\mu), (26)$$

$$H_j(x) = -\frac{i}{\omega\mu(x)}\{\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27} i\omega\sigma_0(E_s^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m},\mu_g) -$$

$$- E_m^{ql} I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s},\mu_g)) + \frac{1}{\omega}\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}[E_j^{vl} I_{\Gamma vsm}^{lj}(x,\Phi_h,\mu) -$$

$$- E_s^{vl} I_{\Gamma v}^{lsmj}(x,\Phi_h,\mu) + E_m^{vl} I_{\Gamma v}^{lmsj}(x,\Phi_h,\mu)] +$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}[E_s^{ql}\left(I_{gq}^{ljm}(x,\Phi_{h,m},\mu) + I_{gq}^{lsm}(x,\Phi_{h,s},\mu)\right) -$$

$$-E_j^{ql}\left(I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m},\ln\mu_{,js})-I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s},\ln\mu_{,jm})\right)-$$
$$-E_m^{ql}\left(I_{gq}^{lms}(x,\Phi_{h,m},\mu)+I_{gq}^{lsj}(x,\Phi_{h,s},\mu)\right)-$$
$$-I_{\Omega 0s}(x,\Phi_{h,m})+I_{\Omega 0m}(x,\Phi_{h,s})+$$
$$+i\omega(I_{cs}(x,\Phi_{h,m},\mu)-I_{cm}(x,\Phi_{h,s},\mu))\}. \quad (27)$$

4. Математична модель знаходження компонент ЕМП для дослідження впливу викликаної поляризації

Якщо лише діелектрична проникність півпростору неперервно залежить від координат у деякій локальній області Ω_g, а електропровідність та магнітна проникність середовища є постійними, рівняння (7) мають вигляд:

$$\Delta E_j(x)+k_e^2E_j(x)=-\omega^2\mu_0\varepsilon_g(x)E_j(x)-$$
$$-\left(\mathbf{E}(x),grad\ln\varepsilon(x)\right)_{,j}+\left(g(x)/\varepsilon(x)\right)_{,j}-i\omega\mu_0\psi_j(x),$$
$$x\in\Omega,\ j=1,2,3. \quad (28)$$

СЛАР для знаходження невідомих E_j^{ql} (15) і вирази для інтегральних зображень компонент ЕП (18) та МП (19) запишемо так:

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}E_j^{ql}[\omega^2\mu_0I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_h,\varepsilon_g)-\delta_{pq}\delta_{wl}]+$$
$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{n=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}E_t^{vn}I_{\Gamma v}^{n}(x^{pw},\Phi_h,\ln\varepsilon_{,t}n_j)-$$
$$-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}\sum_{t=1}^{3}E_t^{ql}I_{gq}^{l}(x^{pw},\Phi_{h,j},\ln\varepsilon_{,t})=$$
$$=I_{\Omega j}(x^{pw},\Phi_h)-i\omega\mu_0I_{cj}(x^{pw},\Phi_h,1), \quad (29)$$

$$E_j(x)=\omega^2\mu_0\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}E_j^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_h,\varepsilon_g)+$$
$$+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}E_t^{vl}I_{\Gamma v}^{l}(x,\Phi_h,\ln\varepsilon_{,t}n_j)-$$
$$-\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}\sum_{t=1}^{3}E_t^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,j},\ln\varepsilon_{,t})-$$
$$-I_{\Omega j}(x,\Phi_h)+i\omega\mu_0I_{cj}(x,\Phi_h,1), \quad (30)$$

$$H_j(x)=-\frac{i}{\omega\mu(x)}\{\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{27}\omega^2\mu_0(E_s^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,m},\varepsilon_g)-$$
$$-E_m^{ql}I_{gq}^{l}(x,\Phi_{h,s},\varepsilon_g))+\sum_{v=1}^{V}\sum_{l=1}^{9}\sum_{t=1}^{3}E_t^{vl}I_{\Gamma vsm}^{lt}(x,\Phi_{h,m},\varepsilon)-$$
$$-I_{\Omega s}(x,\Phi_{h,m})+I_{\Omega m}(x,\Phi_{h,s})+$$
$$+i\omega\mu_0(I_{cs}(x,\Phi_{h,m},1)-I_{cm}(x,\Phi_{h,s},1))\}. \quad (31)$$

Наукова новизна

Без уведення потенціалів електричного чи магнітного типів обґрунтовано ефективність поєднання методу інтегральних рівнянь з методом зважених нев'язок для побудови числово-аналітичного розв'язку задачі про усталені коливання ЕМП в локально-неоднорідному півпросторі з урахуванням залежності усіх його електрофізичних характеристик від трьох декартових координат.

Практична значущість

Побудовані дискретно-континуальні моделі, що враховують окремий ((20)–(23), (24)–(27), (28)–(31)) та взаємний ((7), (15), (18), (19)) вплив залежності від координат електропровідності, магнітної та діелектричної проникності на поширення ЕМП, дають змогу вивчати процеси виникнення кондуктивних зарядів, викликаної поляризації та магнітної поляризованості (намагніченості).

Висновки

У статті розглянуто ідейні та методичні аспекти відшукання компонент напруженості гармонічного ЕМП у півпросторі з локальною неоднорідністю довільної форми. Побудовано математичну модель задачі та розроблено числово-аналітичну методику, яка істотно зменшує похибки, пов'язані з апроксимацією крайової задачі, оскільки внаслідок застосування СФР абсолютно точно задовольняється вихідне рівняння (7) в області $\mathbf{R}^{3-}\setminus\Omega_g$ та крайові умови (8). Похибки, зумовлені операціями дискретизації та числового інтегрування (як свідчить досвід застосування аналогічного підходу до задач неусталеної фільтрації стисливої рідини, теплопровідності та електромагнетизму у кусково-однорідних об'єктах [Журавчак, Струк, 2013; Журавчак та ін., 2014; Журавчак, Забродська, 2009; Журавчак, Федоришин, 2014]) не матимуть суттєвого впливу і є достатньо контрольованими (наприклад, ітераційними методами) внаслідок довільності вибору різної кількості елементів дискретизації Ω_g та вузлів інтегрування у квадратурній формулі Гаусса. Це дає підстави вважати, що комп'ютерна реалізація цього алгоритму дасть змогу моделювати ЕМП штучного походження з високим ступенем точності, що і ми плануємо зробити в подальших дослідженнях. Розроблену методику можна легко розширити для врахування залежності від координат фізичних характеристик у кусково-однорідних об'єктах, оскільки модульний принцип програмної реалізації запропонованого підходу уніфікує розроблення його складових і сприяє підвищенню універсальності й гнучкості побудованої математичної моделі.

Одержані розв'язки прямих тривимірних задач слугуватимуть основою для розроблення підходів до виявлення у земній корі локальних чужорідних включень, визначення їхніх фізичних характеристик і геометричних параметрів, тобто до розв'язування обернених задач.

Література

Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике / Жданов М. С. – М. : Научный мир, 2007. – 712 с.

Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля / Кауфман А. А. ; Пер. с англ. – М. : Недра, 2000. – 483 с.

Fomenko E. Y. A new computation method for a staggered grid of 3D EM field conservative modeling / Fomenko E. Y., and Mogi T. // Earth, Planets and Space, 2002, **54**, 499–509.

Badea E. A. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials / Badea E. A., Everett M. E., Newman G. A., and Biro O. // Geophysics, 2001, **66,** 786–799.

Табаровский Л. А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики / Табаровский Л. А. – Новосибирск : Наука, 1975. – 140 с.

Dmitriev V. I. Integral equation method in three-dimensional problems of low-frequency electrodynamics / Dmitriev V. I., and Nesmeyanova N. I. // Computat. Math. Modeling, New-York: Plenum Pub. Corp., 1992, **3**, 313–317.

Avdeev D. B. Three-dimensional induction logging problems / Avdeev D. B., Kuvshinov A. V., Pankratov O. V., and Newman G. A. – Part I: An integral equation solution and model comparisons // Geophysics, 2002, **67**, 413–426.

Paulsen K. D. Three-dimensional finite, boundary, and hybrid element solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media / Paulsen K. D., Linch D. R., and Strohbehn J. W. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1988, **36**, 682–693.

Светов Б. С. Основы геоэлектрики / Светов Б. С. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 656 с.

Журавчак Л. М. Моделювання неусталеного електромагнітного поля у провідному півпросторі з локальною неоднорідністю / Журавчак Л. М. // Геофіз. журнал, 2002. – Т. 24, № 5. – С. 120–126.

Бреббия К. Методы граничных элементов / Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. – М. : Мир, 1987. – 524 с.

Журавчак Л. М. Неусталена фільтрація стисливої рідини у кусково-однорідному пласті з нелінійною поведінкою матеріалів зон / Журавчак Л. М., Струк А. Є. // Геодинаміка. Видавництво Львівської політехніки. – Львів, 2013 – № 2 (15) – С. 148–150.

Журавчак Л. Чисельно-аналітичний підхід до розрахунку теплових полів з урахуванням термочутливості матеріалу середовища та мішаних крайових умов / Журавчак Л., Грицько Б., Крук О. // Доповіді НАН України. – 2014. – №. 12.– С. 51–57.

Журавчак Л. Математичне моделювання ефекту викликаної поляризації у тривимірних задачах геоелектророзвідки / Журавчак Л., Забродська Н. // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Сер. “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – Львів, 2009. – № 650. – С. 158–167.

Журавчак Л. М. Розпізнавання провідних та високоомних включень у кусково-однорідному півпросторі при математичному моделюванні усталених коливань електромагнітного поля / Журавчак Л. М., Федоришин Ю. О. // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Сер. “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – Львів, 2014. – № 800. – С. 159–167.

Л. М. ЖУРАВЧАК

Карпатское отделение Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, 79060, г. Львов, ул. Научная, 3-б, тел. +38(032)2648563, эл. почта lzhuravchak@ukr.net

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Цель. С целью более адекватного описания реальных процессов, характеризирующих распространение в земной коре гармонического электромагнитного поля (ЭМП), возбужденного искусственными источниками, рассмотрено, в отличие от классических моделей полупространства (однородного и кусочно-однородного), локально-неоднородную среду (ее электрофизические характеристики зависят от координат только в локальной области). Учет зависимости от координат электропроводности, магнитной и диэлектрической проницаемости приводит к линейным краевым задачам математической физики с переменными коэффициентами**,** для решения которых преимущественно совместно используют аналитические и вычислительные методы. **Методика**. Для нахождения решений таких задач разработан численно-аналитический подход, базирующийся на комбинированном использовании метода интегральных уравнений (учитывая его преимущества в однородных неограниченных средах) с выделением оператора, который характеризирует влияние локальной области геометрической неоднородности, дальнейшей дискретизацией этой области, нахождением неизвестных компонент ЭМП в узлах сетки после их интерполяции в элементах дискретизации. **Результаты.** Рассмотрено полупространство, содержащее локальную область с произвольной криволинейной границей, электрофизические характеристики которого описаны непрерывными функциями координат. Для нахождения компонент вектора напряженности электрического поля (ЭП) построена математическая модель задачи, которая составлена из системы уравнений Гельмгольца с правой частью, описывающей влияние локальной неоднородности и содержащей неизвестные компоненты вектора напряженности ЭП, и нулевых граничных условий на свободной поверхности полупространства. С использованием специального фундаментального решения уравнения Гельмгольца, записаны интегральные изображения (ИИ) решений исходных уравнений задачи с учетом граничных условий. Они использованы для построения системы линейных алгебраических уравнений, полученной вследствие удовлетворения условий совпадения неизвестных компонент вектора напряженности ЭП, вычисленных с помощью интегральных изображений, со значениями в узлах элементов дискретизации локальной области. После решения указанной системы с помощью ИИ решения и производных от них по координатам вычислены компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей в произвольной точке полупространства. **Научная новизна.** Не вводя потенциалов электрического или магнитного типов обосновано эффективность совместного использования метода интегральных уравнений с методом взвешенных невязок для построения численно-аналитического решения задачи об установившихся колебаниях ЭМП в локально-неоднородном полупространстве с учетом зависимости всех его электрофизических характеристик от троих декартовых координат. **Практическая значимость.** Построенные дискретно-континуальные модели, учитывающие отдельное и взаимное влияние зависимости от координат электропроводности, магнитной и диэлектрической проницаемости на распространение ЭМП позволят изучать процессы возникновения кондуктивных зарядов, вызванной поляризации и магнитной поляризуемости (намагниченности).

Ключевые слова: частотные зондирования, электромагнитное поле, установившиеся колебания, зависимые от координат электрофизические характеристики среды.

L. M. ZHURAVCHAK

Carpathian Branch of Subbotin Name Institute of Geophysics of NAS of Ukraine, 3-b, Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine, tel. +38(032)2648563, e-mail lzhuravchak@ukr.net

MATHEMATICAL SIMULATION OF FREQUENCY SOUNDING WITH ELECTROMAGNETIC FIELD IN A LOCALLY INHOMOGENEOUS HALF-SPACE

Purpose. In order to adequately describe real processes that characterize the spread in the crust harmonic electromagnetic field (EMF) excited by artificial sources , unlike classical models (homogeneous and piecewise homogeneous half-space), a locally inhomogeneous half-space (its electrical characteristics depend on coordinate only within the local area) is considered. Taking into account depending on the coordinates of conductivity, permeability and permittivity (so-called geometric heterogeneity) we get linear boundary problems of mathematical physics with variable coefficients, which mainly solved by a combination of analytical and computational methods. **Methodology.** To find solutions to these problems the numerically-analytical approach based on the combination of integral equations method (IEM) with extraction of the operator that describes the influence of the local area geometric heterogeneity is constructed. Taking into account the advantages of the IEM in a homogeneous infinite medium, we make discretization only in the local area and find the unknown EMF components in the grid nodes after their interpolation in the element of discretization. **Results.** A half-space containing the local area with an arbitrary curved boundary is considered. Its electrical characteristics are continuous functions of the coordinates. To find the component of the electric field (EF) mathematical model of the problem, composed of the Helmholtz equations system and zero boundary conditions on the free surface of the half-space, is built. The right side of the system describes the effect of local heterogeneity and contains unknown EF strength vector components. Using special fundamental solution of the Helmholtz equation that automatically satisfies the boundary condition, integral representations (IR) of solutions of equations initial problem conditions are written. They are used for constructing a system of linear equations formed as a result of satisfaction coincidence unknown EF strength vector components calculated using the integral representations with the values in the grid nodes of the local area. After solving this system using IR of solution and their derivatives of the coordinates the vector components of the electric and magnetic fields at an arbitrary point of a half-space are calculated. **Originality**. Without the introduction of electric or magnetic potentials the numerically-analytical solution of the problem of established oscillations of EMF in a locally homogeneous half-space is constructed. Dependencies on three Cartesian coordinates all its electrical characteristics are included. The effectiveness of a combination of methods of integral equations and weighted residuals for solving this problem is justified. **Practical significance.** Built discrete-continual models take into account the impact separate and mutual dependence on the coordinates conductivity, permeability and permittivity on the EMF distribution. This allows you to explore the effect of conductive charges, induced polarization and magnetic polarization (magnetization) in the process.

Key words: frequency sounding, electromagnetic field**,** unsteady oscillations, dependent on coordinates electrical characteristics of medium.

REFERENCES

Zhdanov M. S. Geophysical inverse theory and regularization of problems. Amsterdam: Elsevier, 2002.
Kaufman A. A. Geophysical field theory and method. Part B,C Electromagnetic fields I, II – NY: Academic Press, 1996.
Fomenko, E. Y., and Mogi, T. A new computation method for a staggered grid of 3D EM field conservative modeling: Earth, Planets and Space, 2002, no. 54, 499-509.
Badea, E. A., Everett, M. E., Newman, G. A., and Biro, O. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials: Geophysics, 2001, no. 66**,** pp.786–799.
Tabarovskij L. A. Primenenie metoda integral'nyh uravnenij v zadachah geojelektriki [Application of the method of integral equations in geoelectrics problems]. Novosibirsk: Nauka [Science], 1975, 140 p.
Dmitriev, V. I., and Nesmeyanova, N. I. Integral equation method in three-dimensional problems of low-frequency electrodynamics: Computat. Math. Modeling, New-York: Plenum Pub. Corp., 1992, no. 3, 313–317.
Avdeev, D. B., Kuvshinov, A. V., Pankratov, O. V., and Newman, G. A., Three-dimensional induction logging problems, Part I: An integral equation solution and model comparisons: Geophysics, 2002, no. 67, 413–426.
Paulsen, K. D., Linch, D. R., and Strohbehn, J. W. Three-dimensional finite, boundary, and hybrid element solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media: IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1988, no. 36, pp. 682–693.
Svetov B. S. Osnovy geojelektriki [Basics geoelectrics]. Moscow: Izdatel’stvo LKI [LCI Publisher], 2008, 656 p.
Zhuravchak L. M. Modeljuvannja neustalenogo elektromagnitnogo polja u providnomu pivprostori z lokal'noju neodnoridnistju [Simulation of unsteady electromagnetic field in the electroconductive half-space with local inhomogeneity]. Geofiz. Zhurnal [Geophysical journal], 2002. T. 24, no. 5, pp. 120–126.
Brebbia C., Telles J., Wrobel L. Boundary element techniques. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
Zhuravchak L. M., Struk A. Ye. Neustalena fil'tracija styslyvoi' ridyny u kuskovo-odnoridnomu plasti z nelinijnoju povedinkoju materialiv zon [Unsteady flow of compressible fluid in a piecewise homogeneous reservoir with nonlinear behaviour of regions materials]. Geodynamika [Geodynamics]. Lviv Polytechnic Publishing House, Lviv, 2013, no. 2 (15), pp. 148–150.
Zhuravchak L., Hrytsko B., Kruk O. *Chysel'no-analitychnyj pidhid do rozrahunku teplovyh poliv z urahuvannjam termochutlyvosti materialu seredovyshha ta mishanyh krajovyh umov* [Numerical and analytical approach to the calculation of thermal fields including thermo sensibility material behavior for complex boundary conditions. Dopovidi NAN Ukrai'ny [Reports of NAS of Ukraine]. 2014, no. 12, pp. 51–57.
Zhuravchak L., Zabrods’ka N. *Matematychne modeljuvannja efektu vyklykanoi' poljaryzacii' u tryvymirnyh zadachah geoelektrorozvidky* [Mathematical modeling of induced polarization effect in two-dimensional geoelectrical problems]. *Visnyk Nats. un-tu “L'vivs'ka politekhnika”. Ser. “Komp“yuterni nauky ta informatsiyni tekhnolohiyi”* [Journal of National University “Lviv Polytechnic”. Series “Computer science and information technologies”], Lviv, 2009, no. 650, pp. 158–167.
Zhuravchak L., Fedoryshyn Yu. *Rozpiznavannja providnyh ta vysokoomnyh vkljuchen' u kuskovo-odnoridnomu pivprostori pry matematychnomu modeljuvanni ustalenyh kolyvan' elektromagnitnogo polja* [Recognition of conductive and high-resistive inclusions in a piecewise homogeneous half-space in process of mathematical modeling of steady oscillations of an electromagnetic field]. Visnyk Nats. un-tu „L'vivs'ka politekhnika”. Ser. “Komp“yuterni nauky ta informatsiyni tekhnolohiyi” [Journal of National University “Lviv Polytechnic”. Series “Computer science and information technologies”], Lviv, 2014. No. 800, pp. 159–167.

Надійшла 25.09.2015 р.