

УДК 528.721

А. ЦЕРКЛЕВИЧ, О. ЗАЯЦЬ, Є. ШИЛО

Кафедра інженерної геодезії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна, 79013 тел.(099)-95-41-434, ел. пошта shyloyevhenii@gmail.com

АПРОКСИМАЦІЯ ВИСОТ ФІЗИЧНОЇ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ ДВОВІСНИМ І ТРИВІСНИМ ЕЛІПСОЇДАМИ

Мета. В науках про Землю широкого значення набувають планетарні задачі. Метою цієї роботи є удосконалення методики та створення оптимального алгоритму для апроксимації поверхні літосфери Землі двовісним і тривісним еліпсоїдами для дослідження динаміки зміни її фігури. **Методика.** Класичні підходи визначення фігури Землі передбачають визначення еліпсоїда обертання, що найкраще описує поверхню геоїда, або ж квазігеоїда. Такий підхід забезпечує вихідну поверхню відліку для багатьох референційних систем. Для вивчення геодинамічних процесів у планетарному масштабі актуальними є питання визначення розмірів і орієнтування такого еліпсоїда, який найбільш близько підходить би до поверхні літосфери Землі. Вирішення цієї задачі розглядається на прикладі апроксимації висот поверхні літосфери двовісним і тривісним еліпсоїдом. Описані алгоритми застосовуються для апроксимації висот моделі геоїда EGM2008 та ЦМР ETOPO1. Висоти моделей усереднюються в межах трапецій $5^\circ \times 5^\circ$. На основі цих даних знаходяться параметри двовісного і тривісного еліпсоїдів. Для перевірки алгоритмів вирішення цих задач застосовується порівняльний аналіз результатів апроксимації запропонованими методами. **Результати.** Отримані результати і їх порівняльний аналіз з параметрами еліпсоїда, встановлених у геодезичних даних, свідчать про те, що запропоновані алгоритми апроксимації є достовірними і їх можна використовувати для дослідження планетарної динаміки фігури Землі. **Наукова новизна.** Удосконалена методика та створені оптимальні алгоритми апроксимації висот поверхні літосфери Землі. **Практична значущість.** Подані алгоритми апроксимації висот фізичної поверхні Землі будуть використовуватись у подальших дослідженнях, які спрямовані на вивчення планетарних характеристик нашої планети та динаміки їхніх змін у часі. Такі підходи до апроксимації поверхні будуть корисні не тільки для наук про Землю і планет земної групи, а й до інших напрямків, де ставиться задача моделювання об'єктів з такою геометричною формою.

Ключові слова: апроксимація, фізична поверхня Землі, двовісний і тривісний еліпсоїд.

Вступ

З початку розвитку наук про Землю і до тепер науковці прагнуть якомога детальніше відобразити її фізичну і гравітаційну фігуру – геоїд. Для вирішення теоретичних і прикладних задач, а також для вивчення фігури і гравітаційного поля Землі та їх змін у часі вводять фігури відносності – еліпсоїд обертання, тривісний еліпсоїд, геоїд. Для цього використовують проектування фізичної або рівневої поверхні планети на різноманітні геометричні фігури, починаючи від сфери і закінчуючи тривісним еліпсоїдом, які найкраще підходять для апроксимації висот цих поверхонь.

Усім відомо, що за останні три десятки років геодезичні технології неосяжно стрибнули вперед і цим самим надали імпульс розвитку не тільки всім наукам про Землю, а й дистанційним вимірюванням у різноманітних сферах. Володіючи глобальними результатами вимірювань, виникає необхідність, на підставі математичного моделювання моніторингової інформації про просторово-часовий стан фізичної поверхні і гравітаційного поля Землі планетарного, регіонального, локального характеру, а також окремих об'єктів на земній поверхні і поза нею, вирішення відповідних завдань наук про Землю. Зазначимо, що не лише для Землі, а й для інших планет Сонячної системи та їхніх супутників найкраще підходять

тривісні еліпсоїди. Для об'єктів далекого космосу використовують чотиривісні та навіть шестивісні еліпсоїди. Такі підходи потрібні для якомога детальнішого опису небесних тіл.

Сучасні підходи визначення поверхні відліку, як на глобальному рівні, так і на локальному, передбачають визначення еліпсоїда обертання, що найкраще описує поверхню геоїда, або ж квазігеоїда. Такий підхід забезпечує поверхню відліку для багатьох референційних систем. Для цього використовують дані високоточних вимірювань GNSS, VLBI, LRS, DORIS [Wu, 2011]. Цей класичний підхід до побудови поверхні відліку є дуже зручним і порівняно простим. Тривісний еліпсоїд не використовують у класичній геодезії, оскільки непередбачено практичної користі у розрахунках. Та в сучасній теоретичній геодезії є думки щодо перегляду класичних підходів [Bektaş, 2015]. Зокрема, важливими є дослідження щодо еволюції фігури Землі, які надали би можливість інтерпретувати динаміку зміни фігури і гравітаційного поля Землі. Такий підхід найкраще дає змогу судити не тільки про гравітаційну фігуру Землі у вигляді геоїда, а й про зовнішню поверхню літосфери.

У сучасних наукових публікаціях розглянуто різноманітні підходи до задачі визначення фігури фізичної поверхні нашої планети [Bektaş, 2015, Maljugina, 2014, Nyrtsov, 2007, Turner, 1999, Yu, 2009, Li, 2004].

Мета

Метою цієї роботи є удосконалення методики та створення оптимального алгоритму для апроксимації поверхні літосфери Землі двовісним і тривісним еліпсоїдами для дослідження динаміки зміни її фігури.

Методика

Відповідно до постановки задачі необхідно визначити розміри і орієнтування такого еліпсоїда, які найближче підходили би до фізичної поверхні планети. Вирішення цієї задачі розглянемо на прикладі апроксимації висот поверхні літосфери двовісним і тривісним еліпсоїдом.

Апроксимація висот поверхні літосфери двовісним еліпсоїдом. Розглянемо рис. 1, де зображені: P'_L – фізична поверхня Землі; G – геоїд; E_L – еліпсоїд, параметри якого необхідно визначити; o – центр мас Землі; o' – центр шуканого еліпсоїда; oZ – напрям осі обертання Землі; $o'Z'$ – лінія, паралельна осі oZ ; $o'Z''$ – напрямок малої осі еліпсоїда E_L ; κ , ζ – два з трьох кутів Ейлера; N – напрямок лінії вузлів; $\theta_0, \lambda_0, \rho_0$ – кути та відстань, що визначають зміщення центру шуканого еліпсоїда від центру мас; x_0, y_0, z_0 – лінійні величини, що визначають зміщення шуканого еліпсоїда; T – точка на фізичній поверхні Землі; $oT' = \rho'$; $o'o = \rho_0$; $oT = \rho$; $TT'' = h$; $o'T'' = r$; H – висота точки T над рівнем моря.

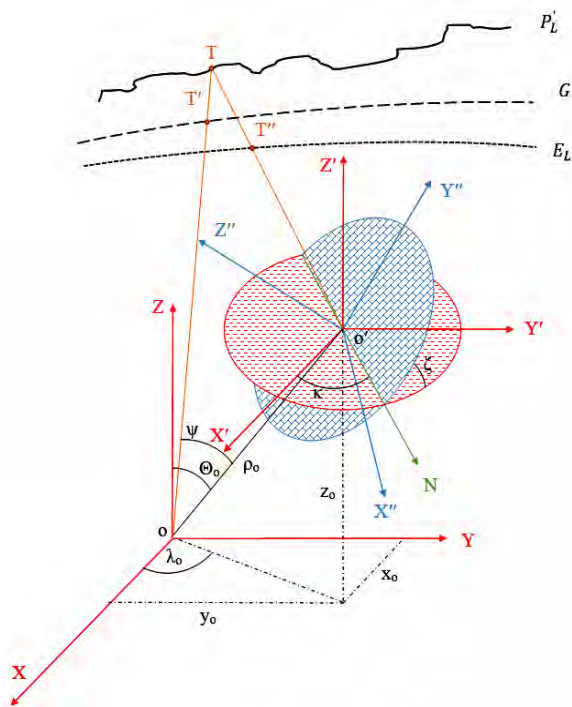


Рис. 1. Ілюстрація до апроксимації поверхні літосфери двовісним еліпсоїдом
Fig. 1. Illustration to the approximation of lithosphere surface by biaxial ellipsoid

З рис. 1 визначимо висоту $TT'' = h$ фізичної поверхні над еліпсоїдом, параметри якого необхідно вирахувати [Церклевич, 1977]:

$$h = \rho' - r, \quad (1)$$

$$\rho' = \rho - \rho_0 \cdot \cos \psi, \quad (2)$$

$$\rho = a_0 \cdot (1 - \alpha_0 \cdot \cos^2 \theta) + H, \quad (3)$$

$$\cos \psi = \cos \theta \cdot \cos \theta_0 + \sin \theta \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos(\lambda - \lambda_0), \quad (4)$$

де a_0 – велика піввісь загальноземного еліпсоїда; α_0 – його стиснення; θ, λ – полярні координати в системі $oXYZ$.

Для еліпсоїда маємо:

$$r = a \cdot (1 - \alpha \cos^2 \theta), \quad (5)$$

де a – велика піввісь визначуваного еліпсоїда; α – його стиснення; θ, λ – полярні координати в системі $o'X''Y''Z''$.

Якщо прийняти за одиницю довжини a_0 і $a = a_0 + \Delta a$, то підставивши формули (2), (3), (4) і (5) в (1), і нехтуючи при цьому величинами $\alpha \frac{\rho_0}{\rho}$ та $\alpha \zeta^2$, після простих перетворень, отримаємо:

$$h = A \cos \theta + B \sin \theta \cos \lambda + C \sin \theta \sin \lambda + D \cos^2 \theta + K \sin 2\theta \cos \lambda + M \sin 2\theta \sin \lambda - \Delta a + H, \quad (6)$$

в якому коефіцієнти виражаються через формули:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\rho_0 \cos \theta_0 \\ B &= -\rho_0 \sin \theta_0 \cos \lambda_0 \\ C &= -\rho_0 \sin \theta_0 \sin \lambda_0 \\ D &= -\alpha_0 + \alpha(1 + \Delta a) \\ K &= \alpha(1 + \Delta a)\zeta \sin \kappa \\ M &= -\alpha(1 + \Delta a)\zeta \cos \kappa \\ \Delta a &= a - a_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Величини, які визначають розміри й орієнтацію шуканого еліпсоїда легко знайти, якщо відомі коефіцієнти $A, B, C, D, K, M, \Delta a$. Знайдемо їх, використавши параметричний підхід у методі найменших квадратів [Зазуляк, 2007]:

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}), \quad (8)$$

де \mathbf{X} – матриця-стовпець шуканих величин $A, B, C, D, K, M, \Delta a$, розмірності $k \times 1$; \mathbf{A} – матриця коефіцієнтів за невідомих розмірністю $k \times n$; \mathbf{P} – вагова матриця розмірністю $n \times n$; \mathbf{L} – матриця-стовпець вільних членів, розмірністю $n \times 1$, n – кількість точок на фізичній поверхні, k – кількість невідомих.

З системи (7) знайдемо кути та відстань, що характеризують зміщення центру шуканого еліпсоїда $\theta_0, \lambda_0, \rho_0$, його стиснення a , два з трьох

кутів Ейлера κ, ζ та велику піввісь a визначуваного еліпсоїда:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arctg\left(\frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{A}\right) \\ \lambda &= \arctg\left(\frac{C}{B}\right) \\ \rho_0 &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \\ \alpha &= \frac{D + \alpha_o}{1 + \Delta a} \\ \kappa &= -\arctg\left(\frac{K}{M}\right) \\ \zeta &= \frac{K}{\alpha + (1 + \Delta a \cdot \sin \kappa)} \\ a &= (1 + \Delta a) \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Щоб знайти лінійні величини, що встановлюють зміщення шуканого еліпсоїда та малу піввісь b використаємо наступні рівняння:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -B \\ y_0 &= -C \\ z_0 &= -A \\ b &= a \cdot (1 - \alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Для оцінки точності знайдемо вектор відхилень (11) відомих точок поверхні літосфери від знайденого еліпсоїда та середню квадратичну похибку (СКП) одиниці ваги (12):

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L}, \quad (11)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{n - 7}}. \quad (12)$$

Щоб отримати точність визначення величин $\rho_0, \theta_0, \lambda_0, \alpha, \kappa, \zeta, a$, скористаймося правилами перетворення коваріації [Wong, 2008]:

$$\mathbf{Q}_X = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}, \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}_X \mathbf{T}^T, \quad (14)$$

де \mathbf{T} – матриця, що виражає функціональний зв'язок між коефіцієнтами (7) та змінними (8):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial \rho_0} & \frac{\partial A}{\partial \theta_0} & \frac{\partial A}{\partial \lambda_0} & \dots & \frac{\partial A}{\partial a} \\ \frac{\partial B}{\partial \rho_0} & \frac{\partial B}{\partial \theta_0} & \frac{\partial B}{\partial \lambda_0} & \dots & \frac{\partial B}{\partial a} \\ \frac{\partial C}{\partial \rho_0} & \frac{\partial C}{\partial \theta_0} & \frac{\partial C}{\partial \lambda_0} & \dots & \frac{\partial C}{\partial a} \\ \frac{\partial D}{\partial \rho_0} & \frac{\partial D}{\partial \theta_0} & \frac{\partial D}{\partial \lambda_0} & \dots & \frac{\partial D}{\partial a} \\ \frac{\partial K}{\partial \rho_0} & \frac{\partial K}{\partial \theta_0} & \frac{\partial K}{\partial \lambda_0} & \dots & \frac{\partial K}{\partial a} \\ \frac{\partial M}{\partial \rho_0} & \frac{\partial M}{\partial \theta_0} & \frac{\partial M}{\partial \lambda_0} & \dots & \frac{\partial M}{\partial a} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

СКП шуканих параметрів $\rho_0, \theta_0, \lambda_0, \alpha, \kappa, \zeta, a$ обчислимо як добуток СКП одиниці ваги на діагональні члени матриці \mathbf{C}_T .

$$\left. \begin{aligned} m_{\rho_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{T_{11}}} \\ m_{\theta} &= \mu \cdot \sqrt{C_{T_{22}}}, \\ &\dots \\ m_a &= \mu \cdot \sqrt{C_{T_{77}}} \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

Аналогічна процедура для визначення СКП параметрів x_0, y_0, z_0, b . У виразі (14) замінімо матрицю \mathbf{T} на \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_0} & \frac{\partial A}{\partial y_0} & \frac{\partial A}{\partial z_0} & \dots & \frac{\partial A}{\partial b} \\ \frac{\partial B}{\partial x_0} & \frac{\partial B}{\partial y_0} & \frac{\partial B}{\partial z_0} & \dots & \frac{\partial B}{\partial b} \\ \frac{\partial C}{\partial x_0} & \frac{\partial C}{\partial y_0} & \frac{\partial C}{\partial z_0} & \dots & \frac{\partial C}{\partial b} \\ \frac{\partial D}{\partial x_0} & \frac{\partial D}{\partial y_0} & \frac{\partial D}{\partial z_0} & \dots & \frac{\partial D}{\partial b} \\ \frac{\partial \Delta a}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta a}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta a}{\partial z_0} & \dots & \frac{\partial \Delta a}{\partial b} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де \mathbf{S} – матриця, що виражає функціональний зв'язок між коефіцієнтами (7) та змінними (9).

$$\mathbf{C}_S = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}_X \mathbf{S}^T, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{x_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{S_{11}}} \\ m_{y_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{S_{22}}} \\ m_{z_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{S_{33}}} \\ m_b &= \mu \cdot \sqrt{C_{S_{44}}} \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Апроксимація висот поверхні літосфери тривісним еліпсоїдом. Для розуміння апроксимації поверхні літосфери тривісним еліпсоїдом звернемося до рис. 2.

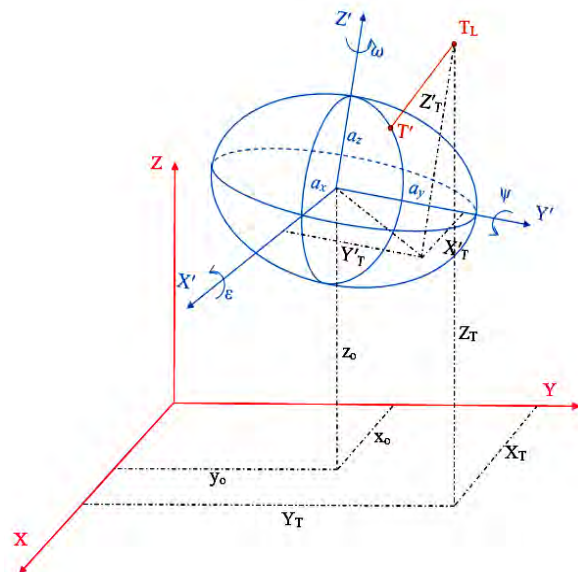


Рис. 2. Ілюстрація до апроксимації поверхні літосфери тривісним еліпсоїдом
Fig. 2. Illustration for the approximation surface lithosphere triaxial ellipsoid

На рис. 2: T_L – точка на фізичній поверхні Землі; T' – точка на поверхні еліпсоїда, параметри якого необхідно визначити; X_T, Y_T, Z_T – координати точки T у вихідній системі координат; X'_T, Y'_T, Z'_T – координати в системі відліку шуканого еліпсоїда; x_0, y_0, z_0 – координати центру шуканого еліпсоїда відносно вихідної системи координат; a_x, a_y, a_z – півосі; $\varepsilon, \psi, \omega$ – три кути повороту.

Для апроксимації тривісним еліпсоїдом висот поверхні літосфери через задані прямокутні координати точок, використовують класичний спосіб найменших квадратів. Будь-яку поверхню другого порядку можна описати відомим рівнянням:

$$AX_T^2 + BY_T^2 + CZ_T^2 + 2DX_TY_T + 2EX_TZ_T + 2FY_TZ_T + 2GX_T + 2HY_T + 2IZ_T - 1 = 0. \quad (20)$$

Для того, щоб розподілені на поверхні літосфери точки описати певною фігурою другого порядку вводять такі умови для тривісного еліпсоїда [Bektaş, 2015]:

$$i = A + B + C, \quad (21)$$

$$j = AB + BC + AC - F^2 - E^2 - D^2, \quad (22)$$

$$4j - i^2 > 0. \quad (23)$$

Ці умови гарантують, що фігура поверхні другого порядку є еліпсоїдом. Але для нашого випадку можна знехтувати додатковими умовами, оскільки задані висоти точок рівномірно розміщені на поверхні літосфери. Доцільно використовувати додаткові умови для апроксимації хмари точок, що лежать на локальних ділянках планети. Щоб знайти невідомі коефіцієнти $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, використаємо (8). Тоді рівняння (20) запишемо в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

З рівняння (24) можна знайти зміщення координат центру фігури x_0, y_0, z_0 шуканого еліпсоїда, а для знаходження решти шести невідомих скористаємося матрицею:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Кути повороту $\varepsilon, \psi, \omega$ визначимо з формул:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \arcsin(C) \\ \varepsilon &= \arctg\left(-\frac{F}{C}\right) \\ \omega &= \arctg\left(-\frac{D}{A}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Щоб обчислити півосі шуканого еліпсоїда потрібно знайти власні вектори матриці (25)

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ a_y &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \\ a_z &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Для оцінки точності значень невідомих, скористаємося виразами (11)–(16). Для двовісного еліпсоїда кількість матриць, що виражає зв'язок між шуканими параметрами і коефіцієнтами – дві, а для цього випадку потрібно скласти три ($\mathbf{K}_{x_0, y_0, z_0}, \mathbf{K}_{\varepsilon, \psi, \omega}, \mathbf{K}_{a_x, a_y, a_z}$), розмірністю 3×9 , для зміщення центру фігури (29), кутів повороту (31) та півосей еліпсоїда (33):

$$\mathbf{C}_{x_0, y_0, z_0} = \mathbf{K}_{x_0, y_0, z_0} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{K}^T_{x_0, y_0, z_0}, \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_{x_0, y_0, z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_0} & \frac{\partial B}{\partial x_0} & \frac{\partial C}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial I}{\partial x_0} \\ \frac{\partial A}{\partial y_0} & \frac{\partial B}{\partial y_0} & \frac{\partial C}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial I}{\partial y_0} \\ \frac{\partial A}{\partial z_0} & \frac{\partial B}{\partial z_0} & \frac{\partial C}{\partial z_0} & \dots & \frac{\partial I}{\partial z_0} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{C}_{\varepsilon, \psi, \omega} = \mathbf{K}_{\varepsilon, \psi, \omega} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{K}^T_{\varepsilon, \psi, \omega}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{\varepsilon, \psi, \omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial B}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} & \dots & \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial A}{\partial \psi} & \frac{\partial B}{\partial \psi} & \frac{\partial C}{\partial \psi} & \dots & \frac{\partial I}{\partial \psi} \\ \frac{\partial A}{\partial \omega} & \frac{\partial B}{\partial \omega} & \frac{\partial C}{\partial \omega} & \dots & \frac{\partial I}{\partial \omega} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{C}_{a_x, a_y, a_z} = \mathbf{K}_{a_x, a_y, a_z} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{K}^T_{a_x, a_y, a_z}, \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{a_x, a_y, a_z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial a_x} & \frac{\partial B}{\partial a_x} & \frac{\partial C}{\partial a_x} & \dots & \frac{\partial I}{\partial a_x} \\ \frac{\partial A}{\partial a_y} & \frac{\partial B}{\partial a_y} & \frac{\partial C}{\partial a_y} & \dots & \frac{\partial I}{\partial a_y} \\ \frac{\partial A}{\partial a_z} & \frac{\partial B}{\partial a_z} & \frac{\partial C}{\partial a_z} & \dots & \frac{\partial I}{\partial a_z} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

СКП шуканих параметрів можна обчислити за аналогічною схемою, як для двовісного еліпсоїда:

$$\left. \begin{aligned} m_{x_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{x_0, y_0, z_0 11}} \\ m_{y_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{x_0, y_0, z_0 22}} \\ m_{x_0} &= \mu \cdot \sqrt{C_{x_0, y_0, z_0 33}} \\ m_\varepsilon &= \mu \cdot \sqrt{C_{\varepsilon, \psi, \omega 11}} \\ m_\psi &= \mu \cdot \sqrt{C_{\varepsilon, \psi, \omega 22}} \\ m_\omega &= \mu \cdot \sqrt{C_{\varepsilon, \psi, \omega 33}} \\ m_{a_x} &= \mu \cdot \sqrt{C_{a_x, a_y, a_z 11}} \\ m_{a_y} &= \mu \cdot \sqrt{C_{a_x, a_y, a_z 22}} \\ m_{a_z} &= \mu \cdot \sqrt{C_{a_x, a_y, a_z 33}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Ітеративний метод апроксимації висот поверхні літосфери двовісним еліпсоїдом. Цю задачу можна також розв'язати ітеративним методом. Для цього канонічне рівняння двовісного еліпсоїда запишемо як:

$$\begin{aligned} F = F_0 &+ \left(\frac{2 \cdot X_t}{a^2} \right) \cdot \delta_{x_0} + \left(\frac{2 \cdot Y_t}{a^2} \right) \cdot \delta_{y_0} + \left(\frac{2 \cdot Z_t}{(a \cdot (1-f))^2} \right) \cdot \delta_{z_0} + \\ &+ \left(-\frac{2 \cdot X_t^2 + 2 \cdot Y_t^2}{a^2} + \frac{2 \cdot Z_t^2}{a^3 \cdot (1-f)^2} \right) \cdot \delta_a + \\ &+ \left(\frac{2 \cdot Z_t^2}{a^2 \cdot (1-f)^3} \right) \cdot \delta_f + \left(\frac{2 \cdot X_t^2 \cdot X'_\varepsilon}{a^2} + \frac{2 \cdot Y_t^2 \cdot Y'_\varepsilon}{a^2} + \frac{2 \cdot Z_t^2 \cdot Z'_\varepsilon}{a \cdot (1-f)^2} \right) \cdot \delta_\varepsilon + \\ &+ \left(\frac{2 \cdot X_t^2 \cdot X'_\psi}{a^2} + \frac{2 \cdot Y_t^2 \cdot Y'_\psi}{a^2} + \frac{2 \cdot Z_t^2 \cdot Z'_\psi}{a \cdot (1-f)^2} \right) \cdot \delta_\psi + \left(\frac{2 \cdot X_t^2 \cdot X'_\omega}{a^2} + \frac{2 \cdot Y_t^2 \cdot Y'_\omega}{a^2} + \frac{2 \cdot Z_t^2 \cdot Z'_\omega}{a \cdot (1-f)^2} \right) \cdot \delta_\omega, \end{aligned} \quad (36)$$

де $\delta_{x_0}, \delta_{y_0}, \delta_{z_0}, \delta_a, \delta_f, \delta_\varepsilon, \delta_\psi, \delta_\omega$ – поправки до наближених значень шуканих величин.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\omega, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X'_\varepsilon \\ Y'_\varepsilon \\ Z'_\varepsilon \end{pmatrix} &= \mathbf{R}'_\varepsilon \begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X'_\psi \\ Y'_\psi \\ Z'_\psi \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{R}'_\psi \begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X'_\omega \\ Y'_\omega \\ Z'_\omega \end{pmatrix} = \mathbf{R}'_\omega \begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

де \mathbf{R} – матриця повороту (напрямних косинусів); $\mathbf{R}'_\varepsilon, \mathbf{R}'_\psi, \mathbf{R}'_\omega$ – матриці похідних напрямних косинусів за відповідними кутами повороту.

Знайдемо поправки в наближені значення параметрів еліпсоїда, використавши вираз (8). Оскільки в цьому випадку не використовуються ваги, то відповідне рівняння запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} F = \frac{(x_0 + a_1 \cdot X_T + a_2 \cdot Y_T + a_3 \cdot Z_T)^2}{a^2} + \\ + \frac{(y_0 + b_1 \cdot X_T + b_2 \cdot Y_T + b_3 \cdot Z_T)^2}{a^2} + \\ + \frac{(z_0 + c_1 \cdot X_T + c_2 \cdot Y_T + c_3 \cdot Z_T)^2}{a^2 \cdot (1-f)^2} = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати центру шуканого еліпсоїда у вихідній системі координат; X_T, Y_T, Z_T – відомі координати точок поверхні літосфери; a, f – велика піввісь та стиснення шуканого еліпсоїда; $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ – елементи матриці напрямних косинусів.

Для визначення параметрів шуканого еліпсоїда потрібно привести рівняння (35) до лінійного вигляду. Використавши розклад у ряд Тейлора, і спростивши подальші перетворення, замінивши чисельники правої частини у виразі (35) на X, Y, Z , отримаємо:

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L}). \quad (39)$$

Членами рівняння є:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta_{x_0} \\ \delta_{y_0} \\ \delta_{z_0} \\ \delta_a \\ \delta_f \\ \delta_\varepsilon \\ \delta_\psi \\ \delta_\omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = F_0 - 1, \quad (40)$$

де матриця \mathbf{A} містить коефіцієнти за невідомих, значення яких можна обчислити, використовуючи формулу (36).

СКП одиниці ваги вирахуємо так:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{V}}{n-7}}. \quad (41)$$

СКП шуканих величин:

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}, \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{x_0} &= \sqrt{Q_{x11}} \\ m_{y_0} &= \sqrt{Q_{x22}} \\ m_{x_0} &= \sqrt{Q_{x33}} \\ m_a &= \sqrt{Q_{x44}} \\ m_f &= \sqrt{Q_{x55}} \\ m_\varepsilon &= \sqrt{Q_{x66}} \\ m_\psi &= \sqrt{Q_{x77}} \\ m_\omega &= \sqrt{Q_{x88}} \end{aligned} \right\}. \quad (43)$$

Аналогічний виклад математичних формул можна виконати для апроксимації поверхні літосфери тривісним еліпсоїдом.

Вихідні дані. Для обчислень параметрів еліпсоїдів використовувались два типи даних: модель геоїда EGM2008 [National Geospatial Intelligence Agency, 2016], цифрова модель поверхні Землі ETOPO1 [National Centers for Environmental Information, 2016] (це дворівнева модель з шаром криги і без нього, крок моделі одна хвилина).

Для моделювання висоти (квазігеоїда та топографічної поверхні Землі) були усереднені в межах трапецій $5^\circ \times 5^\circ$ так, як показано на рис. 3 та 4. У результаті усереднення було отримано 2592 значень висот h , на основі яких виконані розрахунки для двовісного еліпсоїда. Оскільки площа сферичних трапецій зменшується від екватора до полюсів, то вага кожного значення h приймалась такою, що дорівнює:

$$P = \cos B, \quad (44)$$

де B – середня широта відповідної трапеції.

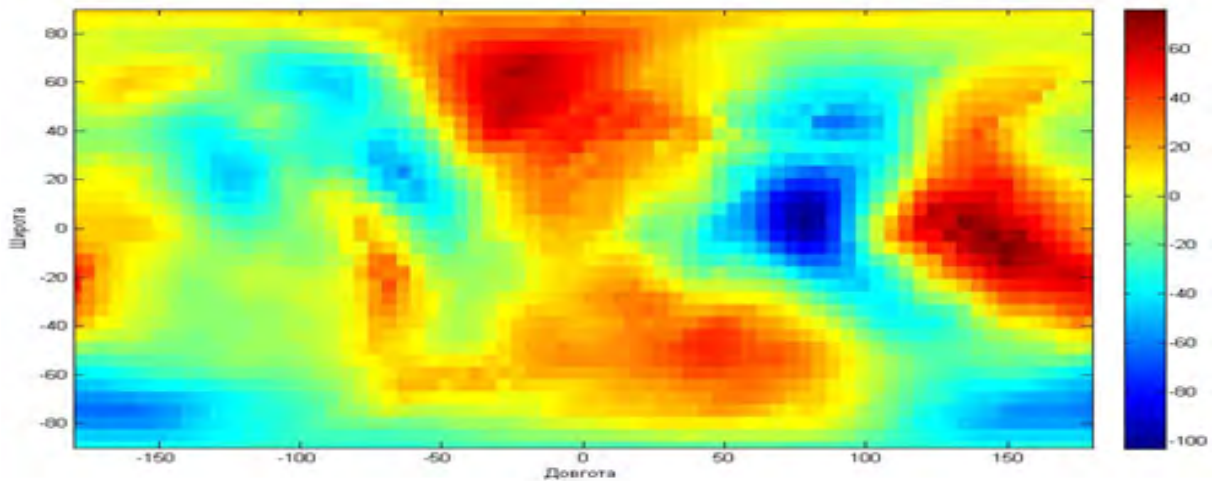


Рис. 3. Усереднена модель висот геоїда EGM2008 (в метрах)
Fig. 3. The averaged model of the EGM2008 geoidal undulations (in meters)

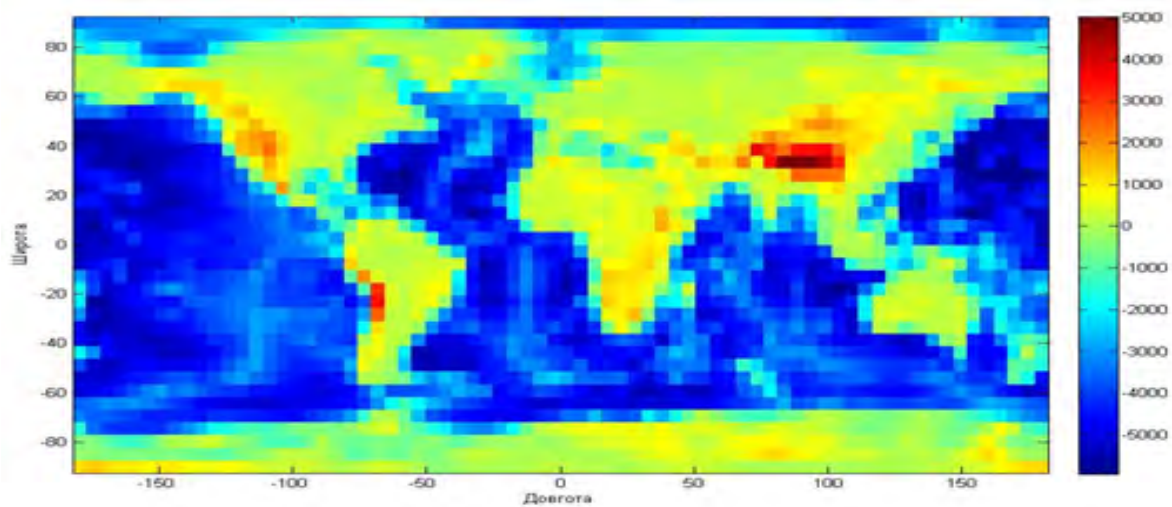


Рис. 4. Усереднена модель висот фізичної поверхні Землі ETOPO1 (в метрах)
Fig. 4. The averaged elevation model of the Earth's physical surface ETOPO1 (in meters)

Ці моделі містять геодезичні координати B, L та висоту H . Для апроксимації двовісним еліпсоїдом необхідно перейти від B до полярної відстані θ :

$$\theta = 90^\circ - B. \quad (45)$$

Зазначимо також, що для вище описаного підходу, необхідно використовувати нормовані значення висот H .

Для визначення параметрів тривісного еліпсоїда, трансформуємо геодезичні координати B, L, H в Декартові геоцентричні X, Y, Z за відомими формулами:

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L \\ Y &= (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L \\ Z &= \left(N \cdot \left[\frac{b^2}{a^2} \right] + H \right) \cdot \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (46)$$

де N – радіус кривини головного перерізу в напрямку схід-захід;

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 B + b^2 \cdot \sin^2 B}}, \quad (47)$$

де a і b – велика і мала півосі референсного еліпсоїда.

Результати

Апробація розглянутих методів апроксимації висот геоїда та фізичної поверхні Землі. У табл. 1 та 2 наведені обчислені параметри і їхні похибки, отримані шляхом апроксимації висот геоїда та фізичної поверхні Землі двовісним і тривісним еліпсоїдами. Обчислення виконувались, використовуючи дані на всю поверхню планети, північну та південну півкулі.

Як бачимо з таблиць, СКП апроксимації моделі ЕТОРО1 є меншими для тривісного еліпсоїда, що свідчить про близькість геометричної фігури поверхні нашої планети до тривісного еліпсоїда. Для моделі геоїда навпаки СКП апроксимації менші для двовісного еліпсоїда.

Результати визначені класичними методами апроксимації висот геоїда та фізичної поверхні Землі двовісним і тривісним еліпсоїдом та результати отримані ітеративним підходом сходяться з високою точністю. Це свідчить про те, що алгоритми апроксимації є безпомилковими та достовірними. На користь такого висновку вказують також результати апроксимації моделі висот геоїда: центр фігури відхиляється від центру мас на 9,6 см, велика піввісь від зазначеної величини у геодезичних датах на 42,3 см, а стиснення на 0,00184, що можна пояснити різним вибором елементів параметризації еліпсоїдів (відповідно 7 і 2 параметри).

Зазначимо, що результати отриманих параметрів еліпсоїдів, підтверджують виражену асиметрію півкуль планети, як для топографічної, так і для рівневої поверхні. Структурна асиметрія північної і південної півкуль явно відстежується (колонки 3 і 4 табл. 1, 2), а це значить, що існує видовження широтних кіл південної півкулі й укорочення довжин широтних кіл північної півкулі, тобто наявність розширення південної півкулі і, відповідно, стиснення північної півкулі відносно центру фігури поверхні літосфери Землі. Зміщення центру мас відносно центру фігури також характерне для Землі. Звернемо також увагу на те, що полюси еліпсоїдів, які апроксимують фізичну поверхню, не збігаються з полюсами Землі, тобто екваторіальна площина літосфери не збігається з екваторіальною площиною геоїда і кут нахилу становить $2^\circ,6$ або 289 км по дузі меридіана.

Таблиця 1

Параметри двовісного еліпсоїда

Table 1

Parameters of biaxial ellipsoid

Модель геоїда EGM2008	Вся сфера	Північна півкуля	Південна півкуля
$x_0, м$	0,08 ±0,83	0,88 ±0,28	11,27 ±2,23
$y_0, м$	0,03 ±0,37	-0,02 ±0,01	2,75 ±0,54
$z_0, м$	0,04 ±0,46	47,12 ±15,11	76,95 ±15,24
$a_{xy}, м$	6378136,57 ±0,88	6378136,88 ±3,28	6378131,13 ±3,34
$a_z, м$	6356751,76 ±1,44	6356802,93 ±17,18	6356669,93 ±17,52
$1/\alpha$	298,25538 ±0,027648	298,96658 ±0,20447	297,19360 ±0,20602
κ	114°,017 ±0°,001	91°,509 ±0°,001	102°,205 ±0°,001
ζ	0°,001 ±0°,001	0°,103 ±0°,001	0°,14009 ±0°,001
ЦМР ЕТОРО1	Вся сфера	Північна півкуля	Південна півкуля
$x_0, м$	-741,89 ±86,04	-1170,64 ±1056,31	-38,99 ±13,11
$y_0, м$	-491,57 ±57,01	-388,46 ±350,52	1,70 ±0,56
$z_0, м$	1421,79 ±164,89	1868,02 ±1685,58	7287,17 ±2462,31
$a_{xy}, м$	6375117,01 ±169,04	6375114,92 ±437,96	6376300,87 ±533,98
$a_z, м$	6355640,09 ±247,83	6355772,53 ±2294,90	6362552,67 ±2798,18
$1/\alpha$	327,31650 ±6,32898	329,59304 ±33,20823	463,79175 ±80,16340
κ	133°,774 ±0°,002	159°,308 ±0°,004	110°,029 ±0°,005
ζ	2°,612 ±0°,002	2°,610 ±0°,014	2°,774 ±0°,014

Параметри тривісного еліпсоїда

Table 2

Parameters of triaxial ellipsoid

Модель геоїда EGM2008	Вся сфера	Північна півкуля	Південна півкуля
$x_0, м$	-0,05 ±0,82	-27,26 ±1,74	-40,51 ±1,61
$y_0, м$	-0,03 ±0,82	0,73 ±1,74	-9,91 ±1,61
$z_0, м$	0,04 ±0,82	-38,25 ±7,61	-65,57 ±7,05
$a_{xy}, м$	6378101,79 ±0,08	6378093,13 ±0,69	6378105,32 ±0,69
$a_y, м$	6378171,37 ±0,08	6378180,66 ±0,69	6378157,09 ±0,69
$a_z, м$	6356751,75 ±0,08	6356802,71 ±0,66	6356669,88 ±0,61
ε	0°,000 ±0°,067	0°,001 ±0°,142	0°,000 ±0°,131
ψ	0°,000 ±0°,060	-0°,001 ±0°,126	0°,001 ±0°,117
ω	0°,001 ±0°,067	-0°,001 ±0°,077	0°,000 ±0°,071
ЦМР ETOPO1	Вся сфера	Північна півкуля	Південна півкуля
$x_0, м$	1048,11 ±68,12	1919,36 ±156,05	885,22 ±176,69
$y_0, м$	695,11 ±68,15	640,98 ±156,17	-40,42 ±176,69
$z_0, м$	1109,69 ±67,86	935,40 ±683,71	7333,25 ±774,86
$a_{xy}, м$	6374317,51 ±6,80	6373521,23 ±60,81	6375286,65 ±69,17
$a_y, м$	6375959,84 ±6,82	6376764,42 ±61,11	6377391,18 ±69,45
$a_z, м$	6355605,19 ±6,52	6355769,28 ±58,38	6362642,67 ±67,27
ε	0°,011 ±5°,545	0°,015 ±12°,701	-0°,004 ±14°,387
ψ	0°,011 ±4°,945	0°,005 ±11°,335	-0°,009 ±12°,796
ω	-0°,003 ±5°,530	0°,013 ±6°,884	-0°,018 ±7°,790

Наукова новизна і практична значущість

На основі проаналізованих літературних джерел, удосконалена методика та створені оптимальні алгоритми апроксимації поверхні літосфери Землі і планет Сонячної системи та їх супутників двовісним і тривісним еліпсоїдами.

Ці алгоритми апроксимації можуть використовуватись у подальших дослідженнях, які спрямовані на вивчення фігури нашої планети та динамічних змін її параметрів. Зокрема, автори передбачають використовувати дані підходи для дослідження зміни форми фігури літосфери Землі та її динаміки в сучасну епоху та на основі палеорекострукцій материків і водневої поверхні.

Висновки

У результаті досліджень запропоновано алгоритми апроксимації висот фізичної поверхні Землі двовісним і тривісним еліпсоїдами з оцінкою точності отримуваних параметрів. Ці алгоритми показали надійні результати і можуть бути корисні не тільки для вивчення фігури Землі та планет, а й в інших напрямках, де виникає задача моделювання об'єктів з такою геометричною формою.

Література

- Зазуляк П. М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань / П. М. Зазуляк, В. І. Гавриш, Е. М. Євсєєва, М. Д. Йосипчук: навч. посіб. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
- Церклевич А. Л. Определения размеров и ориентировки обобщенной фигуры Марса / А. Л. Церк-

левич // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – Т. 3, № 12. – С. 562–565.

- Accuracy of the international terrestrial reference frame origin and Earth expansion / [X. Wu, Z. Collilieux, B. L. Vermeersen та ін.] // Geo[physical research letters. – 2011. – № 38. – С. 124–129.
- An Algorithm for Fitting an Ellipsoid to Data [Електронний ресурс]. – 1999. – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/2239930_An_Algorithm_for_Fitting_a_n_Ellipsoid_to_Data.
- Bektaş S. Geodetic computations on triaxial ellipsoid / Bektaş Sebahattin. // International Journal of Mining Science (IJMS). – 2015. – Vol. 1. – pp. 25–34.
- Born G. H. Transformation of the Covariance Matrix [Електронний ресурс] / Born G. H. – 2008. – Режим доступу до ресурсу: http://ccar.colorado.edu/ASEN5070/lectures/Old_Lectures/ASEN_507_0_2008_Lecture_27_Supplement.pdf.
- Li Q. Least Squares Ellipsoid Specific Fitting [Електронний ресурс] / Q. Li, J. Griffiths. – 2004. – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/4070857_Least_squares_ellipsoid_specific_fitting.
- Malyugina A. Least-Squares Fitting of a Three-Dimensional Ellipsoid to Noisy Data / A. Malyugina, K. Igudesman, D. Chickrin. // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8.
- National Centers for Environmental Information, ETOPO1 Global Relief Model [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>.
- National Geospatial Intelligence Agency EGM2008 GIS Data [Електронний ресурс]. – 2013. – Режим

- доступу до ресурсу: http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_gis.html.
- Nyrtsov M. V. The multiple axis ellipsoids as reference surfaces for mapping of small celestial bodies / M. V. Nyrtsov, L. M. Bugaevsky, P. J. Stooke. // Proceedings of the 23d International Cartographic Conference (ICC) Moscow Russia, 4-10 August 2007, "Cartography for everyone and for you". – 2007.
- Turner D. A. An algorithm for fitting an ellipsoid to data / D. A. Turner, I. J. Anderson, J. C. Mason. // National Physical Laboratory, Teddington, – 1999.
- Yu J. Robust Fitting of Ellipses and Spheroids / J. Yu, R. Kulkarni, H. Vincent Poor. // 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. – 2009.

А. ЦЕРКЛЕВИЧ, А. ЗАЯЦЬ, Е. ШИЛО

Национальный университет "Львовская политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, Украина, 79013, тел. (099) 95 41 434, ел. почта shyloyevhenii@gmail.com

АППРОКСИМАЦИЯ ВЫСОТ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ДВУХОСНЫМ И ТРЕХОСНЫМ ЭЛЛИПСОИДАМИ

Цель. В науках о Земле все большее значение приобретают планетарные задачи. Целью данной работы является совершенствование методики и алгоритмов аппроксимации высот физической поверхности планеты двухосным и трехосным эллипсоидом для исследования динамики изменения ее фигуры. **Методика.** Классические подходы определения фигуры Земли предусматривают определение эллипсоида вращения, который лучше всего описывает поверхность геоида, или квазигеоида. Такой подход обеспечивает исходную поверхность отсчета для многих референсных систем. Для изучения геодинамических процессов в планетарном масштабе актуальными являются вопросы определения размеров и ориентации такого эллипсоида, который наиболее близко подходил к поверхности литосферы Земли. Решение этой задачи рассматривается на примере аппроксимации высот поверхности литосферы двухосным и трехосным эллипсоидами. Описанные методы применяются для аппроксимации высот модели геоида EGM2008 и ЦМР ETOPO1. Высоты моделей усредняются в пределах трапеций $5^\circ \times 5^\circ$, на основе этих данных находятся параметры двухосного и трехосного эллипсоида. Для проверки алгоритмов решения этих задач применяется сравнительный анализ результатов аппроксимации предложенных методов. **Результаты.** Полученные результаты и их сравнительный анализ с параметрами эллипсоида, установленных в геодезических датах, свидетельствуют о том, что предложенные алгоритмы аппроксимации являются достоверными и их можно использовать для исследования планетарной динамики фигуры Земли. **Научная новизна.** Усовершенствованная методика и созданы оптимальные алгоритмы аппроксимации поверхности литосферы Земли. **Практическая значимость.** Представленные алгоритмы аппроксимации физической поверхности Земли могут использоваться в дальнейших исследованиях, направленных на изучение планетарных характеристик нашей планеты и динамики их изменений во времени. Также такие подходы к аппроксимации поверхности будут полезны не только для наук о Земле и планетах, но и в других направлениях, где ставится задача моделирования объектов с такой геометрической формой.

Ключевые слова: цифровая модель рельефа, аппроксимация, физическая поверхность Земли, двухосный и трёхосный эллипсоид.

A. TSERKLEVYCH, O. ZAYATS, Y. SHYLO

Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandera str., Lviv, Ukraine, 79013, (099) -95-41-434, e-mail: shyloyevhenii@gmail.com

APPROXIMATION OF THE PHYSICAL SURFACE OF THE EARTH BY BIAxIAL AND TRIAXIAL ELLIPSOID

Purpose. Planetary problems play in geosciences very important role. The aim of this work is to improve methods and algorithms for approximating of the physical surface of the planet by biaxial and triaxial ellipsoid for study the dynamics of change of its shape. **Methods.** Classical approaches to the determination of Earths shape provide computation of evolution ellipsoid parameters of that in the best way fits to geoid, or quasigeoid. Such approach allows to provide initial reference surface for many coordinates systems. The problem of determination of the size and orientation of the ellipsoid that most closely matched to the surface of the Earth's lithosphere is very relevant for the study of geodynamic processes in a planetary scale. The solution to this problem is considered on the example of lithosphere heights approximation by biaxial and triaxial ellipsoid. Described in paper algorithms was used to for the approximation of the geoid model EGM2008 and DEM ETOPO1. For the approximation we used average values of geoidal ondulation and physical surface heights within $5^\circ \times 5^\circ$ spherical trapezoids. To verify algorithm we compare approximation result obtained by the proposed methods. **Results.** Comparative analysis of

obtained results indicates that proposed approximation methods are reliable and can be used for the investigation of Earth's planetary dynamic. **The scientific novelty.** Improved methods and algorithms was created for the best approximation of the surface of the Earth's lithosphere. **The practical significance.** Approximation algorithms of the physical surface of the Earth will be used in further research aimed at studying the characteristics of our planet planetary dynamics and their time changes. Such approaches to surface approximation are useful not only for Earth an planets Science but also in other areas where the problems arise in ellipsoidal objects modelling.

Key words: approximation, the physical surface of the Earth, biaxial and triaxial ellipsoid.

REFERENCES

- Zazulyak P. M., Gavrish V. I., Evseev E. M., Yosypchuk M. D. Mathematical processing of geodetic measurements. Textbook. Lviv: Publishing House 'Raster 7', 2007, 408 p.
- Tserklevych A. L. Determine the size and orientation of the generalized shape of Mars. Astronomy Letters journal. 1977, vol.3, no.12, pp. 562–565.
- X. Wu, Z. Collilieux, B. L. Vermeersen et al: Accuracy of the international terrestrial reference frame origin and Earth expansion. Geophysical research letters, 2011, no. 38, pp. 124–129.
- An Algorithm for Fitting an Ellipsoid to Data. 1999. Available at: https://www.researchgate.net/publication/2239930_An_Algorithm_for_Fitting_an_Ellipsoid_to_Data.
- Bektaş S. Geodetic computations on triaxial ellipsoid. Bektaş Sebahattin. International Journal of Mining Science (IJMS). 2015, No. 1, pp. 25–34.
- Born G. H. Transformation of the Covariance Matrix. 2008. Available at: http://ccar.colorado.edu/ASEN5070/lectures/Old_Lectures/ASEN_5070_2008_Lecture_27_Supplement.pdf.
- Li Q., Griffiths J. Least Squares Ellipsoid Specific Fitting. 2004. Available at: https://www.researchgate.net/publication/4070857_Least_squares_ellipsoid_specific_fitting.
- Malyugina A., Igudesman K., Chickrin D. Least-Squares Fitting of a Three-Dimensional Ellipsoid to Noisy Data. Applied Mathematical Sciences. 2014, Vol. 8.
- National Centers for Environmental Information, ETOPO1 Global Relief Model Available at: <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>.
- National Geospatial Intelligence Agency EGM2008 GIS Data. 2013. Available at: http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_gis.html.
- Nyrtsov M. V., Bugaevsky M., Stooke P. J. The multiple axis ellipsoids as reference surfaces for mapping of small celestial bodies. Proceedings of the 23d International Cartographic Conference (ICC) Moscow Russia, 4–10 August 2007, “Cartography for everyone and for you”. 2007.
- Turner D. A., Anderson I. J., Mason J. C. An algorithm for fitting an ellipsoid to data. National Physical Laboratory, Teddington, 1999.
- Yu J., Kulkarni R., Vincent Poor H. Robust Fitting of Ellipses and Spheroids. 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 2009.

Надійшла 11.04.2016 р.