

УДК 550.8

**Т.Л. МИХЕЕВА,  
Е.П. ЛАПИНА, Н.В. ПАНЧЕНКО**

Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина  
просп. Академіка Палладіна, 32, Київ, Україна,  
e-mail: mtat@ukr.net

## **ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОМЕТРИИ ДЛЯ СОВОКУПНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ТЕЛ**

*Рассмотрены решения прямой и обратной задач магнитометрии для случая геологической модели в виде совокупности намагниченных горизонтально расположенных стержневых тел. Проведена интерпретация магнитометрических данных на основе использования автоматизированной системы интерпретации потенциальных полей. Построена числовая модель аномального магнитометрического поля и проведена качественная интерпретация полученных результатов, выполнено моделирование локальных аномальных источников. В процессе решения задачи осуществлена трехуровневая параметризация входных данных. В качестве первого приближения выбрана модель в виде совокупности горизонтально расположенных стержней. На втором этапе наблюдаемое магнитное поле аппроксимировано совокупностью трехмерных трехстержневых элементарных тел. На третьем этапе использован класс трехмерных звездных тел, причем предложенный алгоритм позволил существенно уменьшить количество искомых параметров, описать конфигурацию сложнопостроенных объектов и максимально приблизить решение к реальной геологической среде.*

**Ключевые слова:** качественная интерпретация, магнитное поле, обратная задача, автоматизированная система, аппроксимация, геологический объект.

**Введение.** Рассмотрены решения прямой и обратной задач магнитометрии для случая, когда геологическая модель представлена совокупностью намагниченных горизонтально расположенных стержневых тел. Вектор интенсивности намагниченности каждого тела представлен своими составляющими по осям декартовой системы координат. Интерес к такой постановке вызван следующими обстоятельствами. В практической работе имеется уже опыт, когда сложная геологическая среда аппроксимируется набором материальных точек. С помощью такого вспомогательного массива конструируется сложная геологическая модель, массы которой могут обусловить наблюдаемое поле [9]. В практику интерпретационных работ вошел метод набухания. Он был предложен Д. Зидаровым и Ж. Желевым. Алгоритмическое решение дает возможность построить геологическую модель, если известны коор-

динаты центральных точек аномалиеобразующих тел [14 — 16].

Обратные задачи часто решаются в заранее выбранном модельном классе. Требуется построить гипотетическую модель, которая могла бы обусловить исходное поле. Некоторые классы тел требуют постулирования положения внутренней точки аномального источника. В определенном модельном классе эта точка позволяет фиксировать центр звездности геологического объекта, т. е. вопрос параметризации модели аномалиеобразующих тел становится центральным. В.Н. Страховым [13] была обобщена постановка такой непростой задачи и введены принципы аппроксимационного подхода. Модель должна описываться небольшим числом параметров. Если поле обусловлено влиянием нескольких тел, то нужно иметь возможность определять характеристики каждого тела.

Обратные задачи магнитометрии более громоздкие, чем гравиметрические. Интенсивность намагничивания — величина векторная, и это обстоятельство следует учитывать в процессе геологической интерпретации.

**Постановка задачи.** Прямая задача магнитометрии для совокупности двумерных стержневых тел. Геологическая модель состоит из фиксированного числа намагниченных тел. Каждое тело — это горизонтально расположенный цилиндрический стержень. Положим, что выбрана система координат. Ее начало закреплено в точке земной поверхности. Ось аппликата направлена вертикально вниз, тогда координатная плоскость  $xOy$  горизонтальна и совпадает с земной поверхностью, если последняя также горизонтальна. Простирание каждого цилиндра совпадает с осью ординат, и задача сводится к плоскому двумерному варианту. Каждый цилиндр заменим горизонтальным стержнем. Оси цилиндров параллельны между собой. Массы цилиндрических тел намагничены однородно. Вектор интенсивности намагничивания каждого тела разный и определяется своими составляющими.

Таким образом, может быть сформулирована двумерная прямая задача магнитометрии. Задача геологическая модель. Она описывается параметрами

$$P = \{m; [d_j; H_j]; [I_x_j; I_z_j], j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1)$$

В точках вне намагниченных масс нужно вычислить аномальное поле. Примем такое правило: если точка расположена внутри намагниченных масс, то будем записывать  $M(\xi, \zeta)$ . Если же точка — внешняя относительно таких масс, то запишем  $M(x, z)$ . Обратимся к одиночному телу и получим формулы для вычисления аномального поля. Далее обобщим это на тот случай, когда модель состоит из  $m$  тел.

Известно, что напряженность магнитного поля во внешних точках пространства характеризуется своим потенциалом:

$$U(x, z) = \iint_S (I, \text{grad}V) ds = \iint_S (I_x V_x + I_z V_z) ds,$$

$$V = 2 \ln \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} = -\ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2].$$

Напряженность аномального поля может быть выражена через составляющие

$$Z = T_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \iint_S (I_x V_{xz} + I_z V_{zz}) ds,$$

$$H = T_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \iint_S (I_x V_{xx} + I_z V_{xz}) ds.$$

Под знаком интеграла находятся вторые производные потенциала. Имеем

$$Z = T_z = 4I_x \iint \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds - 2I_z \iint \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds,$$

$$H = T_x = 2I_x \iint \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds + 4I_z \iint \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds.$$

Интегрирование ведется по площади поперечного сечения горизонтального стержня.

Применим теорему о среднем значении интеграла:

$$Z = T_z = 4 \frac{(d - x)(h - z)}{[(d - x)^2 + (h - z)^2]^2} \iint_S I_x ds - 2 \frac{(d - x)^2 - (h - z)^2}{[(d - x)^2 + (h - z)^2]^2} \iint_S I_z ds = 4I_x^0 \frac{(d - x)(h - z)}{[(d - x)^2 + (h - z)^2]^2} - 2I_z^0 \frac{(d - x)^2 - (h - z)^2}{[(d - x)^2 + (h - z)^2]^2}. \quad (2)$$

Аналогично запишем горизонтальную составляющую напряженности внешнего поля:

$$H = 2I_x^0 \frac{(d - x)^2 - (h - z)^2}{[(d - x)^2 + (h - z)^2]^2} + 4I_z^0 \frac{(d - x)(h - z)}{[(d - x)^2 + (h - z)^2]^2}. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3)  $I_x^0, I_z^0$  — линейные составляющие намагничивания стержня:  $I_x^0 = I_x \cdot \Delta^2$ ;  $I_z^0 = I_z \cdot \Delta^2$ ,  $\Delta^2$  — площадь поперечного сечения стержня. Таким образом, в размерность этих составляющих вектора интенсивности намагничивания входит квадрат линейной единицы.

Полученные результаты легко обобщаются на всю модель. Она состоит из  $m$  стержневых тел и описывается параметрами (1). Таким образом, прямая задача вычисляется как аддитивная сумма

$$Z = T_z(x, z) = \sum_{j=1}^m Z_j(x, z, P);$$

$$H = T_x(x, z) = \sum_{j=1}^m H_j(x, z, P).$$

2. *Обратная задача.* Будем исходить из того, что в точках вне масс заданы составляющие напряженности магнитного поля:

$$T_{nx} = (x_i, z_i) = H_n(i);$$

$$T_{nz} = (x_i, y_i) = Z_n(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем полагать, что это тело обусловлено  $m$  локальными телами. Каждое тело есть горизонтальный стержень. Создана геологическая модель, которая описывается параметрами (1). Каждый параметр получает численное значение для модели начального приближения. Запишем ее в виде

$$P^{(0)} = P^{(0)}(P_j^0) = \{m; [d, H]_j;$$

$$[I_x^0; \dots I_z^0]_j, \quad j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Если задана модель и каждый ее параметр получил численное значение, то может быть решена прямая задача и получено теоретическое поле:

$$Zt = Tt_z(x_i, z_i) = Tt(i);$$

$$Ht = Tt_x(x_i, z_i) = Tt_x(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сопоставив исходное и теоретическое поля, получим массив невязок такого сопоставления:

$$\varepsilon_{1i} = Tn_z(i) - Tt_z(i);$$

$$\varepsilon_{2i} = Tn_x(i) - Tt_x(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для сопоставления полей составим функционал

$$F = \alpha F_z + \beta F_x,$$

$$F_z = \sum_{i=1}^n [Tn_z(i) - Tt_z(i)]^2;$$

$$F_x = n \sum_{i=1}^n [Tn_x(i) - Tt_x(i)]^2.$$

Таким функционалом одновременно сопоставляются две составляющие аномального магнитного поля. Задачу можно решать отдельно, используя каждую составляющую поля.

Для минимизации функционалов применим метод градиентного спуска. Идея этого метода принадлежит Коши (Cauchy). Значительное развитие метод получил в работах Л.В. Канторовича [6, 7]. Для решения задач разведочной геофизики этот метод применяли В.Н. Страхов [12], Е.Г. Булах [1, 2], В.И. Старостенко [10], А.И. Кобрунов [8] и др. Создается геологическая модель. Каждый параметр этой модели получает численное значение. Итерационный процесс позволяет перейти от  $k$ -го приближения к  $(k + 1)$ -му:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \lambda_k \text{grad} F(P)_k, \quad \lambda_k = \frac{F(P)_k}{\sum \left( \frac{\partial F}{\partial P} \right)^2}.$$

Для вычисления коэффициента  $\lambda$  используется приближенный метод. Итерационный процесс позволяет получить последовательность точек  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(k)}, \dots, P^{(*)}$ . В точке  $P^{(*)}$  сопоставляемые поля близки между собой. Эта точка есть решение задачи. Для решения задачи нужно вычислить производные функции цели по искомым параметрам:

$$\frac{\partial F}{\partial P_j} = -2 \sum_{i=0}^n [U_n(i) - U_i(i, P)] \frac{\partial U_i}{\partial P_j}.$$

В данной задаче

$$P = [d_j, H_j, I_{xj}^0, I_{zj}^0, j = 1, 2, \dots, m].$$

Последовательно запишем необходимые формулы:

$$\frac{\partial Tt_z}{\partial d_j} = \frac{4I_x^0}{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^4} \times$$

$$\times [(H_j - z)[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^2 -$$

$$- 4(d_j - x)^2(H_j - z)[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]] -$$

$$- \frac{2I_z^0}{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^4} [2(d_j - x)[(d_j - x)^2 +$$

$$+ (H_j - z)^2]^2 - 4(d_j - x)[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2] \times$$

$$\times [(d_j - x)^2 - (H_j - z)^2]] =$$

$$4I_x^0 [(H_j - z)[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2 -$$

$$- 4(d_j - x)^2(H_j - z)^2]$$

$$= \frac{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^3 -$$

$$4I_z^0 (d_j - x)[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2 -$$

$$- 2(d_j - x)^2 + 2(H_j - z)^2]}{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^3} =$$

$$= \frac{4I_x^0 (H_j - z)[(H_j - z)^2 - 3(d_j - x)^2]}{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^3} -$$

$$- \frac{4I_z^0 (d_j - x)[3(H_j - z)^2 - (d_j - x)^2]}{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^3};$$

$$\frac{\partial Tt_z}{\partial H_j} = \frac{4I_{xj}^0}{[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^4} \times$$

$$\times [(d_j - x)[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2]^2 -$$

$$- 4[(d_j - x)^2 + (H_j - z)^2](H_j - z)^2(d_j - x)] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2I_{zj}^0}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^4}[-2(H_j-z)[(d_j-x)^2+ \\
 & +(H_j-z)^2]^2-4[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2](H_j-z)^2 \times \\
 & \quad \times [(d_j-x)^2-(H_j-z)^2]= \\
 & =\frac{4I_{xj}^0(d_j-x)[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2-4(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}- \\
 & \frac{4I_{zj}^0(H_j-z)[-(d_j-x)^2-(H_j-z)^2- \\
 & -2(d_j-x)^2+2(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}= \\
 & =\frac{4I_{xj}^0(d_j-x)[(d_j-x)^2-3(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}- \\
 & \frac{4I_{zj}^0(H_j-z)[(H_j-z)^2-3(d_j-x)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3};
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial I_{xj}^0}=\frac{4(d_j-x)(H_j-z)}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^2};$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial I_{zj}^0}=-\frac{2[(d_j-x)^2-(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^2};$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_x}{\partial d_j} & =\frac{2I_{xj}^0}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^4}\{2(d_j-x)[(d_j-x)^2+ \\
 & +(H_j-z)^2]^2-4[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2](d_j-x) \times \\
 & \times [(d_j-x)^2-(H_j-z)^2]\}+\frac{4I_{zj}^0}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^4} \times \\
 & \quad \times \{(H_j-z)[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^2- \\
 & -4[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2](d_j-x)^2(H_j-z)\}= \\
 & =\frac{4I_{xj}^0(d_j-x)[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2- \\
 & -2(d_j-x)^2+2(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}+ \\
 & +\frac{4I_{zj}^0(H_j-z)}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3} \times \\
 & \quad \times [(d_j-x)^2+(H_j-z)^2-4(d_j-x)^2]= \\
 & =\frac{4I_{xj}^0(d_j-x)[-(d_j-x)^2+3(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}+ \\
 & +\frac{4I_{zj}^0(H_j-z)[(H_j-z)^2-3(d_j-x)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_x}{\partial H_j} & =\frac{2I_{xj}^0}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^4} \times \\
 & \times \{-2(H_j-z)[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^2-4[(d_j-x)^2+ \\
 & +(H_j-z)^2](H_j-z)[(d_j-x)^2-(H_j-z)^2]+ \\
 & +\frac{4I_{zj}^0}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^4}\{(d_j-x)[(d_j-x)^2+ \\
 & +(H_j-z)^2]^2-4[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2](H_j-z)^2 \times \\
 & \times (d_j-x)\}=4I_{xj}^0(H_j-z)[-(d_j-x)^2-(H_j-z)^2- \\
 & -2(d_j-x)^2+2(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}+ \\
 & +\frac{4I_{zj}^0(d_j-x)\{(d_j-x)^2+(H_j-z)^2-4(H_j-z)^2\}}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}= \\
 & =\frac{4I_{xj}^0(H_j-z)\{(H_j-z)^2-3(d_j-x)^2\}}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3}+ \\
 & +\frac{4I_{zj}^0(d_j-x)[(d_j-x)^2-3(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^3};
 \end{aligned}$$

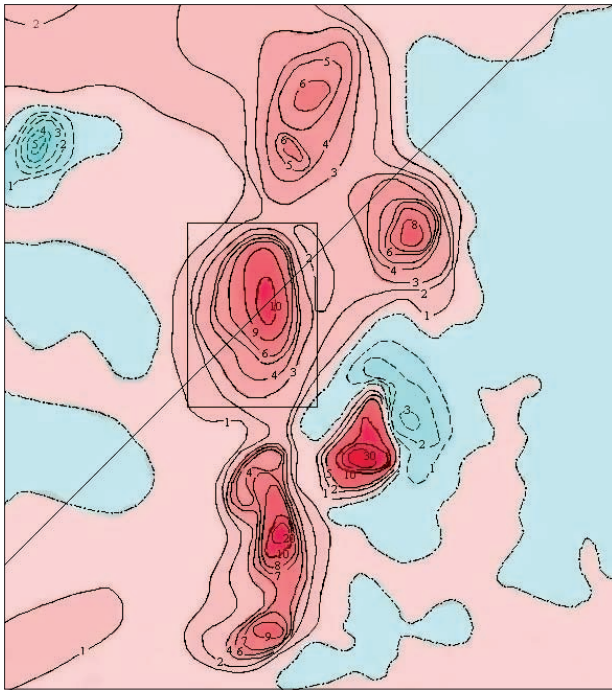
$$\frac{\partial T_x}{\partial I_{xj}^0}=\frac{2[(d_j-x)^2-(H_j-z)^2]}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^2};$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial I_{zj}^0}=\frac{4(d_j-x)(H_j-z)}{[(d_j-x)^2+(H_j-z)^2]^2}.$$

Получены формулы для определения численных значений модели. Теоретическое поле стало близким к исходному. Относительно устойчивости решения можно уверенно сказать, что градиентный метод устойчив, достаточно сослаться на работу В.И. Старостенко и С.М. Оганесяна [11]. Данную постановку задачи можно использовать для экспресс-анализа определения центра тяжести аномальных объектов, что позволяет перейти к дальнейшей интерпретации сложно-построенных геологических тел. На практическом примере такой подход рассмотрен с использованием нескольких аппроксимационных построений. При решении обратной задачи магнитометрии предлагаются аппроксимационные построения для трех модельных классов источников поля: двумерных горизонтальных цилиндрических тел, трехмерных стержневых тел и трехмерных звездных тел А.Н. Тихонова, с помощью которых можно детально описать сложные геологические среды.

Такой подход позволяет решать следующие важные интерпретационные задачи:





Участок района исследований. Вертикальная составляющая магнитного поля,  $10^2$  нТл

The site of the research area. The vertical component of the magnetic field,  $10^2$  нТл

1) заменить исходное аномальное поле аналитической функцией и пересчитать его с разновременных точек рельефа земной поверхности в точки горизонтальной плоскости, учесть влияние регионального фона и аномальный эффект от приповерхностного слоя, вычислить разностные трансформанты поля и провести качественную интерпретацию аномальных полей;

2) описать сложные геологические среды и найти численные значения параметров, которые определяют положение и размеры магнитоактивных объектов.

*Класс горизонтальных цилиндрических тел. Двумерная модель.* Задано магнитное поле, представленное вертикальной и горизонтальной составляющими напряженности магнитного поля:

$$Z_t = Tt_z(x_i, z_i) = Tt(i);$$

$$H_t = Tt_x(x_i, z_i) = Tt_x(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Геологическая модель задана такими параметрами:

$P = \{m; [d_j; H_j]; [I_x; I_z]; j = 1, 2, \dots, m\}$ ,  $m$  — количество элементарных тел;  $d$  — размер стержневого тела;  $H$  — глубина залегания тела;  $I_x, I_z$  — составляющие вектора интенсивности намагниченности тела.

*Класс трехмерных стержневых тел.* Задано магнитное поле, представленное вертикальной

и горизонтальной составляющими напряженности магнитного поля:

$$Z_n(i) = Tn_z(i);$$

$$H(i) = (Tn_x(i)^2 + Tn_y(i)^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Исходное поле заменим полем некоторой совокупности элементарных тел. Каждое тело состоит из трех пересекающихся взаимно перпендикулярных материальных стержней. Точка пересечения — центр симметрии тела. Каждый стержень вытянут по направлению координатной оси и намагничен вдоль своего простирания.

Общая геологическая модель определена такой последовательностью параметров:

$$P = \{m, (c_x, c_y, h)_j; (2t_x, 2t_y, 2t_z)_j;$$

$$(I_x, I_y, I_z)_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $m$  — количество элементарных тел;  $(c_x, c_y, h)$  — центры тяжести тел;  $(2t_x, 2t_y, 2t_z)$  — длины стержней;  $(I_x, I_y, I_z)$  — составляющие вектора интенсивности намагниченности стержневых масс.

Решение обратной задачи магнитометрии позволяет построить аналитическую модель аномального магнитного поля и уточнить координаты центров масс аномалиеобразующих объектов. Найденные центры масс в дальнейшем могут определять положение геометрических центров симметрии трехмерных звездных тел. Таким образом, решается вопрос выбора модели для метода автоматизированного подбора, который является наиболее эффективным инструментом решения обратных задач в сложных физико-геологических условиях.

*Класс трехмерных звездных тел.* Для каждого тела геологической модели выбрана своя локальная система координат, определен центр звездности. Начало локальной системы координат находится в центре звездности тела, а направления координатных осей согласованы с центральной системой. Таким образом, форма и размеры тела описываются в системе координат, которая связана с самим телом.

В этом модельном классе определенный интерес представляет принципиально новый способ описания аномальных тел радиусом-вектором, который можно представить в виде тригонометрического полинома:

$$R = R(\phi; \theta) = \sum_{j=1}^m A_j W_j(\phi; \theta),$$

где  $A_j$  — коэффициенты для определения положения внешней поверхности тела;  $W_j = W_j(\phi; \theta)$  — тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} W_1 &= 1; W_2 = \cos \theta; W_3 = \cos \phi \sin \theta; \\ W_4 &= \sin \phi \sin \theta, W_5 = \sin \theta; W_6 = \cos 2\theta; \\ W_7 &= \sin 2\theta; W_8 = \sin 2\phi \sin \theta; \\ W_9 &= \cos 2\phi \sin \theta; W_{10} = \sin \phi \sin 2\theta; \\ W_{11} &= \cos \phi \sin 2\theta; W_{12} = \sin 2\phi \sin 2\theta; \\ W_{13} &= \cos 2\phi \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Этот способ позволяет осуществлять построение гладких границ аномалиеобразующих тел при небольшом количестве параметров, число которых можно увеличивать по мере усложнения их формы.

Общая геологическая модель представлена последовательностью параметров:

$$\begin{aligned} P &= \{jk; [(x_o; y_o; H_o)_t]; \\ &[(m; A_j, j = 1, 2, \dots, m)_t]; \\ &[(I_x; I_y; I_z)_t]; \quad t = 1, 2, \dots, jk\}, \end{aligned}$$

где  $jk$  — количество элементарных тел;  $(x_o, y_o, H_o)$  — центры звездности тел;  $m$  — количество параметров, определяющих внешний контур тела, принимает одно значение из фиксированной последовательности  $5 \leq m \leq 13$ ;  $A_j$  — коэффициенты для определения положения внешней поверхности тела;  $(I_x; I_y; I_z)$  — составляющие вектора интенсивности намагничения.

**Практический пример.** Район измеренных магнитных аномалий занимает часть Среднеприднепровского склона Украинского щита, охватывает район Большого Кривого Рога и сложен породами докембрийской железорудной формации, представленной различными железистыми кварцитами преимущественно магнетитового состава.

Исходное аномальное поле исследуемого участка (рисунок) представлено вертикальной составляющей вектора напряженности магнитного поля.

Задача решена в несколько этапов.

1. По заданному профилю произведен экспресс-анализ определения центра тяжести аномального объекта. Заданное магнитное поле аппроксимировано аналитической функцией по

средством решения обратной задачи в классе трехмерных стержневых тел [3, 5].

Среднее отклонение между наблюдаемым и теоретическим полями равно:  $\Delta_{\text{ср}} = 21,47$  нТл, что составляет 2—3 %.

2. Определено положение центра масс аномального объекта:  $(c_x, c_y, h) = (13,99; 14,7; 4,63)$ .

По внешнему магнитному полю найдено распределение функции  $I_z$  — вертикальной составляющей вектора интенсивности намагничения в пределах рассматриваемого участка исследований, выделенного на рисунке. Массы намагничены вертикально и однородно  $(I_x; I_y; I_z) = (0, 0, 700)$ .

3. Для более точного определения конфигурации намагниченного объекта целесообразно перейти к другому классу аппроксимационных моделей — классу трехмерных звездных тел [4, 5]. В результате решения обратной задачи получены коэффициенты  $A_j$ , определяющие конфигурацию намагниченного объекта:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1,42717; A_2 = -0,11121; A_3 = -0,01044; \\ A_4 &= -0,02920; A_5 = 0,56801; A_6 = -0,36538; \\ A_7 &= -0,75002; A_8 = -0,00896; A_9 = -0,29741; \\ A_{10} &= -0,05035; A_{11} = 0,02978; A_{12} = 0,00350; \\ A_{13} &= 0,48845. \end{aligned}$$

Точность подбора составляет 3 %.

**Заключение.** Рассмотрены решения прямой и обратной задач магнитометрии для случая, когда геологическая модель представлена совокупностью намагниченных горизонтально расположенных стержневых тел. Такая постановка задачи дает возможность эффективно осуществлять экспресс-анализ определения центра тяжести аномальных объектов, что позволяет перейти к интерпретации сложнопостроенных геологических тел. Таким образом, решается вопрос выбора модели начального приближения для метода автоматизированного подбора — наиболее эффективного инструмента решения обратных задач в сложных физико-геологических условиях. Применение разработанного программного обеспечения при решении практических задач показывает его эффективность при интерпретации магнитного поля, обусловленного локальными источниками, и возможность применения разработанных подходов для интерпретации магнитных аномалий железорудной природы.

## СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК

1. Булах Е.Г. Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий (метод минимизации). Киев: Наукова думка, 1973. 111 с.
2. Булах Е.Г., Ржаницын В.А., Маркова М.Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. Киев: Наукова думка, 1976. 220 с.
3. Булах Е.Г., Лапина Е.П. К вопросу о построении аналитической модели внешнего магнитного поля. *Геофизический журнал*. 2008. Т. 30, № 2. С. 42—50.

4. Булах Е.Г., Маркова М.Н., Лапина Е.П. Прямая и обратная задачи магнитометрии для совокупности трехмерных звездных тел класса А.Н. Тихонова. *Физика Земли*. 2009. № 2. С. 88–96.
5. Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев.: Наукова думка, 2010. 462 с.
6. Канторович Л.В. О методе наискорейшего спуска. *Доклады АН СССР*. 1947. Т. 56, № 3. С. 233–236.
7. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. *Успехи математических наук*. 1948. Т. 3, вып. 6 (28). С.89–185.
8. Кобрунов А.И. Теоретические основы решения обратных задач геофизики. Ухта: Изд-во Урал. индустр. ин-та, 1995. 228 с.
9. Петрищевский А.М. Опыт аппроксимации сложных геологических сред массивом материальных точек. *Геология и геофизика*. 1981. № 5. С.105–115.
10. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев.: Наукова думка, 1978. 228 с.
11. Старостенко В.И., Оганесян С.М. Некорректно поставленные задачи по Адамару и их приближенное решение методом регуляризации по А.Н.Тихонову. *Геофизический журнал*. 2001. Т. 23, № 6. С. 3–20.
12. Страхов В.Н. К теории метода подбора. *Известия АН СССР. Сер. геофиз.* 1964. № 4. С. 494–509.
13. Страхов В.Н. К проблеме параметризации в обратных задачах гравиметрии. *Известия АН СССР. Физика Земли*. 1978. № 6. С. 39–49.
14. Zidarov D., Zhelev Zh. On obtaining a Family of Bodies with Identical Exterior Fields Method of Bubbling. *Geophysical Prospecting*. 1970, Vol. 18, N 1, P.14–33.
15. Zidarov D. Inverse gravimetric problem in Geoprospecting and Geodesy. Elsevir, 1990. 284 p.
16. Zhelev Zh. On the Representation of the World Gravity Anomalies Sources with a Final Number of Point Masses. *Бюлл. Геофиз. сбнц.* 1994. Vol. 20, N 2. P. 57–67.

Поступила в редакцию 21.02.2020

## REFERENCES

1. Bulah E.G. Avtomatizirovannaya sistema interpretatsii gravitacionnyh anomalij (metod minimizatsii). Kiev: Naukova dumka, 1973. 111 s.
2. Bulah E.G., Rzhancyn V.A., Markova M.N. Primenenie metoda minimizatsii dlya resheniya zadach strukturnoj geologii po dannym gravirazvedki. Kiev: Naukova dumka, 1976. 220 s.
3. Bulah E.G., Lapina E.P. K voprosu o postroenii analiticheskoy modeli vneshnego magnitnogo polya. *Геофизический журнал*. 2008. Т. 30, № 2. С. 42–50.
4. Bulah E.G., Markova M.N., Lapina E.P. Pryanaya i obratnaya zadachi magnitometrii dlya sovokupnosti trehmernykh zvezdnykh tel klassa A.N. Tihonova. *Физика Земли*. 2009. № 2. С. 88–96.
5. Bulah E.G. Pryanые i obratnye zadachi gravimetrii i magnitometrii. Kiev.: Naukova dumka, 2010. 462 s.
6. Kantorovich L.V. O metode nayskorejshego spuska. *Doklady AN SSSR*. 1947. Т. 56, № 3. С. 233–236.
7. Kantorovich L.V. Funktsionalnyj analiz i prikladnaya matematika. *Успехи математических наук*. 1948. Т. 3, вып. 6 (28). С. 89–185.
8. Kobrunov A.I. Teoreticheskie osnovy resheniya obratnykh zadach geofiziki. Uhta: Izd-vo Ural. industr. in-ta, 1995. 228 s.
9. Petrishevskij A.M. Opyt approksimatsii slozhnykh geologicheskikh sred massivom materialnykh toчек. *Геология и геофизика*. 1981. № 5. С.105–115.
10. Starostenko V.I. Ustojchivye chislennye metody v zadachah gravimetrii. Kiev.: Naukova dumka, 1978. 228 s.
11. Starostenko V.I., Oganesyanyan S.M. Nekorrektno postavlenne zadachi po Adamaru i ih priblizhennoe reshenie metodom reguljarsizatsii po A.N.Tihonovu. *Геофизический журнал*. 2001. Т. 23, № 6. С. 3–20.
12. Strahov V.N. K teorii metoda podbora. *Izvestiya AN SSSR. Ser. geofiz.* 1964. № 4. С. 494–509.
13. Strahov V.N. K probleme parametrizatsii v obratnykh zadachah gravimetrii. *Izvestiya AN SSSR. Физика Земли*. 1978. № 6. С. 39–49.
14. Zidarov D., Zhelev Zh. On obtaining a Family of Bodies with Identical Exterior Fields Method of Bubbling. *Geophysical Prospecting*. 1970. Vol. 18, No. 1. P. 14–33.
15. Zidarov D. Inverse gravimetric problem in Geoprospecting and Geodesy. Elsevir, 1990. 284 p.
16. Zhelev Zh. On the Representation of the World Gravity Anomalies Sources with a Final Number of Point Masses. *Boulg. Geophys. list*. 1994. Vol. 20, No. 2 p. 57–67.

Receive 21.02.2020

Т.Л. Михеева, Е.П. Лапина, Н.В. Панченко

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна  
e-mail: mtat@ukr.net

## ПРЯМА ТА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧІ МАГНІТОМЕТРІЇ ДЛЯ СУКУПНОСТІ ГОРИЗОНТАЛЬНО РОЗТАШОВАНИХ СТРИЖНЕВИХ ТІЛ

Наведено розв'язок прямої та оберненої задач магнітометрії для випадку геологічної моделі, яку можна зобразити сукупністю намагнічених горизонтально розташованих стрижневих тіл. Проведено інтерпретацію магнітометричних даних на основі використання автоматизованої системи інтерпретації потенціальних полів. У процесі досліджень по-

будовано числову модель аномального магнітометричного поля та проведено якісну інтерпретацію отриманих результатів, виконано моделювання локальних аномальних джерел. У процесі розв'язку задачі здійснено трирівневу параметризацію вхідних даних. Як перше наближення обрано модель, яку зображено сукупністю горизонтально розташованих стрижнів. На другому етапі спостережене магнітне поле апроксимовано сукупністю тривимірних тристрижневих елементарних тіл. На третьому етапі використано клас тривимірних зоряних тіл. У цьому класі запропонований алгоритм дає змогу зменшити кількість шуканих параметрів, описати конфігурацію складнопобудованих об'єктів і максимально наблизити розв'язок до реального геологічного середовища.

**Ключові слова:** *якісна інтерпретація, магнітне поле, обернена задача, автоматизована система, апроксимація, геологічний об'єкт.*

*T.L. Mikheeva, E.P. Lapina, N.V. Panchenko*

Institute of geophysics of S. I. Subbotin NAN of Ukraine, Kiev, Ukraine

e-mail: mtat@ukr.net

#### THE DIRECT AND INVERSE MAGNETOMETRY PROBLEM FOR A SET OF HORIZONTALLY SPACED ROD BODIES

**Purpose.** To conduct a qualitative interpretation of the initial magnetometric data, an automated system for interpreting potential fields was used. In the process of research, the following tasks were solved: based on the developed algorithms, a numerical model of the anomalous magnetometric field was constructed, a qualitative interpretation of the results was carried out, local anomaly-forming sources were modeled. The proposed algorithm makes it possible to make an express estimate for the initial approximation model, significantly reduce the number of required parameters, and bring the solution as close as possible to a real geological environment. The developed software and algorithmic software has been tested on model examples and real magnetometric data.

**Design/methodology/approach.** Methods based on solving the inverse problem by the selection method, an approximation design is used, which is determined by a set of three-dimensional rod bodies. The orientation of the rods is consistent with the coordinate axes. The center of symmetry of each body can move. When solving the problem, the centers of symmetry of bodies can determine the positions of geometric centers of rather complex figures. The three-rod approximation makes it possible to better describe the integral characteristics of the geological model, as evidenced by numerous model calculations. At the final stage, we used the class of three-dimensional stellar bodies, which allows the construction of smooth boundaries to describe complex structures of bodies and maximally approximate the solution to a real geological environment.

**Findings.** Based on the developed software, an example of approximation of the initial magnetic field is considered. The study site is located in the magnetic anomaly region, it occupies part of the Srednepredneprovsky slope of the Ukrainian shield. As a result of a three-level approximation, an a posteriori interpretation model of magnetic sources is obtained that satisfies both the observed field and a priori geological information.

**The practical significance and conclusions.** The considered formulation of the inverse problem can be used to solve the interpretation problems of ore geophysics. This statement of the problem can be used for express analysis of determining the center of gravity of anomalous objects, which allows us to proceed to the interpretation of three-dimensional complex geological bodies. On a practical example, this approach is considered using several approximation constructions.

**Key words:** *quality interpretation, magnetic field, inverse task, automated system, approximation, geological object.*