

Дослідження формування плямистості забруднення місцевості потужним висотним фінітним джерелом на основі простих аналітичних моделей атмосферної дифузії

© О. Я. Скриник, 2010

Український науково-дослідний гідрометеорологічний інститут, Київ, Україна

Надійшла 6 листопада 2009 р.

Представлено членом редколегії В. І. Старостенко

С помощью аналитических решений простых модельных диффузных задач исследованы основные качественные особенности процесса формирования крупномасштабной пятнистой структуры загрязнения подстилающей поверхности мощным высотным финитным источником. Сформулирован критерий возможности образования пятнистости при наличии указанного источника, который определяется отношением времени действия источника к характерному времени периодического изменения интенсивности вертикального турбулентного перемешивания в граничном слое атмосферы.

Using analytical solutions of simple model diffusion problems, we have studied the process of formation of a large-scale spot-like pollution structure of the underlying surface by a powerful high-altitude finite source. We have established a criterion for the appearance of a spot-like pollution structure in case of presence such a source which is defined by the ratio of time of source activity to characteristic time of periodic change of intensity of vertical turbulent mixing in the atmospheric boundary layer.

Вступ. Створення адекватних математичних моделей процесу поширення (регулярного перенесення і турбулентного розсіювання) забруднювальних домішок у нижній частині атмосфери є надзвичайно важливим та актуальним науковим завданням. В першу чергу це пов'язане з екологічними проблемами. Наприклад, як свідчить досвід, на жаль, не виключена можливість виникнення технологічних аварій, внаслідок яких можливий викид в атмосферу шкідливих (радіоактивних чи хімічно небезпечних) домішок [Randle et al., 2003]. Своєчасне і правильне реагування на такі аварії відповідних органів влади з метою зменшення негативних наслідків неможливе без використання результатів згаданих математичних моделей.

Турбулентна дифузія, особливо атмосферна, є надзвичайно складним явищем [Pasquill, Smith, 1983]. Існує велика кількість фізично важливих механізмів і ефектів, неврахування яких зменшує практичну цінність створюваних моделей і призводить до неправильних результатів. Представлена робота стосується дослідження одного із таких механізмів, а

саме: виявлення важливої ролі періодичної зміни (добового або синоптичного ходу) інтенсивності вертикального турбулентного перемішування в граничному шарі атмосфери (ГША) у процесі формування структури забруднення підстильної поверхні. Зауважимо, що вплив добового ходу метеорологічних умов на процес забруднення земної поверхні відзначено у деяких публікаціях (наприклад, [Brandt et al., 2002]). Однак вплив періодичної зміни інтенсивності вертикального турбулентного перемішування на формування плямистості забруднення окремо і детально не досліджували.

У публікаціях [Волощук та ін., 2007; Скриник, Грицюк, 2007] обґрунтована гіпотеза про можливість формування великомасштабної плямоподібної структури забруднення підстильної поверхні за вказаним механізмом у разі наявності потужного миттєвого джерела. Припущене також, що ефект плямистості може бути і в умовах неперервно діючого джерела.

Мета статті — на основі розв'язків модельних дифузійних задач (у наближенні напів-

емпіричної K -теорії) дослідити процес формування забруднення підстильної поверхні за наявності потужного фінітного (в граничному варіанті — нескінченно діючого) висотного джерела; встановити, чи можливе формування плямистості забруднення за наявності вказаного джерела, і якщо так, то за яких умов (тобто виявити критерій формування структури забруднення). Зауважимо, що мова йде про динаміку дифузійних процесів на значних просторово-часових масштабах, для яких використання напівемпіричної K -теорії достатньо обґрунтовано.

Параметризація періодичної зміни інтенсивності вертикального турбулентного перемішування. Інтенсивність вертикального турбулентного перемішування (тобто коефіцієнт вертикальної турбулентної дифузії, K_z) у ГША залежить від типу температурної стратифікації. Це пов'язане з тим, що за нестійкої стратифікації інтенсивно розвивається конвективна турбулентність, яка значно підсилює динамічну (механічну) турбулентність. Зовсім інша ситуація виникає за стійкої стратифікації: будь-який вертикальний рух пригнічується архімедовими силами плавучості. Тип стратифікації, відповідно, розвиток чи затухання конвективної турбулентності, формується насамперед вертикальними потоками тепла від земної поверхні, які мають чітко виражений добовий хід [Stull, 1988].

Інтенсивність вертикального турбулентного перемішування в нижній частині атмосфери також залежить від синоптичної ситуації, часову зміну якої на певній території можна вважати квазіперіодичною. Все ж дослідження впливу часової зміни K_z на процес формування картини регіонального забруднення території доцільно проводити, враховуючи тільки добовий хід, оскільки він проявляється чіткіше. Отже, в подальшому розглянемо лише добовий хід інтенсивності вертикального турбулентного перемішування. Зазначимо, що узагальнення результатів для врахування «синоптичного» ходу величини K_z не є складним.

Як і в публікаціях [Волощук та ін., 2007; Скриник, Грицюк, 2007], добовий хід коефіцієнта вертикальної турбулентної дифузії внаслідок інтенсифікації і затухання конвективної турбулентності в ГША параметризуємо такими співвідношеннями:

$$K_z = \bar{K}_z \varphi(t),$$

$$\varphi(t) = 1 + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \omega_0\right), \quad (1)$$

де \bar{K}_z — середнє добове значення коефіцієнта вертикальної турбулентної дифузії; функція $\varphi(t)$ описує добовий хід інтенсивності вертикального турбулентного перемішування ($T = 24$ год — повний період; ω_0 — «початкова фаза», яка характеризує інтенсивність вертикального перемішування в початковий момент часу дії джерела); $B \cdot \bar{K}_z$ — амплітуда добового ходу K_z ; t — час дифузії. «Прив'язування» параметризації (1) до процесу дифузії здійснено лише для зручності розв'язування модельних дифузійних задач, і її узагальнення не викликає труднощів. Загалом величина B може залежати як від географічних координат, так і від сезону [Fujitani, 1981].

Очевидно, що, змінюючи значення величини T , формулу (1) можна використовувати для опису не лише добового ходу K_z , а й синоптичного.

Параметризацію (1) слід вважати лише первім наближенням, яке тільки на якісному рівні відтворює реальний добовий хід інтенсивності вертикального розсіювання. Зауважимо також, що параметризація (1) описує дещо ідеалізований випадок. Тут не враховано інші ситуації, які можуть виникати під час еволюції ГША. Наприклад, відомо, що на температурну стратифікацію, а отже, і на конвективне перемішування в ГША певним чином впливають наявність хмарного покриву і його інтенсивність [Stull, 1988]. Можливий випадок, коли щільний хмарний покрив спричинює інтенсивний розвиток конвективного перемішування у верхній частині ГША, особливо у нічний період [Sorbian, 1999]. Все ж вважаємо, що для поставленої мети дослідження параметризація (1) є цілком задовільною.

Аналітичні моделі атмосферної дифузії в ГША. В наближенні напівемпіричної K -теорії [Pasquill, Smith, 1983; Monin, Yaglom, 1971] основою дослідження і моделювання дифузійних процесів у ГША є рівняння, яке, як правило, записують у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} &= \\ = K_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial c}{\partial z} + F, \quad (2) \\ c = c(t, x, y, z), \end{aligned}$$

$$t > 0, |x| < \infty, |y| < \infty, z_0 < z < h,$$

де c — концентрація домішок; t, x, y, z — часова і просторові прямокутні декартові координати; $\mathbf{V} = \{u, 0, 0\}$ — швидкість регулярного перенесення (швидкість вітру), при цьому вважають, що його напрямок збігається з віссю Ox ; K_x, K_y — коефіцієнти поздовжньої та поперечної турбулентної дифузії відповідно; K_z — коефіцієнт вертикальної турбулентної дифузії; F — член рівняння, який описує джерела домішок, що дифундують; z_0 — висота широтності (нижня межа зони дифузії); якщо нижньою межею є підстильна поверхня, то $z_0 = 0$); h — висота ГША (верхня межа зони дифузії).

Зауважимо, що під час розгляду дифузійних задач у ГША величини K_x і K_y , як правило, вважають сталими, а u та K_z — залежними від вертикальної координати. Тому останні задають аналітичними виразами, які описують їх вертикальний хід.

Задання дифузійної задачі буде повним, якщо рівняння (2) доповнити відповідними початковою та граничними умовами.

Отримати аналітичні розв'язки нестационарних дифузійних задач в умовах реальних вертикальних і часових профілів регулярного перенесення та коефіцієнта вертикальної турбулентної дифузії (тобто при $u = u(t, z)$ і $K_z = K_z(t, z)$) дуже важко, напевне, практично неможливо [Monin, Yaglom, 1971]. Саме тому основним методом розв'язку таких задач стають чисельні методи. Незважаючи на це, аналітичні розв'язки спрощених моделей атмосферної дифузії мають певну цінність (не втрачають своєї привабливості), наприклад, вони можуть слугувати тестовим матеріалом для перевірки правильності розв'язків. Крім того, і що найважливіше, за допомогою аналітичних розв'язків значно легше проаналізувати отримані результати та дослідити основні (якісні) властивості розглядуваних ефектів.

Враховуючи зазначене, розглянемо спрощені дифузійні задачі, розв'язання яких все ж таки, на нашу думку, дає змогу дослідити основні властивості процесу формування забруднення підстильної поверхні потужним висотним джерелом газоаерозольних домішок, яке діє протягом певного періоду часу.

Дифузійна модель 1. Для вирішення поставленої мети (дослідження формування плямистості забруднення підстильної поверхні) доповнимо систему рівнянь (1), (2) такими умовами:

$$K_x = K_1 = \text{const}, \quad K_y = K_2 = \text{const},$$

$$\overline{K_z} = K_3 = \text{const}, \quad u = \text{const}, \quad (3)$$

$$F(t, x, y, z) = Q H(t) H(t_* - t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - h_*), \\ Q = \text{const}, \quad (4)$$

де Q, t_*, h_* — потужність ($[Q] = \text{кг}\cdot\text{с}^{-1}$), час дії та висота джерела ($0 < h_* < h$) відповідно; $H(t)$ — функція Хевісайда; $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Початкова умова

$$c|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Граничні умови

$$c|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$c|_{|y| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$c|_{z=0} = 0, \quad K_z \frac{\partial c}{\partial z}|_{z=h} = 0. \quad (8)$$

Для дослідження процесу формування забруднення підстильної поверхні найважливішими є граничні умови за вертикальною координатою. За верхню граничну умову по z взято умову відбивання, що означає повну заборону перенесення домішок увиці шари. Таке припущення не є суттєвим обмеженням для дифузійних задач. Воно приводить до деякого завищення значень турбулентних потоків забруднювальних домішок на підстильну поверхню. Як нижню граничну умову використано умову повного поглинання.

Отже, для моделювання турбулентного розсіювання домішок на основі задачі (1) — (8) із всіх важливих механізмів турбулентної дифузії в ГША розглянуто тільки періодичну зміну величини K_z , що і є основним предметом дослідження.

Задача (1) — (8) має аналітичний розв'язок, який неважко отримати класичними методами математичної фізики [Тихонов, Самарський, 1966]:

$$c(t, x, y, z) = \frac{Q}{2\pi h \sqrt{K_1 K_2}} \int_0^t \left\{ \frac{H(\tau) H(t_* - \tau)}{(t - \tau)} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-\frac{K_2 (x - u(t - \tau))^2 + K_1 y^2}{4K_1 K_2 (t - \tau)} \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{\infty} \sin(h\sqrt{\lambda_i}) \sin(z\sqrt{\lambda_i}) \right\} \times$$

$$\times \exp \left(\lambda_i K_3 \left(\tau - t + \frac{BT}{2\pi} \left(\sin \left(\frac{2\pi\tau}{T} + \omega_0 \right) - \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \omega_0 \right) \right) \right) \right) d\tau, \quad (9)$$

$$\text{де } \lambda_i = \left(\frac{\pi(1+2i)}{2h} \right)^2.$$

Дифузійна модель 2. Під час розгляду дифузії від неперервно діючого джерела за умови незалежності коефіцієнтів дифузійного рівняння від часу, як правило, поздовжньою дифузією нехтують порівняно з регулярним перенесенням у цьому самому напрямі, тобто приймають справедливість умови $K_x = 0$. Така умова дещо спрощує як саме дифузійне рівняння, так і повну постановку задачі. Використавши її для модельної задачі 1, отримаємо

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = K_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \quad (10)$$

$$t > 0, \quad x > 0, \quad |y| < \infty, \quad 0 < z < h.$$

Початкова умова (5) та граничні умови (7) і (8) залишаються такими самими. Граничну умову за координатою x запишемо так:

$$u c|_{x=0} = Q H(t) H(t_* - t) \delta(y) \delta(z - h_*), \quad (11)$$

тобто умова $K_x = 0$ дає змогу записати джерело через граничну умову.

Аналітичний розв'язок задач (1), (10), (3), (5), (7), (8) і (11) має вигляд

$$c(t, x, y, z) = Y(x, y) Z(t, x, z),$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi K_2 x}{u}}} \exp \left(-\frac{u y^2}{4K_2 x} \right),$$

$$Z = \frac{2Q}{uh} H \left(t - \frac{x}{u} \right) H \left(t_* - t + \frac{x}{u} \right) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sin \left(\sqrt{\lambda_i} h_* \right) \sin \left(\sqrt{\lambda_i} z \right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left(\lambda_i K_3 \left(\frac{BT}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi(u t - x)}{u T} + \omega_0 \right) - \frac{x}{u} - \frac{BT}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \omega_0 \right) \right) \right) \right\}. \quad (12)$$

Зауважимо, що розв'язавши модельні дифузійні задачі (формули (9) та (12)), очевидно, легко відшукати сумарне поле забруднення підстильної поверхні $c^*(x, y)$ за формулою

$$c^*(x, y) = \int_0^\infty K_z \frac{\partial c}{\partial z}|_{z=0} dt. \quad (13)$$

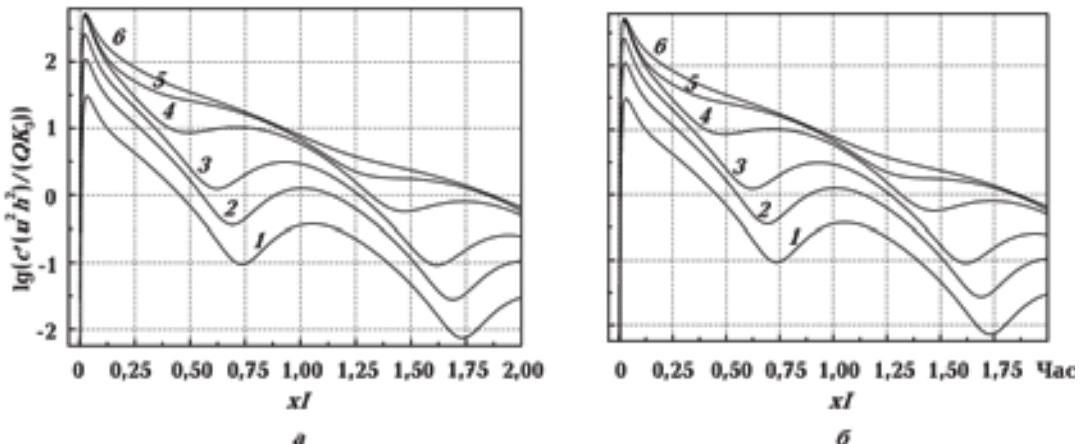
Величина $c^*(x, y)$ і є основною невідомою величиною, яка потребує визначення.

Аналіз результатів моделювання. Критерій формування плямоподібної структури забруднення підстильної поверхні. Результати обчислення сумарного забруднення підстильної поверхні на основі чисельного обчислення інтеграла (13) з відповідними аналітичними розв'язками дифузійних задач (9) і (12) показано на рисунку. Тут наведено горизонтальні профілі (вздовж осі Ox) поля сумарного забруднення $c^*(x, y)$ за різних значень часу дії джерела. Сумарне забруднення нормували величиною $QK_3/(u^2 h^2)$ і зобразили у логарифмічному масштабі. Поздовжню координату x нормували відстанню, яку проходить елементарний об'єм повітря внаслідок регулярного перенесення за добу (uT).

В усіх випадках фактичні значення вхідних параметрів дифузійних задач брали однаковими, причому такими, що мають реальний фізичний зміст.

З самого початку зауважимо, що результати розрахунків для задачі 1 практично не відрізняються від аналогічних результатів задачі 2. Отже, є підстави стверджувати, що в задачах подібного типу навіть за залежного від часу коефіцієнта дифузійного рівняння K_z умова $K_x = 0$ є прийнятною.

З аналізу отриманих результатів випливає важливий висновок: ефект плямистості виявляється за наявності не лише миттєвого джерела, а й фінітного. На рисунку чітко відстежується великомасштабна плямоподібна структура забруднення підстильної поверхні (тобто функція $c^*(x, 0)$ має більше одного максимуму) за порівняно невеликих значень t_* . Зі збільшенням часу дії джерела накопичення забруднень у точках локальних мінімумів функції $c^*(x, 0)$ відбувається інтенсивніше, що приводить до деякого «вирівнювання» поля забруднень. Інакше кажучи, зі збільшенням t_* зникають усі локальні максимуми, крім першого, і функція $c^*(x, 0)$ стає монотонно спадною на проміжку $x > x_{\max}$, де x_{\max} — точка першого максимуму. Причому при $t_* = T, 2T, 3T$... функція стає строго монотонною, а при



Горизонтальні профілі нормованого сумарного забруднення підстильної поверхні: *a* — результати, отримані на основі аналітичного розв'язку (9); *б* — результати, отримані на основі аналітичного розв'язку (12); 1 — $t^*=1$; 2 — $t^*=3$; 3 — $t^*=6$; 4 — $t^*=12$; 5 — $t^*=18$; 6 — $t^*=24$ год.

$t^* \in (T_i, T(i+1))$, де $i \in N$, можливі відхилення від строгої монотонності, але монотонність зберігається. Фізична причина такої поведінки сумарного забруднення, ймовірно, полягає в тому, що при $t^* < T$ найважливішим є «початковий» етап формування поля забруднення. На цьому етапі вирішальне значення має «довжина» факела, яка і формується часом дії джерела.

Отже, з аналізу отриманих результатів випливає висновок, що у розглянутих постановках дифузійних задач ефект плямистості забруднення підстильної поверхні формуватиметься лише у разі виконання умови

$$t^*/T < 1.$$

Вказане відношення можна вважати критерієм формування плямоподібної структури висотним фінітним точковим джерелом.

Загальна постановка задачі з відшуканням критерію можливості формування плямоподібної структури забруднення. Розглянемо найзагальнішу постановку задачі з відшуканням вказаних критеріїв на прикладі дифузійної задачі 1.

Використавши співвідношення

$$\begin{aligned} x &= L_{*g} x', \quad y = L_{*g} y', \quad z = L_{*v} z', \\ t &= T_* t', \quad c = C_* c', \end{aligned} \quad (14)$$

де L_{*g} — характерний масштаб довжини в горизонтальному напрямку; L_{*v} — характерний масштаб довжини у вертикальному напрямку; T_* — характерний часовий масштаб; C_* — характерна величина концентрації, задачу 1

запишемо у безрозмірному вигляді. Зауважимо, що оскільки горизонтальні розміри області задачі істотно переважають вертикальні, то, на нашу думку, доцільно вводити два масштаби довжини. Величини T_* , L_{*g} , L_{*v} , C_* задано таким чином:

$$T_* = t^*, \quad L_{*g} = u t^*,$$

$$L_{*v} = h, \quad C_* = \frac{Q}{u^2 t^* h}.$$

Тоді для відшукання невідомої функції $c'(t', x', y', z')$ отримаємо задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial c'}{\partial t'} + \frac{\partial c'}{\partial x'} &= \\ = a_1 \frac{\partial^2 c'}{\partial x'^2} + a_2 \frac{\partial^2 c'}{\partial y'^2} + a_3 (1 + B \cos(a_4 t' + \omega_0)) \frac{\partial^2 c'}{\partial z'^2} + \\ + H(t^* t') H(t^*(1-t')) \delta(x') \delta(y') \delta(z' - a_5), \end{aligned} \quad (15)$$

$$c'|_{t'=0} = 0, \quad c'|_{|x'| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad c'|_{|y'| \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

$$c'|_{z'=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c'}{\partial z'} \right|_{z'=1} = 0, \quad (16)$$

де безрозмірні параметри a_1 — a_5 задано співвідношеннями

$$a_1 = \frac{K_1}{u^2 t_k}, \quad a_2 = \frac{K_2}{u^2 t_k}, \quad a_3 = \frac{t_k K_3}{H^2},$$

$$a_4 = \frac{t_k}{T}, \quad a_5 = \frac{h}{H}.$$

Запишемо розв'язок задачі (15), (16) формально у вигляді

$$c' = c'(t', x', y', z', \mathbf{a}),$$

де \mathbf{a} — вектор визначальних параметрів розглядуваної дифузійної задачі. В цьому випадку вектор \mathbf{a} матиме компоненти $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, B, \omega_0\}$.

Зауважимо, що згадану функцію можна отримати, не розв'язавши задачу (15), (16), а здійснивши постановку величин, заданих (14), у відомий аналітичний розв'язок розмірної дифузійної задачі (9).

Тоді сумарне безрозмірне забруднення підстильної поверхні формально запишемо як

$$c'^* = c'^*(x', y', \mathbf{a}) = \int_0^\infty (1 + B \cos(a_4 t' + \omega_0)) \frac{\partial c'}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dt',$$

$$\text{де } c'^* = c^* \frac{u^2 h^2}{Q K_3}.$$

Очевидно, ефект плямистості можна досліджувати на основі аналізу функції c'^* за умови $y' = 0$.

Тоді постановку задачі з відшукання критеріїв формування плямоподібної структури забруднення підстильної поверхні сформулюємо як задачу з параметрами для знаходження екстремумів функції однієї змінної, обчислення значень вектора-параметра \mathbf{a} , за яких система рівнянь

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial c'^*}{\partial x'} \Big|_{y'=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 c'^*}{\partial x'^2} \Big|_{y'=0} \neq 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

відносно невідомої величини x' має не менше двох розв'язків (один максимум і один мінімум).

Список літератури

Волощук В. М., Скриник О. Я., Грицюк Ю. Я. Механізм формування крупномасштабної «плямовидної» структури забруднення підстильної поверхні потужним газо-аерозольним викидом в нижній частині атмосфери // Доп. НАН України. — 2007. — № 4. — С. 115—120.

Скриник О. Я., Грицюк Ю. Я. Механізм формування крупномасштабної «плямовидної» структури забруднення місцевості потужним газоаеро-

Використавши аналітичний розв'язок (9), систему рівнянь (17) можна конкретизувати. Слід відзначити, що навіть для доволі спрощеної постановки дифузійної задачі (як у моделях 1 чи 2) система рівнянь (17) є дуже складною і важко піддається аналізу. Очевидно, задача ускладниться, якщо для аналізу ефекту плямистості використовувати аналітичні розв'язки загальніших дифузійних задач.

Висновки. На основі аналізу аналітичних розв'язків модельних дифузійних задач досліджено процес формування поля сумарного забруднення земної поверхні за різних значень часу дії потужного висотного джерела. Ефект плямистості забруднення підстильної поверхні за наявності фінітного джерела утворюється у разі виконання певних умов. Установлено критерій можливості формування плямистості забруднення, який визначається відношенням часу дії джерела до характерного часу періодичних змін інтенсивності вертикального турбулентного перемішування.

На жаль, загальна постановка задачі з відшукання точніших критеріїв можливості формування плямоподібної структури забруднення є дуже складною і потребує подальшого аналізу.

Розглянуто доволі спрощену постановку дифузійних задач. Змістовнішою буде задача, якщо врахувати реальні вертикальні профілі коефіцієнтів дифузійного рівняння, а також нестаціонарність за напрямком регулярного перенесення. Проте очевидно, ускладниться і процес отримання аналітичних чи чисельних розв'язків такої задачі. На нашу думку, в цьому випадку ефект плямистості можливий і за умови $t_* / T > 1$. Можна вказати ще один напрям подальших досліджень, а саме: дослідити вплив нестаціонарності джерела (тобто, коли $Q = Q(t)$) на формування плямоподібної структури. Вказані задачі, які є надзвичайно цікавими, потребують подальшого дослідження.

зольним викидом в граничному шарі атмосфери // Геофиз. журн. — 2007. — 29, № 4. — С. 191—198.

Тихонов А. Н., Самарський А. А. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1966. — 724 с.

Brandt J., Christensen J. H., Frohn L. M. Modelling transport and deposition of cesium and iodine from

- the Chernobyl accident using the DREAM model // Atmospheric Chemistry and Physics. — 2002. — 2. — P. 397—417.
- Fujitani T. Seasonal variation of the structure of the atmospheric boundary layer over a Suburban area // Atmospheric Environment. — 1981. — 20 (10). — P. 1867—1876.
- Monin A. S., Yaglom A. M. Statistical fluid mechanics. Vol. 1. — Cambridge: MIT Press, 1971. — 769 p.
- Pasquill F., Smith F. B. Atmospheric diffusion. — Chichester: John Wiley & Sons, 1983. — 431 p.
- Randle K, Sokhi R. S., Cooper J. R. Radioactive Releases in the Environment: Impact And Assessment. — Chichester: John Wiley & Sons, 2003. — 473 p.
- Sorjan Z. Large-Eddy simulation of air pollution dispersion in the nocturnal cloud-topped atmospheric boundary layer // Boundary-Layer Meteorology. — 1999. — 91 (1). — P. 145—157.
- Stull R. B. An Introduction to Boundary Layer Meteorology. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988. — 666 p.