УДК 550.837; 550.344; 517.9

Параболические системы типа "реакция—диффузия" при моделировании процессов генерации и распространения электромагнитной эмиссии литосферы и методы их анализа

© *И. М. Цифра*[1,2], *В. Н. Шуман*[1], *2010*

[1]Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

[2]Университет в Белостоке, Институт математики, Белосток, Польша

Поступила 3 сентября 2009 г.

Представлено членом редколлегии В.И.Старостенко

Розглянуто питання генерації в геосередовищі електромагнітних збурень радіохвильового (кілогерцового) діапазону, що реєструються на земній поверхні. Увагу зосереджено на математичних аспектах проблеми, а власне, аналізі раніше запропонованого нелінійного рівняння генерації типу "реакція — дифузія", яке описує складні режими збудження і поширення електромагнітних збурень у розглядуваній моделі геосередовища — самоподібній структурі, що визначає сейсмічні та електромагнітні процеси в ній. Для спрощення рівняння, що вивчається, запропоновано використати його симетрію. Симетрійний метод дає змогу звести рівняння (або їх систему) в частинних похідних параболічного типу до вивчення систем звичайних диференціальних рівнянь. Для цього може бути використаний як класичний теоретико-груповий підхід, так і його узагальнення — метод умовної інваріантності.

The problems of generation within geo-medium of electromagnetic disturbances of radio-wave (kilo-hertz) region registered on the Earth's surface are considered in the paper. Attention is concentrated on mathematical aspects of the problem, namely on the analysis of earlier proposed non-linear equation of generation of the type "reaction — diffusion" which gives a description of the complicated excitation regimes and propagation of electromagnetic disturbances in the considered model of geo-medium — self-similar structure, which determines seismic and electromagnetic processes in it. Review is given on the physical level, and peculiarities of this equation are analyzed and possible ways of its solution. In order to simplify the equation under analysis it is proposed in the work to use its symmetry. Symmetry method allows reducing the equations (or their system) in partial derivatives of parabolic type to the study of a system of ordinary differential equations. For this purpose both classical theory-group approach and its generalization — conditional invariance method can be used.

Введение. Как известно, низкочастотные электромагнитные волны естественного происхождения, называемые геоэлектромагнитными, существуют в земной коре, океане, в атмосфере, ионосфере, магнитосфере и межпланетной среде [Гульельми, 2007; 2008а, б]. Отмечается их большое разнообразие: одни проникают из межпланетной среды, другие возбуждаются в магнитосфере при взаимодействии солнечного ветра с геомагнитным полем в атмосфере в результате грозовой активности, третьи возбуждаются внутриземными источниками. В настоящей статье сосредоточим внимание на последних, перенеся акцент с диагностики электромагнитных параметров геосреды на исследование динамических процессов и механизмов генерации и распространения электромагнитной эмиссии литосферы.

Согласно эксперименту, горные породы, образующие литосферу, обладают двумя характерными свойствами. Первое — это дискретность. Литосфера состоит из блоков горных пород или достаточно консолидированных и контрастных неоднородностей (отдельностей) различных размеров, подчиненных иерархической последовательности. Второе — постоянные колебательные движения этих отдельностей в огромном диапазоне масштабов и частот (сотни килогерц — десятитысячные доли герца и ниже: звуковая эмиссия, микросейсмы, приливные движения и др.) [Садовский, 2004]. При этом, протекая в дискретной, иерархически самоподобной геосреде, сам сейсмический процесс несет черты иерархичности, дискретности, автомодельности [Садовский, 2004].

Существенный признак геосреды — присутствие флюидов, являющихся наиболее подвижной составляющей планетарного вещества [Кисин, 2008], причем наиболее значительные их современные потоки приурочены к тектонически активным структурам с высокой проницаемостью. Установлен диагонально-решетчато-блоковый рисунок современных геодинамических и флюидодинамических процессов. Взаимодействие флюидных систем и тектонического деформирования сопровождается нелинейными процессами, причем участие флюидов служит одним из основных факторов, определяющих нелинейность [Дмитриевский, Володин, 2006; 2008]. Важно, что изменение физических свойств среды в некоторой ее локальной пространственной области может быть очень быстрым (механизм взаимного возбуждения: флюидные потоки активизируют тектонические процессы, а последние приводят к усилению миграции флюидов) [Кисин, 2008].

Как известно, в таких средах механические процессы всегда сопровождаются (и вызываются) электромагнитными, что и подтверждается непосредственными наблюдениями [Сурков, 2000; Садовский, 2004; Гульельми, 2007; Шуман, 2007, 2008]. Можно предположить, что такая модель геосреды дает возможность подвести физическую основу под эти эффекты, традиционно трактуемые как нелинейные. Однако, хотя эти механоэлектромагнитные (или сейсмоэлектромагнитные) эффекты известны и изучаются относительно давно, они не ориентировались на обнаружение и изучение нелинейных свойств горной породы. Более того, полагалось, что линейного языка вполне достаточно для понимания основных закономерностей этих преобразований, в то время как нелинейности отводилась роль довеска, уточняющего детали процесса. Потребность выхода за пределы круга традиционных представлений здесь особенно очевидна: теоретические исследования таких систем лежат вне возможностей механики сплошных линейно-упругих, упруго-пластических моделей сред и классической электродинамики сплошных пассивных сред. Естественно также считать, что описание механических вибраций и электромагнитного фона невозможно без учета структурных свойств среды. Однако сильное поглощение микросейсмических и, особенно, электромагнитных волн радиоволнового диапазона в земной коре порождает известные проблемы. В частности, обнаружение присутствия высокочастотных упругих волн указывает на то, что они, вероятно, генерируются рассредоточено внутри всего объема литосферы под действием некоторой внешней причины. По мнению М. А. Садовского, учитывая дискретность геосреды, естественно считать ее колебания в различных областях спектра собственными колебаниями составляющих геосреду отдельностей разного масштаба, а колебания с длинами волн, кратными характерному размеру блоков, затухают значительно слабее волн, длина которых такова, что в блоках не могут возникать стоячие волны, т. е. вся среда ведет себя подобно набору резонаторов [Садовский, 2004, с. 349]. Этим объясняется появление отчетливо выраженных максимумов наблюденных спектров на частотах $f_k = c / L_k$, где L_k — преимущественный размер отдельных блоков, c — скорость звука в нем. Следовательно, можно предположить, что здесь происходит делокализованный масштабно-инвариантный процесс.

Что касается электромагнитного шума, то здесь наблюдаются заметные отличия. Во-первых, очевидно, это несовместимость масштабов проявления эффектов электромагнитного излучения с локальным характером их возбуждения, т. е. макроскопическим характером возмущений, распространяющихся в геосреде диффузионным образом, и локальной ("недиффузионной") природой их генерации. Во-вторых, это объяснение физического механизма их распространения от мест зарождения до пунктов регистрации на земной поверхности или над нею.

Как известно, электромагнитные возмущения килогерцового и выше диапазонов на трассах распространения через проводящие слои Земли испытывают сильное затухание (оценки показывают [Гохберг и др., 1985, с. 72—87], что для трассы с удельной проводимостью пород $\sigma \approx 10^{-1}$ См / м на частотах 10^4—10^6 Гц коэффициент затухания превышает 10^2—10^3 Дб/км) и, соответственно, с точки зрения классических представлений они не могут выйти из областей генерации, если глубина их залегания превышает характерный масштаб среды (мощность скин-слоя), составляющий в рассматриваемом случае несколько десятков — сотен метров. Рассмотрению частных аспектов отмеченных проблем, в частности локального характера аномалий всплесков электромагнитного излучения на поверхности Земли и его "сверхдальнего" распространения, посвящен ряд предыдущих работ [Шуман, 2007, 2008; Шуман, Богданов, 2008 а, б]. В настоящей статье сосредоточим внимание на математических аспектах проблемы, а именно анализе нелинейного уравнения генерации электромагнитного шума в высокочастотной (килогерцовой) частотной области, предложенных в работах [Шуман, 2007, 2008]. Этот круг вопросов приобретает актуальность также в связи с новой проблемой, стоящей перед геоэлектрикой — разработкой электродинамики активных (возбудимых) сред, к классу которых, очевидно, может быть отнесена и реальная геосреда.

О математических моделях генерации. Как уже отмечалось, некоторые конкретные вопросы, относящиеся к механизму механо-электромагнитных преобразований (преобразований энергии движения пород геосреды в энергию электромагнитного излучения) в широком диапазоне частот, структуре и особенностям пространственного распределения интенсивности излучения, все еще остаются дискуссионными и требуют дальнейшего изучения [Шуман, 2008; Шуман, Богданов, 2008; Богданов, 2008]. Остановимся вначале на линейных моделях генерации геомагнитного шума. Рассматривая земную кору как пористую влагонасыщенную среду, обладающую магнитной структурой и находящуюся в постоянном магнитном поле земного ядра, А. В. Гульельми предложено следующее достаточно общее линейное уравнение генерации, единообразно описывающее возбуждение магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ в результате действия четырех механизмов — пьезомагнитного, индукционного, деформационного и инерционного, учитывая основные элементы геомеханики: ускорение, скорость, деформацию и напряжение [Гульельми, 2007]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где σ — проводимость горных пород, c — скорость света в вакууме, $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \alpha \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \beta\theta \mathbf{E}_0 + \nabla \times \mathbf{M}$, $\mathbf{A} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ — ускорение горных пород, $\mathbf{v}$ — скорость, α — коэффициент механомагнитной трансформации, $\beta = \dfrac{\partial \ln \sigma}{\partial \theta}$, $\theta = \nabla \mathbf{U}$, $\mathbf{U}$ — поле смещений, $\mathbf{M}$ — магнитный момент единицы объема геосреды, $M_i = (\gamma P_{II} \delta_{ij} + \gamma_2 P_{ij}) B_{0j}$, P_{II} — чувствительность давления в направлении, параллельном осевой нагрузке.

Предполагается, что проводимость горных пород σ, параметры механомагнитной трансформации α, β, γ_1 и γ_2, а также стороннее электрическое $\mathbf{E}_0$ и магнитное $\mathbf{B}_0$ поля однородно распределены в пространстве и не зависят от времени. К сожалению, однако, эти параметры изменяются в широком диапазоне значений, с трудом поддаются измерению или оценкам и привязаны, вообще говоря, к конкретному региону.

Очевидно, уравнение (1) следует решать при заданном движении среды и заданных граничных условиях. Однако ценность такого решения для интерпретации конкретных измерений будет невелика до тех пор, пока не определены значения феноменологических параметров среды. При интерпретации натурных наблюдений необходимо, вообще говоря, знать весь набор параметров геосреды в окрестности точки наблюдения [Гульельми, 2007]. Отсюда делается вывод о целесообразности идеи сейсмомагнитного полигона, предназначенного для постановки специальных экспериментов, ориентированных на определение совокупности параметров, от которых зависит эффективность механоэлектромагнитных преобразований. Однако сконцентрируемся на другом аспекте проблемы. Существенно, что в силу линейности уравнения (1), действие различных механизмов генерации можно изучать независимо друг от друга и складывать полученные результаты [Гульельми, 2007, 2008].

С использованием уравнения (1) выполнен сравнительный анализ относительной эффективности упомянутых механизмов генерации, в частности индукционного, связанного с движением проводящих толщ земной коры, когда генерация магнитного поля обусловлена сдвиговым течением флюида в порах и трещинах относительно скелета горной породы. Установлено существование критической частоты, на которой оба механизма одинаково эффективны, при этом на меньших частотах доминирует индукционный механизм, а на больших — инерционный.

Заметим, что уравнение (1) получено в квазистационарном приближении, когда изменения состояния системы пренебрежимо малы на временах, за которые сигнал проходит расстояние R_0 от источника до точки его распространения. Условие применимости этого приближения при распространении сигнала в вакууме $R_0 / c \prec\prec T$, где T — характерный период изменений. К примеру, для 100 Гц условие квазистационарности выполняется на расстояниях не более 100 км, для частот 100 кГц — на расстояниях не более 1 км от источника. Если сигнал распространяется в геосреде, то эти результаты действительны для диапазона частот, в котором скин-глубина достаточно велика и, соответственно, это тип возмущений выходит на поверхность из областей генерации на глубине. Что касается радиоизлучения на частотах в десятки и сотни килогерц или даже МГц, то, казалось бы, оно не может выходить из глубинных очагов генерации. В поверхностном же слое мощностью 10—150 м, соответствующем скин-глубине, весьма проблематично найти достаточное количество источников радиоизлучения и еще труднее связать его с сейсмическим очагом или динамическими процессами, приводящими к его излучению [Сурков, 2000].

В этом контексте, очевидно, решение задачи генерации электромагнитного шума радиоволнового диапазона и его "аномально дальнего" распространения кажется более естественным искать в рамках нелинейных моделей геосреды с учетом эмпирических закономерностей, свидетельствующих о связи его свойств и характеристик со структурой и динамикой геосистем. Ясно, что в этом случае на передний план выступают неустойчивые системы и возбудимые (активные) среды, демонстрирующие, как известно, большое разнообразие типов динамического поведения и самоорганизации [Давыдов и др., 1991].

Как известно, распределенная возбудимая среда состоит из связанных локально друг с другом активных элементов, способных формировать электромагнитный импульс в ответ на приход внешнего механического сигнала.

Импульсы, распространяющиеся в возбудимых средах, часто называют автоволнами, подчеркивая тем самым тот факт, что их характеристики (форма, скорость распространения) определяются, в основном, параметрами среды и практически не зависят от начальных условий. Общей теории активных сред на данный момент не существует, а каждый достаточно подробно исследованный пример таких сред, как правило, показывает новые типы их динамики и самоорганизации [Давыдов и др., 1991] и нет оснований предполагать, что такие примеры являются уникальными.

Согласно имеющимся представлениям, существует множество механизмов механоэлектромагнитных преобразований. В частности, они могут быть связаны с фильтрационным перетоком порового флюида на фронте захваченной волны, формированием ансамбля микротрещин, сопровождаемым разделением зарядов, воздействием вариаций напряженного состояния среды на доменную структуру зерен магнитных минералов и другими факторами [Левшенко, 1995; Сурков, 2000]. Что касается способов формирования электромагнитного шума рассматриваемого частотного диапазона, то предполагаемые гипотезы могут быть объединены в две различные группы. Очевидно, к первой следует отнести генерации, связанные с релаксацией зарядов в результате электрического пробоя, протеканием тока по устью трещин, эмиссию электронов [Сурков, 2000]. Вероятно, к этой же группе можно отнести и переходное излучение (переходное рассеивание) [Гинзбург, Цытович, 1984].

Как известно, излучение этого типа возникает при движении заряда с любой скоростью, если диэлектрическая проницаемость окружающей его среды изменяется в пространстве или во времени. Переходное излучение имеет место даже для неподвижного заряда, если диэлектрическая проницаемость (и, следовательно, фазовая скорость света) зависит от времени. Ясно, что раскрытие и закрытие трещин при прохождении захваченной волны, изменение объема пустот, фильтрационный переток порового флюида, другие явления, сопутствующие ее прохождению, могут создать необходимые для появления этого излучения условия.

Важное свойство переходного излучения — его узкоугловая направленность, что следует непосредственно из простых кинематических соображений [Гинзбург, Цытович, 1984].

Ко второй группе можно отнести, согласно работе [Сурков, 2000], так называемые вибрационные механизмы генерации, связанные с изменением электрического момента сформировавшихся дипольных источников в результате акустических колебаний.

Согласно множественности механизмов генерации электромагнитных возмущений, в работе [Шуман, 2007] предпринята попытка учета суммарного эффекта всего рассмотренного комплекса факторов генерации путем введения в правую часть уравнения Гульельми — Левшенко (1) нелинейной функции, задающей интенсивность процессов механоэлектромагнитных преобразований, протекающих в элементарном объеме возбудимой среды (неустойчивой системы литосферных блоков). При этом учитывается то обстоятельство, что общепринятым описанием реальных возбудимых сред являются параболические уравнения (или их системы) типа "реакция — диффузия" [Давыдов и др., 1991]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{U}$ — вектор состояния элементарного объема возбудимой среды, α — матрица (коэффициент) диффузии; $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ — нелинейная векторная функция, задающая интенсивность механоэлектромагнитных преобразований.

После сделанных замечаний и с учетом линейного уравнения генерации электромагнитных сигналов (1) (при выводе которого земная кора рассматривалась авторами как пористое влагонасыщенное тело, обладающее магнитной структурой и помещенное в постоянное магнитное поле земного ядра) попытаемся выписать обобщенное нелинейное уравнение их генерации в системе литосферных блоков в следующем виде:

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \alpha_{ij} \nabla^2 B_j + F_i(\mathbf{B}), \qquad (3)$$

где α_{ij} — матрица диффузии; B_j — индукция; $F_i(\mathbf{B})$ — нелинейная функция, определяемая динамичностью процессов деформирования возбудимой (межблоковой) среды и характеризующаяся набором механизмов механоэлектромагнитных преобразований.

При этом характеристики электромагнитных возмущений (импульсов или автоволн) определяются параметрами среды, а величина магнитной индукции B — изменениями напряженного состояния в системе литосферных блоков, характеризующегося значительными градиентами. Очевидно, плотность наведенного тока в локальной области такой среды может определяться не только напряженностью электрического поля в заданной точке, но и тем, как быстро оно изменяется от точки к точке. В итоге связь между током $\mathbf{j}$ и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ принимает вид [Бредов и др., 1985]

$$j_i = \sigma_{ij} E_j + \xi_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}, \qquad (4)$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Ясно, что феноменологические параметры равенства (4) определяются совокупностью факторов, среди которых могут быть упомянуты включения с электронной или ионной проводимостью, реологическая расслоенность среды, ее напряженное состояние, температурный и флюидный режимы. Но, как свидетельствует имеющийся опыт описания возбудимых (активных) сред, основные закономерности образования автоволновых структур могут быть воспроизведены уже в рамках двух-трехкомпонентной системы, [Давыдов и др., 1991], которую, с учетом (3), в простейшем случае можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \alpha_{ij} \nabla^2 B_j + F_i(\mathbf{B}, \mathbf{G}),$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} = \beta_{ij} \nabla^2 G_j + \varepsilon P_i(\mathbf{B}, \mathbf{G}), \qquad (5)$$

где функция $\mathbf{G}$ определяет интенсивность динамических источников в земной коре. Функция $P_i(\mathbf{B}, \mathbf{G})$, в принципе, может быть монотонной или даже линейной [Давыдов и др., 1991], в то время как функция $F_i(\mathbf{B}, \mathbf{G})$ обычно задается полиномами или кусочно-линейными функциями [Давыдов и др., 1991]. Предельный случай, когда $\varepsilon = 0$, соответствует однокомпонентной системе.

Методы теоретико-группового анализа системы уравнений (5). Уравнения (5) представляют собой сложную нелинейную систему уравнений в частных производных второго порядка. Для упрощения этой системы предлагается использовать ее симметрию. С помощью метода симметрийной редукции исходная система сводится к системе уравнений с меньшим числом независимых переменных, в частности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальше можно использовать методы качественного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, а также численные методы. Если же полученную редуцированную систему удается проинтегрировать, то получаем так называемые инвариантные решения, которые являются на самом деле неподвижными точками некоторых преобразований зависимых и независимых переменных, образующих группу Ли.

Классическим примером использования симметрии уравнения является прием, используемый при построении решений типа бегущей волны (в том числе солитонных решений), который состоит в следующем. В уравнении в частных производных в однородной среде вводится переменная $\zeta = -x + V_0 t$ и предполагается, что искомое решение зависит только от переменной ζ. В этом случае система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом построении неявно была использована инвариантность исследуемой системы уравнений относительно преобразований трансляций: $t' = t + a$, $x = x + b$, где a, b — произвольные постоянные. Действительно, переменная ζ является инвариантом группы Ли с генератором $X = \alpha \partial_x + \beta \partial_t$, поскольку $X\zeta = 0$, если постоянные α и β удовлетворяют соотношение $\beta V_0 - \alpha = 0$. Ярким примером использования этого подхода является также построение автомодельных решений, базирующихся на инвариантности относительно преобразований дилатации (растяжений).

Очевидно, чем шире группа инвариантности уравнения, тем больше возможности построения инвариантных решений. Оказывается, для построения редуцированного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению в частных производных, можно использовать не только генераторы классической симметрии Ли, но также же и операторы условной симметрии [Bluman, Cole, 1969; Fushchich, Tsifra, 1987]. При этом операторы

$$X = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i (x, u)\, \partial_{x_i} + \eta(x, u)\, \partial_u , \tag{6}$$

где $x \in R^n$ — операторы классической симметрии уравнения,

$$V\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(k)}\right) = 0, \tag{7}$$

если

$$X_{(k)} V = 0 \tag{8}$$

на многообразии

$$V = 0. \tag{9}$$

Здесь символом $u_{(k)}$ обозначена совокупность частных производных функции u по переменным x_i, $i = \overline{1, n}$ до порядка k; $X_{(k)}$ — продолженный инфинитезимальный оператор (подробнее см. [Овсянников, 1978; Олвер, 1989]).

Если же X является оператором условной симметрии, то равенство (8) должно выполняться на многообразии, заданном уравнением (9) и дополнительно уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta^i (x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \eta(x, u) \tag{10}$$

и всех его дифференциальных следствий до порядка $k-1$ включительно [Fushchich, Tsifra, 1987; Zhdanov et al., 1999]. Набор этих уравнений обозначим символом [DX]. Поэтому критерий условной инвариантности запишется в таком виде [Zhdanov et al., 1999]:

$$X_{(k)} V \Big|_{\substack{V=0,\\ [DX]}} = 0. \tag{11}$$

Соотношениеие (11) более слабое, чем условие классической инвариантности (8), (9). Каждый оператор классической симметрии удовлетворяет и (11), а поэтому является и оператором условной симметрии. Обратное утверждение неверно. Для примера рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности:

$$u_t + u_{xx} = \lambda\left(u^3 + u\right), \ \lambda = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Легко проверить, что

$$Q = \partial_t - \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\, u\, \partial_x + \frac{3}{2}\lambda\left(u^3 + u\right)\partial_u \tag{13}$$

является оператором условной симметрии, но не является оператором классической симметрии. Этот оператор порождает такой анзац, задающий неявно $u(t, x)$:

$$2 \operatorname{arctg} u - \sqrt{2\lambda}\, x = \varphi(\omega),$$

$$\omega = -\ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) - 3\lambda t, \qquad (14)$$

где $\varphi(\omega)$ — неизвестная функция.

Анзац (14) редуцирует уравнение (12) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\varphi'' = \varphi' + (\varphi')^3.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{c_1 e^{\omega} - 1} + c_2, \qquad (15)$$

где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$. Подставляя (15) в (14), получаем условно-инвариантное решение уравнения (12). Очевидно, весьма специфическим случаем системы (5) является уравнение (12).

Другим обобщением метода классической симметрии является построение анзаца, редуцирующего исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью операторов симметрии Ли — Бэклунда. В работе [Svirshchevskii, 1995] предложен метод редукции нелинейных эволюционных уравнений с двумя независимыми переменными, который базируется на симметрии Ли — Бэклунда обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В работе [Tsyfra, 2004; Цифра, 2006] этот метод обобщается на нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и показывает, что его можно применять не только к уравнениям эволюционного типа, а, вообще говоря, и к произвольному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$H\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\right) = 0. \qquad (16)$$

Пусть общее решение уравнения (16) может быть представлено (по крайней мере, локально) в виде

$$u = F(x, C_1, C_2, \ldots, C_m), \qquad (17)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — произвольные функции от $n-1$ переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$. В работах [Tsyfra, 2004; Цифра, 2006] показано, что если $Q = V\partial_u$ — оператор симметрии Ли — Бэклунда уравнения (16), то анзац

$$u = F(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \qquad (18)$$

редуцирует (9) к системе не более чем m дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\varphi_1(x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_2, \ldots, x_n)$. Если исходная система является системой с двумя независимыми переменными, то редуцированная система будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что в общем случае редуцированная система содержит неизвестные функции φ_k, $k = \overline{1, m}$, их производные и независимую переменную, которую обозначим $\gamma(x)$. Поэтому в общем случае она неавтономная. Но существование хотя бы одного оператора симметрии у редуцированной системы

$$\tilde{Q} = \alpha(\gamma)\,\partial_\gamma + \sum_{k=1}^{m} \eta^k(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \gamma)\,\partial_{\varphi_k}$$

позволяет построить замену переменных

$$t = t(\gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_m),$$

$$V^i = V^i(\gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_m),$$

$$i = \overline{1, m},$$

удовлетворяющих уравнению

$$\tilde{Q}\, t = 1, \ \tilde{Q}\, V^i = 0.$$

В новых переменных система не содержит в явном виде независимую переменную γ и является автономной.

Следует отметить тот факт, что для большинства нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений почти ничего не удается сделать, кроме общих утверждений. Поэтому очень важно отыскать стационарные решения (неподвижные точки) и изучить поведение решений нелинейной системы вблизи неподвижной точки. Фундаментальная теорема Хартмана — Гробмана [Гукенхеймер, Холмс, 2002] из теории динамических систем приводит условие, когда исследование поведения решений нелинейной системы сводится к аналогичной задаче для линеаризованной системы, которая, в свою очередь, гораздо проще.

Важным также является выделение из широкого класса нелинейных систем (5) тех, которые обладают хоть какой-то нетривиальной симметрией. Так, например, известно, что уравнение теплопроводности

$$u_t = \frac{1}{\lambda} \Delta u \tag{19}$$

инвариантно относительно группы Галилея с генераторами

$$Q_a = 2t\partial_{x_a} - \lambda x_a u \partial_u, \ a = \overline{1, 3}. \tag{20}$$

Если надо построить нелинейное уравнение

$$u_t = \frac{1}{\lambda} \Delta u + F(u), \tag{21}$$

сохраняющее галилееву симметрию, то оказывается, что функция $F(u)$ может быть только линейной, а именно $F(u) = \alpha u$, $\alpha = \text{const}$. В то же время для системы (5), если

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\lambda} \delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \frac{1}{\lambda} \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, существуют функции F_i и P_i вида

$$F_i = f\left(\frac{\mathbf{B}^2 + \mathbf{G}^2}{\mathbf{BG}}\right) B_i,$$

$$P_i = p\left(\frac{\mathbf{B}^2 + \mathbf{G}^2}{\mathbf{BG}}\right) G_i, \tag{22}$$

где f, p — произвольные гладкие функции, зависящие от одного аргумента, которые совместно с системой (5) образуют галилей-инвариантную нелинейную систему. Генераторы группы Галилея Q_a в этом случае имеют вид

$$Q_a = 2t\partial_{x_a} -$$

$$- \lambda x_a \left(\sum_{k=1}^{3} \left(B_k \partial_{B_k} + G_k \partial_{G_k} \right) \right). \quad 23)$$

Анзац, который является общим видом галилей-инвариантного решения, построенный с помощью операторов (23), имеет вид

$$\mathbf{B} = e^{-\lambda \mathbf{x}^2/4t}\, \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{G} = e^{-\lambda \mathbf{x}^2/4t}\, \mathbf{g}(t). \tag{24}$$

Подставляя (24) в систему (5), (22), получаем редуцированную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{b}'(t) = -\frac{3}{2t}\mathbf{b} + f\left(\frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{g}^2}{\mathbf{bg}}\right)\mathbf{b},$$

$$\mathbf{g}'(t) = -\frac{3}{2t}\mathbf{g} + p\left(\frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{g}^2}{\mathbf{bg}}\right)\mathbf{g}. \tag{25}$$

В частном случае, когда $f = 0$, $p = 0$, из системы (25) получаем хорошо известное классическое фундаментальное решение уравнения теплопроводности (19). По-видимому, следует выделить в системе (5) случай, когда $F_i = \alpha(\mathbf{B}^2 + \mathbf{G}^2) B_i$, $P_i = \beta(\mathbf{B}^2 + \mathbf{G}^2) G_i$, $\alpha, \beta = \text{const}$, которые, по крайней мере формально, ассоциируются с кубическим нелинейным уравнением Шредингера, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния.

Заключение. Как свидетельствует эксперимент, земная кора является электродинамически активной средой, способной генерировать электромагнитные волны в широком диапазоне частот. Это открывает новые возможности их использования для получения дополнительной информации об ее структуре и динамике. Установлено, что земная кора обладает выраженными нелинейными упругими свойствами, может претерпевать быстрые временные изменения в связи с изменением напряженного состояния и воздействия флюидов. Основное свойство флюидов — это быстрота переноса значительных объемов энергии и способность ее концентрации в относительно локализованных областях пространства. Ясно, что в этом случае на передний план выступают неустойчивые системы и возбудимые среды. Причем в широком понимании геофлюидодинамика охватывает широкий спектр геологических моделей и геофизических полей. Очевидно, неустойчивость таких систем приводит к бифуркации и выбросам энергии и вещества. В таких средах механические процессы всегда сопровождаются (и вызываются) электромагнитными процессами. В частности, бегущие вдоль зон сочленения блоков (вдоль разломов) локализованные неравновесные области, сопровождаемые быстрым изменением порового давления и фильтрационным перетоком порового флюида, раскрытием и закрытием трещин, изменением объема пустот, способствуют механоэлектромагнитным преобразованиям, возникновению магнитогидродинамических и электрокинетических эффектов, а неустойчивость скольжения вдоль разломов ведет к неустойчивости деформации геосреды.

Как известно, общепринятой математической моделью описания подобных активных (возбудимых) сред, демонстрирующих большое разнообразие типов динамического поведения и самоорганизации, являются параболические уравнения или их системы типа "реакция — диффузия", имеющие в общем случае пространственно-локализованные, неподвижные и сложно движущиеся решения [Атауллаханов и др., 2007]. С учетом имеющихся теоретических представлений и полевого эксперимента, в работе [Шуман, 2007] было предложено достаточно общее нелинейное уравнение генерации спонтанных электромагнитных сигналов. При этом специфические возбудимые свойства геосреды с учетом множественности физических механизмов их генерации определяются формой нелинейной функции, интегрально характеризующей (задающей) интенсивность механоэлектромагнитных преобразований. На физическом уровне дается обзор и анализируются особенности этого уравнения и возможные пути и методы его решения. К сожалению, однако, математическая сторона проблемы в данном случае является крайне сложной. Как правило, нелинейные уравнения или их системы имеют более чем один тип решений и на первый план здесь обычно выходят качественные методы исследования. С целью упрощения анализируемой системы в статье предлагается использовать ее симметрию: с помощью метода симметрийной редукции исходная система сводится к системе уравнений с меньшим числом независимых переменных, в частности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, симметрийный метод позволяет свести задачу исследования системы уравнений в частных производных параболического типа к изучению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющей конечномерную динамическую систему. Для этого может быть использован как классический теоретико-групповой подход, так и его обобщение — метод условной инвариантности. При этом если применяется метод точечной симметрии, то редуцированная система содержит столько же уравнений, сколько и исходная система типа "реакции — диффузии". При использовании же симметрии Ли — Бэклунда получается редуцированная система, в которой число уравнений больше, чем число уравнений исходной системы. В то же время следует отметить, что полученная система не будет переопределенной, т. е. число уравнений в редуцированной системе не будет превосходить число неизвестных функций.

Очевидно, однако, что нахождение даже качественного решения (пока не определены величины феноменологических параметров среды) может оказаться слишком сильным требованием, и упор делается на понимание поведения исследуемой системы. Однако неизбежный в данной ситуации скептицизм может быть заметно ослаблен, если принять во внимание описательные возможности анализируемой системы. В этом контексте принципиальное значение приобретают вычислительный эксперимент и полевые наблюдения.

Заметим также, что принцип симметрии можно использовать в качестве правила отбора функций F_i и P_i в системе (5).

Список литературы

Атауллаханов Ф.И., Лобанов Е.С., Морозова О.Л., Шноль Э. Э., Ермакова Е. А., Бутылин А. А., Заикин А. Н. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизации в модели свертывания крови // Успехи физ. наук. — 2007. — **177**, № 1. — С. 87—104.

Богданов Ю. А. К проблематике распространения возмущений в геологических средах: краткий обзор актуальных источников и конструктивные соображения // Геофиз. журн. — 2008. — **30**, № 1. — С. 96—110.

Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика. — Москва: Наука, 1985. — 399 с.

Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — Москва: Наука, 1984. — 360 с.

Гохберг М. Б., Гуфельд И. Л., Гершензон Н. И. Электромагнитные эффекты при разрушении земной коры // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1985. — № 1. — С. 72—87.

Гульельми А. В. Инерционные эффекты в коре и в магнитосфере земли // Физика Земли. — 2008а. — № 1. — С. 50—56.

Гульельми А.В. Нелинейность геоэлектромагнитных волн // Геофиз. исследования. — 2008б. — **9**, № 3. — С. 16—24.

Гульельми А. В. Ультранизкочастотные волны в коре и в магнитосфере Земли // Успехи физ. наук. — 2007. — **177**, № 12. — С. 1257—1276.

Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифукации векторных полей. — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 560 с.

Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С. Кинематика автоволновых структур в возбудимых средах // Успехи физ. наук. — 1991. — **161**, № 8. — С. 45—86.

Дмитриевский А. Н., Володин И. А. Автосолитонные механизмы дегазации Земли // Дегазация Земли: геодинамика, геофлюиды, нефть, газ и их парагенезисы. Матер. Всерос. конф. (22—25 апреля 2008 г., Москва). — Москва: ГЕОС, 2008. — С. 152—154.

Дмитриевский А. Н., Володин И. А. Формирование и динамика энергоактивных зон в геологической среде // Докл. РАН. — 2006. — **411**, № 3. — С. 395—399.

Кисин И.Г. Явление самоорганизации при взаимодействии флюидных потоков и геодинамических процессов в земной коре. Геофизика XXI столетия: 2007 г. // Сб. тр. девятых геофиз. чтений им. В. В. Федынского (1—3 марта 2007 г., Москва). — Тверь: ООО "Изд-во ГЕРС", 2008. — С. 82—88.

Левшенко В.Т. Сверхнизкочастотные электромагнитные сигналы литосферного происхождения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Москва: ОНФЗ РАН, 1995 — 36 с.

Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 399 с.

Олвер П. Приложения группы Ли к дифференциальным уравнениям. — Москва: Мир, 1989. — 639 с.

Садовский М. А. Геофизика и физика взрыва. Избр. тр. / Отв. ред. В.В. Адушкин. — Москва: Наука, 2004. — 440 с.

Сурков В.В. Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах. — Москва: Изд-во Моск. инж.-физ. ин-та, 2000. — 238 с.

Цифра І. М. Симетрійна редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 309—315.

Шуман В.Н. Уравнение генерации спонтанных электромагнитных сигналов в системе литосферных блоков // Геофиз. журн. — 2008. — **30**, № 1. — С. 42—48.

Шуман В.Н. Электромагнитные сигналы литосферного происхождения в современных наземных и дистанционных зондирующих системах // Геофиз. журн. — 2007. — **29**, № 2. — С. 3—16.

Шуман В.Н., Богданов Ю.А. Импульсное электромагнитное излучение литосферы: спорные вопросы теории и полевой эксперимент // Геофиз. журн. — 2008а. — **30**, № 2. — С. 32—41.

Шуман В.Н., Богданов Ю.А. Электромагнитная эмиссия литосферы: пространственная структура и возможные механизмы генерации // Геофиз. журн. — 2008б. — **30**, № 6. — С. 39—50.

Bluman G. W., Cole J. D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. — 1969. — **18**, № 11. — P. 1025—1042.

Fushchich W. I., Tsifra I. M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**. — P. L45—L48.

Svirshchevskii S.R. Lie — Backlund symmetries of linear ODE's and generalized separation of variables in nonlinear equations // Phys. Lett. A. — 1995. — **199**. — P. 344—348.

Tsyfra I. M. Symmetry reduction of nonlinear differential equations // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. — Kyiv. — 2004. — 50. — P. 266—270.

Zhdanov R. Z., Tsyfra I. M., Popovych R. O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — **238**. — P. 101—123.