

## Расчет волновых полей для анизотропных сред с поглощением на основе отражательного метода

© Ю. В. Роганов, В.Ю. Роганов, 2010

Украинский государственный геологоразведочный институт, Киев, Украина  
Поступила 15 февраля 2010 г.

*Представлено членом регколлегии Ю. К. Тяпкиным*

Запропоновано стійкий спосіб обчислення хвильових полів для горизонтально-шаруватих анизотропних середовищ на основі методу відбиття. Для градієнтних середовищ виведено диференціальне рівняння Ріккати, коефіцієнти якого визначають за методом збурень.

A stable method for calculating wave fields in horizontally layered anisotropic media on the basis of the reflectivity method is offered. For gradient media, a differential Riccati equation with coefficients defined by the perturbation method is derived.

**Введение.** Моделирование волновых полей является важным инструментом при построении изображений, интерпретации, инверсии сейсмических данных, проектировании систем наблюдений. Благодаря развивающейся компьютерной технологии становятся доступными различные методы расчета волновых полей для сложных геологических сред, основанные на уравнениях динамической теории упругости. Однако синтез волнового поля на основе плоских гармоник, рассчитываемых матричным способом, по-прежнему широко используется благодаря его уникальным свойствам. Этот метод позволяет учитывать эффекты анизотропии и частотно-зависимого поглощения, наличие свободной поверхности, задавать произвольные типы источников, получать частичные волновые поля, содержащие заданные типы волн. Однако существуют препятствия при непосредственной компьютерной реализации этого метода, вызванные необходимостью вычисления миноров плохообусловленных матриц. При этом требуется находить суммы возрастающих и убывающих экспонент, что приводит к потере точности вычислений [Роганов, 2009].

Были предложены разные методы повышения точности вычислений, такие как использование миноров вместо пропагаторов [Dunkin, 1965], сведение задачи к пятимерному формализму [Молотков, 1984], рекурсивные формулы расчета миноров с учетом различного поведения экспонент в зависимости от горизонтальной медленности [Abo-Zena, 1979].

Наиболее удобным и широко используемым методом стабилизации вычислений является отражательный метод, предложенный К. Фуксом и Г. Мюллером [Fuchs, Muller, 1971]. В дальнейшем этот метод интенсивно развивался Б. Л. Кеннетом [Kennett, 1975; 1979; 1983], Р. Кайндом [Kind, 1976], Г. Фрайером [Fryer, 1981], С. Маликом и Н. Фрайером [Mallick, Frazer; 1987; 1988] и др.

В начальной версии метод был создан для пачки упругих слоев, расположенных между упругими полупространствами с источником и приемником, находящимися над областью рассеяния. Р. Степхен [Stephen, 1977] и Б. Л. Кеннет [Kennett, 1975] модифицировали его для различных типов источников и приемников, расположенных внутри слоев под свободной поверхностью. Учет поглощения в теории был выполнен в работах [Kennett, 1975, Sipkin et al.; 1978, O'Neil, Hill, 1979]. Отражательный метод был применен для расчета волновых полей в анизотропных [Fryer, Frazer, 1984] и градиентных средах [Mallick, Frazer, 1987], для различных систем наблюдений, включая ВСП [Mallick, Frazer, 1987; 1988].

Суть метода состоит в последовательном добавлении слоев к пачке в процессе итеративного расчета матриц рассеяния. Учитывая, что возрастающие компоненты не содержатся в матрицах рассеяния и не возникают в итерационной процедуре, этот способ расчета коэффициентов отражения и преломления является устойчивым для всех частот и горизонтальных медленностей.

Поскольку каждая частота и горизонтальная медленность обрабатываются независимо, алгоритм расчета хорошо распараллеливается, позволяя получить трехкомпонентное 3D-волновое поле без интенсивных временных затрат.

В настоящей статье отражательный рекурсивный метод объединяется с методом возмущений для получения дифференциального уравнения Риккати, которому удовлетворяет матрица рассеяния в градиентной анизотропной среде, а также изучаются свойства различных точечных источников в анизотропных средах.

**Теория.** Рассмотрим точечный источник, находящийся в начале системы координат  $\mathbf{x}=0$ , состоящий из однонаправленной силы  $\mathbf{f}=(f_i)$ , пары сил  $\mathbf{M}_k^A=(M_{ik}^A)$  и двойной пары сил  $\mathbf{M}_k^S=(M_{ik}^S)$ . Выражения  $\mathbf{M}_k^A$ ,  $\mathbf{M}_k^S$  и  $\mathbf{M}_k$  определяют  $k$ -е столбцы соответствующих матриц. Обозначим  $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_k^A + \mathbf{M}_k^S$  полный момент сил. Известно, что матрица пары сил  $M_{ik}^A$  является кососимметрической, а матрица двойной пары сил  $M_{ik}^S$  — симметрической, т. е. выполняются равенства  $M_{ik}^A = -M_{ki}^A$ ,  $M_{ik}^S = M_{ki}^S$ .

Распространение упругих волн, возбужденных этим источником в анизотропной упругой среде, описывается дифференциальными уравнениями

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + f_i \delta(\mathbf{x}) + M_{ik}^A \delta'_{x_k}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{im}}{\partial t} = \lambda_{im,pk} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} + \frac{\partial M_{im}^S}{\partial t} \delta(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}=(u_i)$  — вектор скоростей смещений,  $\tau_k=(\tau_{ik})$  — тензор напряжений,  $\lambda_{ij,mn}$  — тензор упругих постоянных,  $\rho$  — плотность. По повторяющимся индексам  $k, p=1,2,3$  проведено суммирование.

Предполагая, что свойства среды не изменяются вдоль латерали, выполним 3D-преобразование Фурье дифференциальных уравнений (1), (2) по переменным  $(x_1, x_2, t)$ :

$$g(p_1, p_2, \omega) = \iiint g(x_1, x_2, t) e^{j\omega(t-x_1 p_1 - x_2 p_2)} dx_1 dx_2 dt.$$

Обратное Фурье-преобразование описывается соотношением

$$g(x_1, x_2, t) = \iiint \omega^2 g(p_1, p_2, \omega) e^{j\omega(x_1 p_1 + x_2 p_2 - t)} dp_1 dp_2 dt$$

и позволяет синтезировать волновое поле по плоским гармоникам. Учитывая, что в спек-

тральной области производным соответствуют умножения на множители  $\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow j\omega p_1$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow j\omega p_2$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -j\omega$ , получим соотношения

$$-j\omega \rho \mathbf{u} = j\omega p_n \boldsymbol{\tau}_n + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_3}{\partial x_3} + \mathbf{f} \delta(x_3) + j\omega p_n \mathbf{M}_n^A \delta(x_3) + \mathbf{M}_3^A \frac{\partial \delta(x_3)}{\partial x_3}, \quad (3)$$

$$-j\omega \rho \boldsymbol{\tau}_m = j\omega p_n \mathbf{C}_{mn} \mathbf{u} + \mathbf{C}_{m3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} - j\omega \mathbf{M}_m^S \delta(x_3). \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что по повторяющемуся индексу  $n=1,2$  вполне суммирование, а тензор упругих постоянных представляется в виде набора матриц  $(\lambda_{ij,mn}) = \mathbf{C}_{im}[j,n]$ .

Систему уравнений (3)—(4) можно представить в виде матричного дифференциального неоднородного уравнения, если выполнить следующие алгебраические преобразования.

Из уравнения (4) при  $m=3$  найти значение  $\partial \mathbf{u} / \partial x_3$  и подставить его в уравнение (4) при  $m=1, 2$ . Затем полученные значения  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  из уравнения (4) подставить в уравнение (3) и из него найти  $\partial \boldsymbol{\tau}_3 / \partial x_3$ . В результате получается уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx_3} = j\omega \mathbf{F} \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\tau}_3 \end{pmatrix}$  — шестимерный вектор скоростей смещений-напряжений,

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_{33}^{-1} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_{33}^{-1} (p_1 \mathbf{C}_{31} + p_2 \mathbf{C}_{32}),$$

$$\mathbf{B} = \sum_{m,n=1,2} p_m p_n (\mathbf{C}_{m3} \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{3n} - \mathbf{C}_{mn}) + \rho \mathbf{I},$$

$$\mathbf{g} = - \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} + j\omega p_n \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_n \end{pmatrix} + j\omega \mathbf{F} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_3^S \end{pmatrix} \right] \delta(x_3) - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_3^A \end{pmatrix} \delta'_{x_3}(x_3). \quad (6)$$

$\mathbf{I}$  — единичная 3×3-матрица.

Уравнение (5) имеет решение

$$\mathbf{v}(x_3) = \exp(j\omega \mathbf{F}x_3) \int_0^{x_3} \exp(-j\omega \mathbf{F}\zeta) \mathbf{g} d\zeta. \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение  $\mathbf{g}$  из равенства (6), находим, что источник создает разрыв скоростей смещений и напряжений  $\Delta \mathbf{v}$  в плоскости  $x_3=0$ :

$$\Delta \mathbf{v} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} - j\omega p_n \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_n \end{pmatrix} - j\omega \mathbf{F} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Аналогичное соотношение получено в работах [Kennett, 1983; Fryer, Frazer, 1984]. Отметим, что при выводе соотношения (8) учитывалось, что  $\mathbf{M}_n^A + \mathbf{M}_n^S = \mathbf{M}_n$ , а также

$$\int_0^{x_3} \exp(-j\omega \mathbf{F}\zeta) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_3^A \end{pmatrix} \delta'_\zeta(\zeta) d\zeta = j\omega \mathbf{F} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_3^A \end{pmatrix}.$$

Собственными числами матрицы  $\mathbf{F}$  являются вертикальные медленности  $\xi_\alpha$  всех типов плоских волн, распространяющихся вверх и вниз с горизонтальными медленностями  $(p_1, p_2)$ . Собственными векторами этой матрицы являются векторы скоростей смещений-напряжений  $\mathbf{v}_\alpha = (\mathbf{a}_\alpha, \boldsymbol{\tau}_\alpha)^T$ , которые нормируем так, чтобы  $|\mathbf{a}_\alpha| = 1$ . Обозначая символами  $d$  и  $u$  вниз и вверх распространяющиеся волны, а  $qP$ ,  $S1$  и  $S2$  — их типы, объединим векторы  $\mathbf{v}_\alpha$  и вертикальные медленности  $\xi_\alpha$  в матрицы размера  $6 \times 6$ :  $\mathbf{E} = (\mathbf{v}_{qP}^d, \mathbf{v}_{S1}^d, \mathbf{v}_{S2}^d, \mathbf{v}_{qP}^u, \mathbf{v}_{S1}^u, \mathbf{v}_{S2}^u)$ ,

$$\mathbf{L} = \text{diag}(\xi_{qP}^d, \xi_{S1}^d, \xi_{S2}^d, \xi_{qP}^u, \xi_{S1}^u, \xi_{S2}^u). \text{ Пусть } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}_{33}^{-1}$  симметричны, то  $\mathbf{J}\mathbf{F}\mathbf{J} = \mathbf{F}^T$ . Поэтому собственными левыми вектор-строками матрицы  $\mathbf{F}$  являются векторы  $\mathbf{w}_\alpha = \frac{\mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{J}}{2\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha} = \frac{(\boldsymbol{\tau}_\alpha^T, \mathbf{a}_\alpha^T)}{2\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha}$ , где  $\alpha$  — типы всех волн, распространяющихся вверх и вниз. Эти векторы являются строками матрицы  $\mathbf{E}^{-1}$ . Разрыв скоростей смещений и напряжений  $\Delta \mathbf{v}$  эквивалентен разрывам амплитуд нисходящих и восходящих плоских волн  $\Delta \mathbf{s} = (\delta_d - \delta_u)^T = \mathbf{E}^{-1} \Delta \mathbf{v}$ . Восходящая волна типа  $\alpha$  имеет разрыв амплитуды

$$d_\alpha = \mathbf{w}_\alpha \Delta \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{f}}{2\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha} + j\omega p_n \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{M}_n}{2\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha} + j\omega \xi_\alpha \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{M}_3}{2\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha}.$$

Аналогичная формула со знаком минус справедлива для нисходящих волн. При выводе формулы использовалось соотношение  $\mathbf{w}_\alpha \mathbf{F} = \xi_\alpha \mathbf{w}_\alpha$ .

Обозначим  $\mathbf{n}_\alpha$  единичный вектор, направленный вдоль распространения волны типа  $\alpha$ ;  $v_\alpha$  — соответствующую фазовую скорость. По-

скольку  $(p_1, p_2, \xi_\alpha)^T = \frac{1}{v_\alpha} \mathbf{n}_\alpha$ , то

$$d_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{f}}{2\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha} + j\omega \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{M}_n \mathbf{n}_\alpha}{2v_\alpha \mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha}. \quad (9)$$

Для изотропной среды  $\mathbf{a}_\alpha^T \boldsymbol{\tau}_\alpha = \rho v_\alpha^2 \xi_\alpha$  и, следовательно,

$$d_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{f}}{2\rho v_\alpha^2 \xi_\alpha} + j\omega \frac{\mathbf{a}_\alpha^T \mathbf{M}_n \mathbf{n}_\alpha}{2\rho v_\alpha^3 \xi_\alpha}. \quad (10)$$

Формула (10) обычно выводится с использованием теоремы Ламе и свойств функции Грина, справедливых только для изотропной среды [Аки, Ричардс, 1983]. Отметим, что формулы (9), (10) определяют характеристики направленности для точечных источников разных типов в однородной среде и являются множителями при синтезе волнового поля.

Рассмотрим среду, состоящую из полупространства  $i=n+1$ , над которым расположены  $n$  однородных слоев с мощностями  $h_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) и плоскими горизонтальными границами раздела. Сверху над слоями расположено либо полупространство  $i=0$ , либо свободная поверхность (рис. 1). Обозначим плотности и параметры упругости слоев и полупространств соответственно  $\rho_i$  и  $\lambda_{mp,nq}^{(i)}$  ( $i=0, \dots, n+1$ ). Полупространства и слои могут быть анизотропными с наличием поглощения. Предполагается, что слои находятся в жестком контакте. Будем использовать декартовую систему координат с осью  $Ox_3$ , перпендикулярной границам раздела и направленной вниз. Обозначим  $z_i = h_1 + \dots + h_i$  глубину залегания нижней границы  $i$ -го слоя.

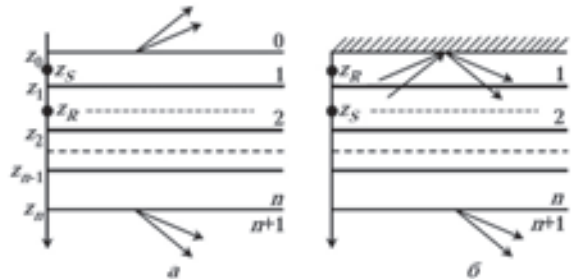


Рис. 1. Краевые условия и обозначения для пачки слоев между упругими полупространствами (а) и свободной поверхностью и упругим полупространством (б).

Если между глубинами  $z_k$  и  $z_m$  нет разрывных источников, векторы скоростей смещений-напряжений  $\mathbf{v}(z)$  являются непрерывными функциями от  $z$  на интервале  $z_m \geq z \geq z_k$  и связаны соотношением  $\mathbf{v}(z_m) = \mathbf{P}(z_m, z_k) \mathbf{v}(z_k)$ , где матрица

$$\mathbf{P}(z_m, z_k) = \exp(j\omega h_m \mathbf{F}_m) \dots \exp(j\omega h_{k+1} \mathbf{F}_{k+1}) \quad (11)$$

является пропагатором пачки слоев,  $\mathbf{F}_i$  — матрица  $i$ -го слоя, входящая в уравнение (5). Пропагатор слоя  $\mathbf{P}(z_i, z_{i-1})$  можно представить в виде

$$\mathbf{P}(z_i, z_{i-1}) = \mathbf{E}_i \Lambda_i \mathbf{E}_i^{-1}. \quad (12)$$

Между вектором амплитуд  $\mathbf{b}(z)$  всех типов волн на глубине  $z$  в  $i$ -м слое и вектором скоростей смещений и напряжений  $\mathbf{v}(z)$  выполняется соотношение  $\mathbf{v}(z) = \mathbf{E}_i \mathbf{b}(z)$ . Поэтому векторы амплитуд всех типов волн на глубинах  $z_k^-$  и  $z_m^+$  связаны равенством  $\mathbf{b}(z_m^+) = \mathbf{Q}(z_m^+, z_k^-) \mathbf{b}(z_k^-)$ , где  $\mathbf{Q}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{E}_{m+1}^{-1} \mathbf{P}(z_m, z_k) \mathbf{E}_k$  — амплитудный пропагатор пачки слоев. Поскольку функция  $\mathbf{b}(z)$  имеет разрывы на глубинах расположения границ  $z_i$ , необходимо различать точки над и под границей, обозначая их верхними индексами — и + соответственно.

Используя равенство (12), получаем

$$\mathbf{Q}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{G}_m \Lambda_m \dots \mathbf{G}_{k+1} \Lambda_{k+1} \mathbf{G}_k, \quad (13)$$

где  $\mathbf{G}_i = \mathbf{E}_{i+1}^{-1} \mathbf{E}_i$  — матрица  $i$ -й границы. Отметим, что матрицы  $\Lambda_i$  — диагональные а  $\mathbf{G}_i$  — частотно-независимые для среды без поглощения. Амплитудный пропагатор  $\mathbf{Q}(z_m^+, z_k^-)$  связывает между собой амплитуды всех типов волн над  $k$ -й под  $m$ -й границами. Аналогично матрица рассеяния  $\mathbf{S}(z_m^+, z_k^-)$  связывает амплитуды волн, направленных к пачке слоев  $z_m \geq z \geq z_k$ , с амплитудами рассеянных этой пачкой волн и направленных во внешнюю сторону.

Разбивая векторы  $\mathbf{b}$  на трехкомпонентные подвекторы, соответствующие нисходящим и восходящим волнам, и представляя матрицы  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(z_m^+, z_k^-)$  и  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(z_m^+, z_k^-)$  в блочном виде, получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_d(z_m^+) \\ \mathbf{b}_u(z_m^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_d(z_k^-) \\ \mathbf{b}_u(z_k^-) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_d(z_m^+) \\ \mathbf{b}_u(z_k^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_d(z_k^-) \\ \mathbf{b}_u(z_m^+) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Заметим, что переход от матрицы  $\mathbf{Q}$  к матрице  $\mathbf{S}$  состоит в перестановке векторов  $\mathbf{b}_u(z_m^+) \leftrightarrow \mathbf{b}_u(z_k^-)$  в равенствах (14)—(15). Поскольку такая перестановка, применяемая дважды, — тождественный оператор, то формулы пересчета  $\mathbf{Q}$  в  $\mathbf{S}$  такие же, как формулы пересчета  $\mathbf{S}$  в  $\mathbf{Q}$ , просто в них необходимо обменять местами  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{S}_{11} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21}, \quad \mathbf{S}_{12} = \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1}, \quad (16)$$

$$\mathbf{S}_{21} = -\mathbf{Q}_{21}^{-1} \mathbf{Q}_{21}, \quad \mathbf{S}_{22} = \mathbf{Q}_{22}^{-1},$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{S}_{21}, \quad \mathbf{Q}_{12} = \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{22}^{-1},$$

$$\mathbf{Q}_{21} = -\mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{S}_{21}, \quad \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{S}_{22}^{-1}. \quad (17)$$

По смыслу матрицы  $\mathbf{S}_{11}$ ,  $\mathbf{S}_{21}$  содержат все коэффициенты преломления и отражения соответственно при инициализации пачки слоев сверху. Поэтому их обозначают  $\mathbf{T}_D$  и  $\mathbf{R}_D$ . Аналогично матрицы  $\mathbf{S}_{12}$  и  $\mathbf{S}_{22}$  содержат коэффициенты отражения и преломления при инициализации пачки слоев снизу. Их обозначают  $\mathbf{R}_U$  и  $\mathbf{T}_U$ .

Основная идея отражательного метода состоит в применении формул для расчета матрицы рассеяния композита двух пачек слоев по матрицам рассеяния каждой из пачек. Вывод этих формул основан на определении амплитудных пропагаторов пачек слоев по формулам (17), перемножении найденных пропагаторов и вычислении матрицы рассеяния по полученному произведению с использованием формулы (16):

$$\mathbf{S}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{S}(z_m^+, z) * \mathbf{S}(z, z_k^-). \quad (18)$$

$$\mathbf{Q}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{Q}(z_m^+, z) \cdot \mathbf{Q}(z, z_k^-).$$

Операция получения матрицы рассеяния композита двух пачек слоев называется звездным произведением [Ursin, 1983]. Из соотношения (18) следует, что коэффициенты преломления и отражения, содержащиеся в матрице рассеяния, можно вычислить по следующим формулам [Kennett, 1975; Kennett, Kerry, 1979]:

$$\mathbf{T}_D = \bar{\bar{\mathbf{T}}}_D (\mathbf{I} - \bar{\bar{\mathbf{R}}}_U \bar{\bar{\mathbf{R}}}_D)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{T}}}_D, \quad (19)$$

$$\mathbf{R}_U = \bar{\bar{\mathbf{R}}}_U + \bar{\bar{\mathbf{T}}}_D \bar{\bar{\mathbf{R}}}_U (\mathbf{I} - \bar{\bar{\mathbf{R}}}_D \bar{\bar{\mathbf{R}}}_U)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{T}}}_U, \quad (20)$$

$$\mathbf{T}_U = \bar{\bar{\mathbf{T}}}_U (\mathbf{I} - \bar{\bar{\mathbf{R}}}_D \bar{\bar{\mathbf{R}}}_U)^{-1} \bar{\bar{\mathbf{T}}}_U, \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_D = \bar{\mathbf{R}}_D + \bar{\mathbf{T}}_U \bar{\mathbf{R}}_D (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_U \bar{\mathbf{R}}_D)^{-1} \bar{\mathbf{T}}_D. \quad (22)$$

В соотношения (19)—(22) входят матрицы, определяемые равенствами

$$\mathbf{S}(z_m^+, z_k^-) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_D & \mathbf{R}_U \\ \mathbf{R}_D & \mathbf{T}_U \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(z_m^+, z) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_D & \bar{\mathbf{R}}_U \\ \bar{\mathbf{R}}_D & \bar{\mathbf{T}}_U \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}(z, z_k^-) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_D & \bar{\mathbf{R}}_U \\ \bar{\mathbf{R}}_D & \bar{\mathbf{T}}_U \end{pmatrix}.$$

В равенствах для  $\mathbf{R}_U$  и  $\mathbf{R}_D$  можно изменить порядок сомножителей, пользуясь формулами

$$\bar{\mathbf{R}}_U (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_D \bar{\mathbf{R}}_U)^{-1} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_U \bar{\mathbf{R}}_D)^{-1} \bar{\mathbf{R}}_U,$$

$$\bar{\mathbf{R}}_D (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_U \bar{\mathbf{R}}_D)^{-1} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_D \bar{\mathbf{R}}_U)^{-1} \bar{\mathbf{R}}_D.$$

При выводе формул (19)—(22) не используется конкретный вид элементов матриц  $\mathbf{Q}$ . Поэтому они справедливы для любого разложения амплитудного пропагатора в произведение. В частности, матрицу рассеяния можно вычислить с использованием разложения (13) по формуле  $\mathbf{S}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{S}(\mathbf{G}_m) * \mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_m) * \dots * \mathbf{S}(\mathbf{G}_{k+1}) * \mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_{k+1}) * \mathbf{S}(\mathbf{G}_k)$ . Аналогично применяется разложение (11) и равенство  $\mathbf{S}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{S}(\mathbf{E}_{m+1}^{-1}) * \mathbf{S}(\mathbf{P}(z_m, z_k)) * \mathbf{S}(\mathbf{E}_k)$ . Экспоненциальная зависимость от частоты присутствует только в матрицах  $\mathbf{\Lambda}_i = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_D, \mathbf{\Lambda}_U)$ , причем для них  $\mathbf{T}_D = \mathbf{\Lambda}_D$ ,  $\mathbf{T}_U = \mathbf{\Lambda}_U^{-1}$ ,  $\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_U = 0$ . Матрицы  $\mathbf{T}_D, \mathbf{T}_U, \mathbf{R}_D$  и  $\mathbf{R}_U$  не содержат экспонент с положительными показателями и композиция с ними по формулам (19)—(22) также не изменяет это свойство. Отсюда следует, что в процессе вычисления коэффициентов матрицы рассеяния не возникают возрастающие экспоненты. Следовательно, процесс вычисления коэффициентов отражения и прохождения на основе отражательного метода является устойчивым для всех медленностей и частот [Kennett, 1983].

Определим волновое поле  $\mathbf{u}(z_r)$ , зарегистрированное приемниками в точке  $z=z_r$ , возбужденное точечным источником, находящимся на глубине  $z=z_s$  в одном из слоев пачки с использованием только матриц рассеяния.

Для пачки слоев, расположенных между упругими полупространствами, выполняются условия излучения  $\mathbf{a}_d(z_0^-) = 0$  и  $\mathbf{a}_u(z_n^+) = 0$ , а волновое поле имеет разрыв амплитуд  $\Delta \mathbf{s} = (\delta_d - \delta_u)^T$  на глубине  $z_s$ . Следовательно, краевая задача описывается уравнением

$$\mathbf{Q}(z_n^+, z_0^-) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_u(z_0^-) \end{pmatrix} +$$

$$+ \mathbf{Q}(z_n^+, z_s) \begin{pmatrix} \delta_d \\ -\delta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_d(z_n^+) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для пачки слоев, расположенных под свободной поверхностью, справедливы соотношения  $\boldsymbol{\tau}_3(z_0^+) = 0$  и  $\mathbf{a}_u(z_n^+) = 0$ . Поэтому краевая задача сводится к уравнению

$$\mathbf{Q}(z_n^+, z_0^+) \tilde{\mathbf{E}}_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u}(z_0^+) \end{pmatrix} +$$

$$+ \mathbf{Q}(z_n^+, z_s) \begin{pmatrix} \delta_d \\ -\delta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_d(z_n^+) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $\tilde{\mathbf{E}}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_d(z_0^+) \\ \mathbf{a}_u(z_0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_3(z_0^+) \\ \mathbf{u}(z_0^+) \end{pmatrix}$ , т. е.  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \\ \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \end{pmatrix}$ ,

и  $\mathbf{E}_{ij}$  ( $ij=1,2$ ) — блоки матрицы собственных векторов слоя под свободной поверхностью.

Из соотношений (23), (24) следует, что краевые задачи для пачки слоев, расположенных между упругими полупространствами, и пачки слоев под свободной поверхностью описываются уравнениями одинакового типа, только в первом случае матрица верхней границы  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_0$ , а во втором случае  $\tilde{\mathbf{G}}_0 = \tilde{\mathbf{E}}_1^{-1}$ .

Из соотношений (23), (24) определяются значения  $\mathbf{a}_u(z_0^-)$  и  $\mathbf{a}_d(z_n^+)$  для задачи с упругими полупространствами либо значения  $\mathbf{u}(z_0^+)$  и  $\mathbf{a}_d(z_n^+)$  для задачи со свободной поверхностью. С использованием полученных данных определяется искомый вектор  $\mathbf{v}(z_r) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(z_r) \\ \boldsymbol{\tau}_3(z_r) \end{pmatrix}$ . Формулы получаются разными и зависят от взаимного расположения источника и приемника.

Если приемник находится под источником, выполняется пересчет вверх вектора амплитуд с глубины  $z = z_n^+$  на глубину  $z = z_r$ :

$$\mathbf{v}(z_r) = \mathbf{E}_r \mathbf{Q}^{-1}(z_n^+, z_r) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_d(z_n^+) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Если приемник находится над источником, выполняется пересчет вниз либо вектора амплитуд с глубины  $z = z_0^-$  на глубину  $z = z_r$  для пачки слоев между упругими полупространствами:

$$\mathbf{v}(z_r) = \mathbf{E}_r \mathbf{Q}(z_r, z_0^-) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_u(z_0^-) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

либо вектора скоростей смещений и напряжений для пачки слоев под свободной поверхностью  $z = z_0^+$ :

$$\mathbf{v}(z_r) = \mathbf{E}_r \mathbf{Q}(z_r, z_0^+) \tilde{\mathbf{E}}_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u}(z_0^+) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

При использовании отражательного метода в формулы (23)—(27), выражаются через соответствующие матрицы рассеяния по формулам (16), а произведения заменяются соотношениями (19)—(22).

Обозначим для краткости глубины  $z_0, z_s, z_r, z_n$  их индексами  $0, s, r, n$  соответственно. После выполнения алгебраических преобразований получаются формулы для вектора скоростей смещений  $\mathbf{u}(z_r)$  волн в пачке слоев между упругими полупространствами, если приемник расположен выше источника:

$$\mathbf{u}(z_r) = (\mathbf{E}_{12}^r + \mathbf{E}_{11}^r \mathbf{R}_u^{r0}) (\mathbf{I} - \mathbf{R}_d^{sr} \mathbf{R}_u^{r0})^{-1} \times \\ \times \mathbf{T}_u^{sr} (\mathbf{I} - \mathbf{R}_d^{ns} \mathbf{R}_u^{s0})^{-1} (\boldsymbol{\delta}_u + \mathbf{R}_d^{ns} \boldsymbol{\delta}_d), \quad (28)$$

и

$$\mathbf{u}(z_r) = (\mathbf{E}_{12}^r \mathbf{R}_d^{nr} + \mathbf{E}_{11}^r) (\mathbf{I} - \mathbf{R}_u^{rs} \mathbf{R}_d^{nr})^{-1} \mathbf{T}_d^{rs} \times \\ \times (\mathbf{I} - \mathbf{R}_u^{s0} \mathbf{R}_d^{ns})^{-1} (\boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{R}_u^{s0} \boldsymbol{\delta}_u), \quad (29)$$

если приемник расположен ниже источника. В формулах (28) и (29) приняты сокращения вида  $\mathbf{R}_d^{nr} = \mathbf{R}_d(z_n^+, z_r^-)$ .

При наличии свободной поверхности формулы (28) и (29) остаются в силе, только матрицы отражений  $\mathbf{R}_u^{s0}$  и  $\mathbf{R}_u^{r0}$  следует вычислять соответственно по пропагаторам  $\mathbf{Q}(z_s^-, z_0^+) \tilde{\mathbf{E}}_1^{-1}$  и  $\mathbf{Q}(z_r^-, z_0^+) \tilde{\mathbf{E}}_1^{-1}$ . Обозначим сверху значком «~» матрицы отражения и преломления для среды с продолженным вверх первым слоем, т. е. без свободной поверхности. Эти матрицы вычисляются по пропагатору  $\mathbf{Q}(z, z_0^+)$ . Обозначим также  $\mathbf{R}_u^{0f} = \mathbf{E}_{11}(z_0^+) \mathbf{E}_{12}^{-1}(z_0^+)$ . Если воспользоваться соотношением (20), можно вывести формулы

$$\mathbf{R}_u^{s0} = \tilde{\mathbf{R}}_u^{s0} + \tilde{\mathbf{T}}_d^{s0} \mathbf{R}_u^{0f} (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_d^{s0} \mathbf{R}_u^{0f})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_u^{s0}, \\ \mathbf{R}_u^{r0} = \tilde{\mathbf{R}}_u^{r0} + \tilde{\mathbf{T}}_d^{r0} \mathbf{R}_u^{0f} (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_d^{r0} \mathbf{R}_u^{0f})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_u^{r0}.$$

Для получения вектора скоростей смещений выполняется обратное преобразование Фурье:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, z_r, t) = \\ = \iiint \omega^2 \mathbf{u}(z_r) \exp(j\omega(x_1 p_1 + x_2 p_2 - t)) dp_1 dp_2 d\omega. \quad (30)$$

Уменьшение искажений, связанных с явлением Гиббса, возникающим при интегрировании в конечной области медленностей  $p_1^2 + p_2^2 < p_{\max}^2$ , выполняется умножением подынтегральной функции на окно  $r(p_1, p_2)$ , полученное билинейным преобразованием АЧХ фильтра Баттерворта [Каппелини и др., 1983]:

$$f_0 = \text{tg} \frac{2\pi}{5}, \quad f = \text{tg} \frac{\pi \sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{2p_{\max}}; \\ r(p_1, p_2) = \frac{1}{1 + (ff_0^{-1})^8},$$

где  $p_{\max} = 1, 2v_{\min}^{-1}$ , а  $v_{\min}$  — наименьшая скорость в слоях.

При расчете волновых полей градиентные зоны необходимо разбивать на тонкие слои. Альтернативным подходом является решение дифференциального уравнения Риккати, которому удовлетворяет матрица рассеяния в градиентной зоне [Abramovici, 1968]. Выведем это уравнение.

Пропагатор  $\mathbf{P}(z, z_0)$  как функция глубины  $z$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\mathbf{P}/dz = j\omega \mathbf{F} \mathbf{P}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(z)$  — матрица слоя. Подставляя в (31) выражение  $\mathbf{P}(z) = \mathbf{E}(z) \mathbf{Q}(z) \mathbf{E}_0^{-1}(z)$ , получаем уравнение для амплитудного пропагатора [Ursin, 1983; Kennett, 1983]:

$$d\mathbf{Q}/dz = \left( j\omega \mathbf{L} - \mathbf{E}^{-1} \frac{d\mathbf{E}}{dz} \right) \mathbf{Q}, \quad (32)$$

где  $\mathbf{F} = \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{E}^{-1}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(z)$  — диагональная матрица содержащая вертикальные медленности;  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)$  — матрица, составленная из собственных вектор-столбцов матрицы  $\mathbf{F}(z)$ .

Разложим столбы матрицы  $d\mathbf{E}/dz$  по столбцам матрицы  $\mathbf{E}$ , т. е. воспользуемся формулой

$$d\mathbf{E}/dz = \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} d\mathbf{E}/dz$  — матрица коэффициентов разложения.

Подставляя соотношение (33) в (32), получаем уравнение для амплитудного пропагатора  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(z, z_1)$  в виде

$$d\mathbf{Q}/dz = (j\omega \mathbf{L} - \mathbf{D}) \mathbf{Q}. \quad (34)$$

Пропагатор  $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(z, z)$  как функция от верхней глубины удовлетворяет аналогичному уравнению с переставленными множителями в правой части:

$$d\mathbf{Q}/dz = -\mathbf{Q}(j\omega\mathbf{L} - \mathbf{D}). \quad (35)$$

Значения элементов матрицы  $\mathbf{D}=(d_{\alpha\beta})$  определяются зависимостью  $\mathbf{F}(z)$ . Чтобы их найти, воспользуемся теорией возмущений, предполагая, что матрица  $\mathbf{F}(z)$  приводится к диагональному виду подобными преобразованиями.

Дифференцируя равенство  $\mathbf{F}\mathbf{v}_\beta=\xi_\beta\mathbf{v}_\beta$  и умножая результат слева на  $\mathbf{w}_\alpha$ , получим

$$\mathbf{w}_\alpha\mathbf{F}'\mathbf{v}_\beta = (\xi_\beta - \xi_\alpha)\mathbf{w}_\alpha\mathbf{v}'_\beta + \xi'_\beta\mathbf{w}_\alpha\mathbf{v}_\beta.$$

Поэтому, если  $\alpha\neq\beta$  и  $\xi_\alpha\neq\xi_\beta$ , то

$$d_{\alpha\beta} = \mathbf{w}_\alpha\mathbf{v}'_\beta = \frac{\mathbf{w}_\alpha\mathbf{F}'\mathbf{v}_\beta}{\xi_\beta - \xi_\alpha}.$$

Если  $\xi_\alpha=\xi_\beta$ , то остается свобода в выборе собственных векторов  $\mathbf{v}_\alpha$  и  $\mathbf{v}_\beta$  матрицы  $\mathbf{F}$ . Их можно выбрать так, что  $d_{\alpha\beta}=0$ , при  $\alpha\neq\beta$ . Значение  $d_{\alpha\alpha}$  определяется условием нормировки  $|\mathbf{a}_\alpha(z)|=1$ , из которого следует

$$d_{\alpha\alpha} = 1 - \sum_{\beta\neq\alpha} d_{\beta\alpha} (\mathbf{a}_\beta^T \mathbf{a}_\alpha).$$

Уравнения (34) и (35) являются частными случаями уравнения

$$d\mathbf{Q}/dz = \mathbf{M}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{N}, \quad (36)$$

где  $\mathbf{M}=j\omega\mathbf{L}-\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{N}=0$ , либо  $\mathbf{M}=0$ ,  $\mathbf{N}=j\omega\mathbf{L}-\mathbf{D}$ .

Пусть  $\mathbf{M}=(\mathbf{M}_{ij})$ ,  $\mathbf{N}=(\mathbf{N}_{ij})$  — представление матриц в блочном виде и  $\mathbf{S}=(\mathbf{S}_{ij})$  — матрица рассеяния, соответствующая пропагатору  $\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}_{ij})$ . Покажем, что матрица  $\mathbf{S}$  удовлетворяет матричному уравнению Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dz} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S} - \\ &- \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} - \mathbf{S} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (37)$$

Для этого рассмотрим матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & 0 \\ -\mathbf{S}_{21} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{12} \\ 0 & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_4 &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя равенства (16) и (17), несложно показать, что

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{Q} = 0, \quad (38)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_3, \quad (39)$$

$$\mathbf{F}_4\mathbf{F}_5 = \mathbf{I}. \quad (40)$$

Подстановкой можно также проверить, что

$$\frac{d\mathbf{S}}{dz}\mathbf{F}_5 = -\frac{d\mathbf{F}_1}{dz} - \frac{d\mathbf{F}_2}{dz}\mathbf{Q}. \quad (41)$$

Дифференцируя равенство (38) и подставляя в результат правую часть равенства (41), находим

$$\frac{d\mathbf{S}}{dz}\mathbf{F}_5 = \mathbf{F}_2\frac{d\mathbf{Q}}{dz}, \text{ т. е. } \frac{d\mathbf{S}}{dz} = \mathbf{F}_2\frac{d\mathbf{Q}}{dz}\mathbf{F}_4.$$

Умножая равенство (36) слева на  $\mathbf{F}_2$  и справа на  $\mathbf{F}_4$ , получаем

$$d\mathbf{S}/dz = \mathbf{F}_2\mathbf{M}\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1\mathbf{N}\mathbf{F}_4.$$

Расписывая  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  в блочном виде, получаем соотношение (37).

Иногда рассматривают матрицу рассеяния  $\mathbf{R}$  с блочным видом [Ursin, 1983]:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \\ \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}.$$

Уравнение Риккати для матрицы  $\mathbf{R}$  получается, если умножить соотношение (37) слева и справа на матрицу  $\mathbf{J}$  и учесть, что  $\mathbf{J}^2=\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dz} &= \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{21} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{22} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{11} \end{pmatrix} \mathbf{R} - \\ &- \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} - \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{12} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{21} \end{pmatrix} \mathbf{R}. \end{aligned}$$

В таком виде уравнение Риккати представлено в статье [Ursin, 1983] для изотропной слоистой среды. В статье [Norris, Shuvalov, 2010] выведено уравнение Риккати, которому удовлетворяет двухточечная импедансная матрица  $\mathbf{Z}(z_m, z_k)$ . Блоки этой матрицы можно получить по формулам (16), примененным к пропагатору  $\mathbf{P}(z, z_0)$ . На основе импедансной матрицы легко получить матрицу рассеяния, выполняя звездные умножения  $\mathbf{S}(z_m^+, z_k^-) = \mathbf{S}(\mathbf{E}_{m+1}^{-1}) * \mathbf{Z}(z_m, z_k) * \mathbf{S}(\mathbf{E}_k)$ .

**Численный пример.** Применение отражательного метода для формирования волнового поля продемонстрируем на примере однородной среды с вертикальной системой трещин,

плоскости которой перпендикулярны оси  $OX$ . Свойства вмещающей среды определяются скоростью продольных волн  $V_P=2800$  м/с, по-

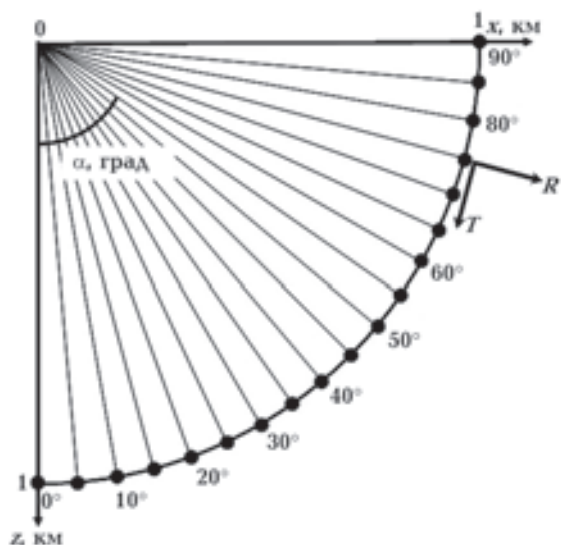


Рис. 2. Схема наблюдений. Источник расположен в начале системы координат, приемники находятся на расстоянии 1 км от источника в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскостям трещиноватости ( $R, T$  — направления регистрируемых колебаний вдоль радиуса окружности и вдоль касательной соответственно).

перечных волн  $V_{SV}=1300$  м/с и плотностью  $\rho=1200$  кг/м<sup>3</sup>. Трещиноватость моделируется в двух вариантах: без поглощения и с поглощением. В последнем случае она задается комплексными значениями ослабленностей  $\Delta_N$  и  $\Delta_T$  [Chichinina et al., 2009].

Схема наблюдений состоит из одного источника в начале системы координат и 19 приемников, расположенных вдоль дуги окружности на расстоянии 1 км от источника в вертикальной плоскости, содержащей ось  $OX$  (рис. 2). Углы  $\alpha$  между направлениями источник-приемник и вертикалью изменяются в пределах от 0 до 90° с шагом 5°. На рис. 3 изображены рассчитанные отражательным методом сейсмограммы радиальных ( $R$ ) и трансверсальных ( $T$ ) компонент с источником, генерирующим  $qP$ -волну с сигналом Риккера частотой  $f=30$  Гц. Расчет был выполнен для среды с трещиноватостью без поглощения ( $\Delta_N=0,6; \Delta_T=0,53$ ) и для среды с поглощающей трещиноватостью ( $\Delta_N=0,6+i0,054; \Delta_T=0,53+i0,004$ ). Для данной модели среды была рассчитана и выведена в прямоугольной системе координат (рис. 4,  $a$  — непрерывная линия) индикатриса групповых скоростей. Групповые скорости практически не зависят от наличия поглощения в трещиноватости. По

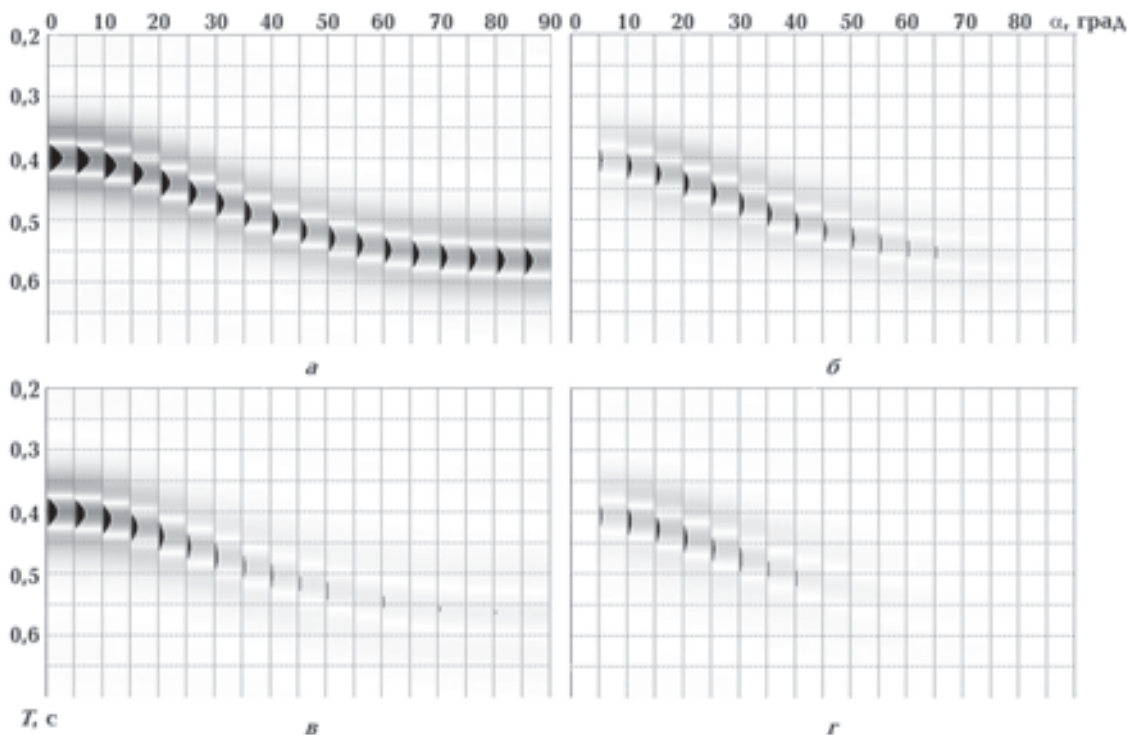


Рис. 3. Сейсмограммы  $R$ - и  $T$ -компонент в зависимости от угла с вертикалью для трещиноватой среды без поглощения ( $a, б$ ) и с поглощением ( $в, г$ ).



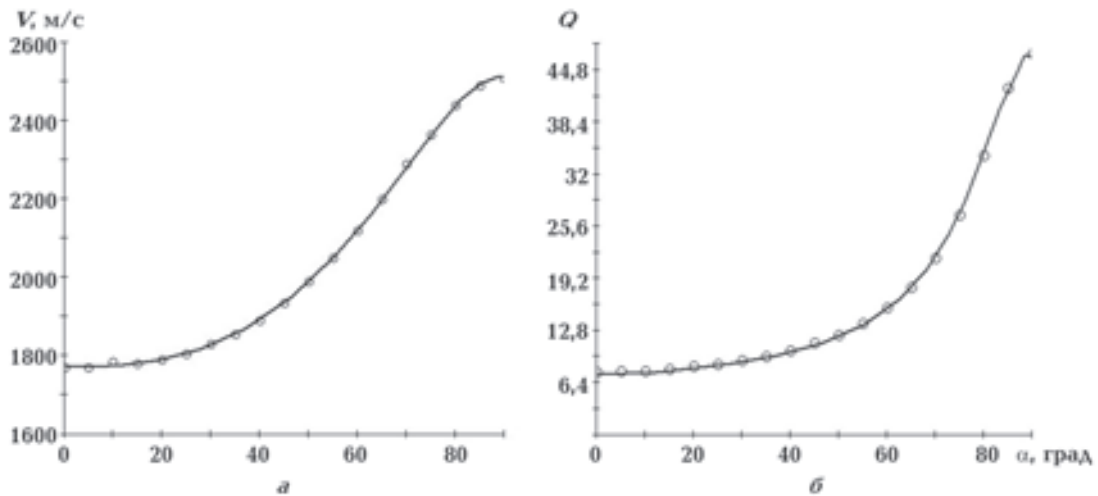


Рис. 4. Значения групповых скоростей  $V$  ( $a$  — кружочки) и добротностей  $Q$  ( $b$  — кружочки), вычисленные по синтезированному волновому полю, и теоретические кривые (непрерывные линии).

временам зарегистрированных сигналов также были найдены групповые скорости и нанесены на построенный график кружочками (см. рис. 4,  $a$ ). Из рисунка видно, что кинематические свойства сформированного волнового поля хорошо соответствуют теоретическим.

Были рассчитаны теоретические значения добротностей  $Q$  в зависимости от группового угла  $\alpha$  и представлены непрерывной кривой на рис. 4,  $b$ . Добротности также были вычислены на основе сравнения амплитуд и спектров зарегистрированных сигналов, распространяющихся в средах с поглощением и без поглощения. Результаты нанесены на график кружочками (см. рис. 4,  $b$ ).

Из сопоставления полученных значений  $Q$  с теоретическими значениями видно, что отражательный метод хорошо моделирует эффект

анизотропного поглощения в трещиноватых средах.

**Выводы.** 1. Разработан эффективный и устойчивый способ формирования 3D—3C волновых полей для многослойной анизотропной горизонтально-слоистой среды на основе отражательного рекурсивного метода. Метод позволяет учитывать различные типы источников, свободную поверхность, интерференционные явления, связанные с тонкослоистостью, наличие разно наклоненных систем трещин с поглощением.

2. Для градиентной среды выведено матричное уравнение Риккати, коэффициенты которого определяются по методу возмущений.

3. Результаты продемонстрированы на примере однородной среды с наличием трещиноватости с поглощением.

### Список литературы

- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Том 1. — Москва: Мир, 1983. — 519 с.
- Каппелини В., Константинович А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. — Москва: Энергоатомиздат, 1983. — 360 с.
- Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. — Ленинград: Наука, 1984. — 201 с.
- Роганов В. Ю. Вычисление волновых полей для анизотропных сред с использованием метода Хаскелла—Томсона // Геофиз. журн. — 2009. — 31, № 3. — С. 63—73.
- Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values // Geophys. J. Roy Astronom. Soc. — 1979. — 58, № 1. — P. 91—105.
- Abramovici F. Diagnostic diagrams and transfer functions for oceanic wave guides // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1968. — 58. — P. 427—456.
- Chichinina T., Obolentseva I., Gik L., Bobrov B., Ronquillo-Jarillo G. Attenuation anisotropy in the linear-slip model: Interpretation of physical modeling data // Geophysics. — 2009. — 74, № 5. — P. WB165—WB176.
- Dunkin I. W. Computation of modal solutions in layered

- elastic media at high frequencies // Bull. Seismol. Soc. Amer. — 1965. — **55**, № 2. — P. 335—358.
- Fuchs K., Muller G.* Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1971. — **23**. — P. 417—433.
- Kennett B. L. N.* Reflections, rays and reverberations // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1974. — **64**. — P. 1685—1696.
- Kennett B. L. N.* The effect of attenuation of seismograms // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1975. — **65**. — P. 1643—1651.
- Kennett B. L. N.* Theoretical reflection seismograms for an elastic medium // Geophys. Prosp. — 1979. — **27**, № 2. — P. 301—321.
- Kennett B. L. N., Kerry N. J.* Seismic waves in stratified half-space // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1979. — **57**, № 3. — P. 557—583.
- Kennett B. L. N.* Seismic wave propagation in stratified media. — New York: Cambridge University Press, 1983. — 200 p.
- Kind R.* Computation of reflection coefficients for layered media // J. Geophys. — 1976. — **42**. — P. 191—200.
- Fryer G. J.* A slowness approach to the reflectivity method of seismogram synthesis // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1981. — **63**. — P. 747—758.
- Fryer G. J., Frazer L. N.* Seismic waves in stratified anisotropic media // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1984. — **78**. — P. 691—710.
- Mallick S., Frazer L. N.* Practical aspects of reflectivity modeling // Geophysics. — 1987. — **52**, № 10. — P. 1355—1364.
- Mallick S., Frazer L. N.* Rapid computation of multioffset vertical seismic profile synthetic seismograms for layered media // Geophysics. — 1988. — **53**, № 4. — P. 479—491.
- Norris A. N., Shuvalov A. L.* Wave impedance matrices for cylindrically anisotropic radially inhomogeneous elastic solids // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 2010. — **63**, № 3. — P. 1—39.
- Sipkin S. A., Orcutt J. A., Jordan T. H.* An examination of ScS travel times with causal Q reflectivity algorithm for SH polarized waves // Trans. Am. Geoph. Union — 1978. — **59**. — P. 324.
- Stephen R. A.* Synthetic seismograms for the case of the receiver within the reflectivity zone // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1977. — **51**. — P. 169—181.
- O'Neil M. E., Hill D. P.* Causal absorption: its effect on synthetic seismograms computed by the reflectivity method // Bull. Seis. Soc. Am. — 1979. — **69**. — P. 17—26.
- Ursin B.* Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media // Geophysics. — 1983. — **48**, № 8. — P. 1063—1081.