УДК 530.3+550.344

Про деякі особливості структури узагальненого реологічного тіла. 1

© *Є. М. Бицань, 2014*

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла 13 лютого 2013 р.

Представлено членом редколегії В. М. Шуманом

Дан анализ структуры обобщенного реологического тела (РТ) с произвольным числом элементов. Показано, что РТ определенного ранга разделяются на два типа — квазиупругие и квазивязкие, каждый из которых имеет два рода в зависимости от порядка коэффициентов при напряжении и деформации в реологическом уравнении обобщенного РТ. Исследованы особенности присоединения упругого или вязкого элемента к невырожденному РТ. Доказано, что необходимое и достаточное условие невырожденности построенного РТ — выполнение условия его баланса $\delta = \delta_e + \delta_c$, где δ_e — разность между количеством упругих и вязких элементов, δ_c — разность между числом параллельных и последовательных присоединений в РТ. Доказано, что ранг невырожденного РТ определяется количеством вязких элементов в нем.

Ключевые слова: реологическое тело, реологическое уравнение, деформация, напряжение, релаксация, ранг, неупругость, невырожденность, волновое поле, физическая среда.

On some peculiarities of generalized rheological body structure. 1

© *Ye. M. Bytsan, 2014*

The structure of generalized rheological bodies (RB) with arbitrary number of elements was analyzed. It was shown that RBs of certain order are subdivided into quasielastic and quasiviscous, each having two classes, depending on whether coefficients at stress and deformation in rheological equation have the same order. Peculiarities of connection between elastic or viscous elements and non-degenerated RB were also considered. It was proven that fulfilling the condition of RB balance $\delta = \delta_e + \delta_c$, is a necessary and sufficient condition of nondegenerated RB, where δ_e — difference between the number of elastic and viscous elements, and δ_c — difference between the number of parallel and sequential connections in the RB. It was shown that the order of nondegenerated RB is determined by the number of viscous elements it contains.

Key words: rheological body, rheological equation, deformation, stress, relaxation, rank, inelasticity, nondegeneracy, wave field, physical medium.

Коливальні процеси у фізичних середовищах є згасаючими через непружність останніх, тобто не задовольняють закону Гука. Це пов'язане в основному з внутрішньою мікроструктурою середовищ — зернистістю, наявністю мікротріщин, теплопровідністю, атомною дифузією тощо [Рейнер, 1965; Бленд, 1965; Савін, Рущицький, 1975 та ін.]. Природу непружності досліджувало багато авторів [Зинер, 1954; Сорокин, 1960 та ін.]. Проте предмет дослідження настільки складний, що досі немає задовільної теорії, яка б пояснювала непружні процеси в гірських породах. Хвильові процеси у непружних середовищах розглядають у механіці, електродинаміці, оптиці, радіотехніці тощо. Основна складність полягає у з'ясуванні причин, що викликають втрати хвильової енергії. Єдиної точки зору з цього питання немає. Одне із підтверджень цього — велика кількість термінів, які використовують дослідники зазначеної проблеми [Сорокин, 1960; Писаренко, 1970 та ін.]: внутрішнє тертя, внутрішній непружний опір, внутрішнє поглинання енергії, внутрішнє розсіювання енергії, внутрішнє згасання, внутрішня в'язкість, пружний гістерезис, демпфірування тощо. Найчастіше вживають термін "внутрішнє тертя", під яким розуміють сукупність причин, що викликають незворотні втрати механічної енергії під час деформації в цілому і хвильових процесах зокрема. Енергетичні втрати, зумовлені непружністю, проявляються передусім у згасанні амплітуд хвиль і зсуві фаз між напруженням і деформацією. Коефіцієнт згасання сейсмічних хвиль аналітично залежить від механічних параметрів фізичних середовищ, що дає можливість розв'язувати обернену задачу геофізики для визначення останніх.

Непружність фізичних порід ураховують за допомогою математичних моделей не зовсім пружних деформованих середовищ, які включають у розрахункову схему, поряд із пружними елементами, в'язкі і пластичні, сполучені між собою послідовно або паралельно в різних комбінаціях [Рейнер, 1965; Савін, Рущицький, 1975 та ін.]. Ці моделі апроксимують процес поглинання механічної енергії при поширені пружних хвиль у непружних середовищах і є досить зручним і ефективним апаратом для дослідження непружних особливостей фізичних середовищ. Основна перевага такого підходу в тому, що ці моделі є лінійними і досить зручними для аналізу. Питання про відповідність теоретичних (модельних) результатів з експериментальними (сейсмічними) даними залишається дискусійним.

У статті розглянуто реологічні тіла (РТ), які складаються з пружних (ПЕ) та в'язких (ВЕ) елементів, з'єднаних між собою паралельно або послідовно в різних комбінаціях. Зв'язок між напруженням і деформацією визначається за допомогою реологічного рівняння (РР), яке є узагальненням закону Гука:

$$P\sigma = Q\varepsilon, \tag{1}$$

де $P = \sum_{i=0}^{m} a_i D^i$, $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i$ — лінійні диференціальні вирази (ЛДВ) зі сталими додатними коефіцієнтами, які виражено через механічні параметри РТ; $D = \partial / \partial t$; n — ранг РТ. Зв'язок між константами m і n описано нижче.

Коефіцієнт a_0 у ЛДВ P додатний, а тому рівняння (1) при $b_0 \neq 0$ можна записати у стандартній формі [Зинер, 1954]:

$$\left(1 + c_1 D + \ldots + c_m D^m\right)\sigma = \frac{b_0}{a_0}\left(1 + d_1 D + \ldots + d_n D^n\right)\varepsilon, \tag{2}$$

або формально

$$\sigma = E\,\frac{1 + d_1 D + \ldots + d_n D^n}{1 + c_1 D + \ldots + c_m D^m}\,\varepsilon = M_H\,\varepsilon, \tag{3}$$

де $d_i = b_i / b_0$; $c_i = a_i / a_0$; M_H — комплексний квазіпружний, $E = b_0 / a_0$ — релаксуючий пружний модулі.

РТ, які описують рівняннями (2), (3), назвемо квазіпружними РТ (КПРТ), тому що їх РР подібні до РР пружного елемента.

За постійного навантаження протягом тривалого часу швидкості деформації і напруження прямують до нуля, і в граничному випадку при $D = 0$ жорсткість РТ (тривалий модуль) визначатимемо за формулою

$$M_H(0) = E.$$

За великих швидкостей деформацій і напружень у граничному випадку при $D = \infty$ отримуємо миттєвий модуль

$$M_H(\infty) = H = \frac{E d_n D^n}{c_m D^m},$$

який визначаємо залежно від порядків ЛДВ P і Q:

$$H = E d_n / c_m \quad \text{при} \quad m = n,$$

$$H = 0 \quad \text{при} \quad m > n,$$

$$H = \infty \quad \text{при} \quad m < n.$$

Далі буде доведено, що іншого варіанта не може бути.

Якщо стала $b_0 = 0$, то рівняння (1) зводиться до виразу

$$\left(1 + c_1 D + \ldots + c_m D^m\right)\sigma = \frac{b_1}{a_0} D\left(1 + e_1 D + \ldots + e_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon, \tag{2a}$$

або формально

$$\sigma = HD \frac{1 + e_1 D + ... + e_{n-1} D^{n-1}}{1 + c_1 D + ... + c_m D^m} \varepsilon = M_N D\varepsilon, \quad (4)$$

де $e_i = b_{i+1} / b_1$; M_N — комплексний квазів'язкий; $H = b_1 / a_0$ — релаксуючий в'язкий модуль.

РТ, які описано рівняннями (2а), (4), назвемо квазів'язкими РТ (КВРТ), тому що їх РР подібні до РР в'язкого елемента.

Проаналізуємо граничні значення для комплексного квазів'язкого модуля. В разі дії постійного навантаження за малих швидкостей деформацій і напружень у граничному випадку при $D = 0$ для тривалого в'язкого модуля з формули (4) випливає $M_H(0) = H$, а для миттєвого квазів'язкого модуля за великих швидкостей деформацій і напружень у граничному випадку при $D = \infty$ одержимо вирази

$$M_H(\infty) = H = \frac{He_{n-1} D^{n-1}}{c_m D^m} \text{ при } m = n-1,$$

$$M_N(\infty) = \infty \text{ при } m < n-1,$$

$$M_N(\infty) = 0 \text{ при } m > n-1.$$

Далі доведемо, що існують лише перші два випадки.

Розглянемо приєднання двох РТ, РР яких мають вигляд

$$P_1 \sigma_1 = Q_1 \varepsilon_1, \quad P_2 \sigma_2 = Q_2 \varepsilon_2. \quad (5)$$

За паралельного приєднання деформації і напруження задовольнятимуть такому РР:

$$P_1 P_2 \sigma = (P_1 Q_2 + P_2 Q_1) \varepsilon, \quad (6)$$

за послідовного приєднання РР набудуть вигляду

$$(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) \sigma = Q_1 Q_2 \varepsilon. \quad (7)$$

Рівняння (6), (7) є основою для дослідження властивостей РТ з довільним числом елементів. РТ можна утворювати рекурентним способом, приєднуючи до певного РТ окремі елементи або РТ. За допомогою рівнянь (6), (7) можна проаналізувати процес утворення нових РТ і виявити їхні особливості.

Структура РТ визначається характером їх РР: порядками ЛДВ P і Q та особливістю ЛДВ P і Q. Ці характеристики залежать від кількості елементів та з'єднань певних типів і від співвідношення між ними. Особливості РТ можна встановити, дослідивши процес його утворення за допомогою співвідношень (6), (7).

Проаналізуємо РТ, які вивчає реологія. Випишемо в таблицю інформацію про них, додавши до них для симетрії ще кілька п'ятиелементних РТ (таблиця).

Аналізуючи дані таблиці, можна помітити, що рангу $k = 1$, 2 РТ відповідають чотири РР, які запишемо в узагальненому вигляді: N_{2k-1}, N_{2k}, H_{2k} і H_{2k+1}. Вони поділяють РТ певного рангу k на два типи — квазіпружні (H_{2k} і H_{2k+1}), що мають адитивну константу (АК) в ЛДВ Q, і квазів'язкі (N_{2k-1} і N_{2k}), в яких ЛДВ Q без АК. Кожен з цих типів поділяється на два роди залежно від того, чи мають ЛДВ Q та P однаковий порядок — N_{2k-1} і H_{2k} (I рід), або порядок ЛДВ P на одиницю менший від порядка ЛДВ Q — N_{2k} і H_{2k+1} (II рід). Тут введені такі позначення: N — квазів'язкі, H — квазіпружні РТ; k — їхній ранг, показник внизу, який назвемо індексом РТ, пов'язаний з його рангом і родом, і для розглянутих вище РТ позначає кількість елементів у них. Таку особливість РТ можна вважати одною з ознак невиродженості РТ. Детальніше про виродженість мова буде йти далі.

Зауважимо, що узагальнена форма запису РР досить зручна для користування, оскільки за нею можна з'ясувати всю інформацію про РТ: виродженість — кількість елементів у РТ співпадає з його індексом або ні; тип — має ЛДВ Q АК (КПРТ) або ні (КВРТ); рід — мають ЛДВ Q та P однаковий порядок (N_{2k-1} і H_{2k} — I рід або порядок ЛДВ P на одиницю менше від порядка ЛДВ Q (N_{2k} і H_{2k+1}) — II рід.

Найпростіші випадки виродженості — результат об'єднання однотипних реологічних елементів. Дещо складніший вироджений випадок — паралельне приєднання пружного або в'язкого елемента до РТ Фойгта. Зазначимо, що невиродженість РТ залежить від структури РТ — доданків, і детальніше розглядатиметься нижче.

Переконаємося, що вказані особливості РТ рангу $k = 1, 2$ існують і для РТ довільного рангу.

Для цього доведемо методом математичної індукції таку теорему.

Теорема 1. Для довільного натурального числа n існують чотири різні види РР РТ n-го рангу, за допомогою яких їх поділяють на два типи — квазіпружні та квазів'язкі, кожен з яких має два роди в залежності від того, мають ЛДВ

Q і P однаковий порядок або ні. РР для цих РТ запишуться у вигляді

$$\left(1 + a_1 D + \ldots + a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma =$$

$$= H_n^R D\left(1 + b_1 D + \ldots + b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon \quad \left(N_{2n-1}\right),$$

$$\left(1 + a_1 D + \ldots + a_n D^n\right)\sigma =$$

$$= H_n^R D\left(1 + b_1 D + \ldots + b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon \quad \left(N_{2n}\right),$$

$$\left(1 + a_1 D + \ldots + a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma =$$

$$= E_n^R \left(1 + b_1 D + \ldots + b_n D^n\right)\varepsilon \quad \left(H_{2n}\right),$$

$$\left(1 + a_1 D + \ldots + a_n D^n\right)\sigma =$$

$$= E_n^R \left(1 + b_1 D + \ldots + b_n D^n\right)\varepsilon \quad \left(H_{2n+1}\right), \qquad (8)$$

де E^R і H^R — релаксуючі пружні та в'язкі модулі відповідно.

1. Це твердження справедливе при $n = 1$: це дві сукупності КВРТ — ВЕ і РТ Максвелла, РР яких в узагальненому вигляді записують так: N_1, N_2 і дві сукупності КПРТ — РТ Фойгта і РТ Кельвіна та Пойнтінга — Томпсона, РР яких записують в узагальненому вигляді як H_2 і H_3 відповідно.
2. Якщо при $n = k$ маємо чотири різні за структурою РР для РТ рангу k, які у стандартній формі записуються у вигляді

$$\left(1 + a_1 D + \ldots + a_{k-1} D^{k-1}\right)\sigma =$$

$$= H_k^R D\left(1 + b_1 D + \ldots + b_{k-1} D^{k-1}\right)\varepsilon \quad \left(N_{2k-1}\right),$$

Список реологічних тіл (реологічне древо)

Число елементів: Усього	Число елементів: У тому числі: пружних	Число елементів: У тому числі: в'язких	δ_e	Ранг	Узагальнений запис	Ім'я	Кількість приєднань: Усього	Кількість приєднань: У тому числі: пара-лельних	Кількість приєднань: У тому числі: послі-довних	δ_c	Число реалізацій	δ	P	Q	Тип	Рід
1	1	0	1	0	H_1	H	0	0	0	0	1	1	1	E	КП	I
1	0	1	1	1	N_1	N	0	0	0	0	1	1	1	$D\eta$	КВ	II
2	1	1	0	1	N_2	M	1	0	1	1	1	1	$1 + D\tau$	$D\eta$	КВ	I
2	1	1	0	1	H_2	V	1	1	0	1	1	1	1	$E\,(1 + D\tau)$	КП	II
3	2	1	1	1	H_3	K, PT	2	1	1	0	2	1	$1 + D\tau$	$E\,(1 + D\tau)$	КП	I
3	1	2	1	2	N_3	L, J	2	1	1	0	2	1	$1 + D\tau$	$\eta D\,(1 + D\tau)$	КВ	II
4	2	2	0	2	N_4	Bu	3	1	2	1	4	1	$\sum_{k=0}^{2} a_k D^k$	$\eta D\,(1 + D\tau)$	КВ	I
4	2	2	0	2	H_4	A	3	2	1	1	4	1	$1 + D\tau$	$E \sum_{k=0}^{2} b_k D^k$	КП	II
5	3	2	1	2	H_5	—	4	2	2	0	8	1	$\sum_{k=0}^{2} a_k D^k$	$E \sum_{k=0}^{2} b_k D^k$	КП	I
5	2	3	1	3	N_5	—	4	2	2	0	8	1	$\sum_{k=0}^{2} a_k D^k$	$\eta D \sum_{k=0}^{2} b_k D^k$	КВ	II

Примітки: n_H — число пружних, а n_N — число в'язких елементів, $\delta_e = \left| n_N - n_H \right|$ — різниця між кількістю пружних і в'язких елементів; n_I й n_- — число паралельних і послідовних приєднань в РТ відповідно, $\delta_c = \left| n_I - n_- \right|$ — різниця між ними; E й H — релаксуючі пружні та в'язкі модулі; $\delta = \delta_e + \delta_c$ — баланс РТ; τ — час релаксації напруження за постійної деформації; ν — час релаксації деформації за постійного напруження.

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_kD^k\right)\sigma=$$

$$=H_k^R D\left(1+b_1D+\ldots+b_{k-1}D^{k-1}\right)\varepsilon \quad \left(N_{2k}\right),$$

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_{k-1}D^{k-1}\right)\sigma=$$

$$=E_k^R\left(1+b_1D+\ldots+b_kD^k\right)\varepsilon \quad \left(H_{2k}\right),$$

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_kD^k\right)\sigma=$$

$$=E_k^R\left(1+b_1D+\ldots+b_kD^k\right)\varepsilon \quad \left(H_{2k+1}\right), \quad (9)$$

за допомогою яких РТ k-го рангу поділено на чотири сукупності: $R_1^{(k)}=\{N_{2k-1}\}$, $R_2^{(k)}=\{N_{2k}\}$, $R_3^{(k)}=\{H_{2k}\}$, $R_4^{(k)}=\{H_{2k+1}\}$, то при $n=k+1$ можна отримати чотири різні за структурою РР РТ $(k+1)$-го рангу, які запишуться у стандартній формі

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_kD^k\right)\sigma= \quad (10)$$

$$=H_{k+1}^R D\left(1+b_1D+\ldots+b_kD^k\right)\varepsilon \quad \left(N_{2k+1}\right),$$

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_{k+1}D^{k+1}\right)\sigma=$$

$$=H_{k+1}^R D\left(1+b_1D+\ldots+b_kD^k\right)\varepsilon \quad \left(N_{2(k+1)}\right),$$

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_kD^k\right)\sigma=$$

$$=E_{k+1}^R\left(1+b_1D+\ldots+b_{k+1}D^{k+1}\right)\varepsilon \quad \left(H_{2(k+1)}\right),$$

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_{k+1}D^{k+1}\right)\sigma=$$

$$=E_{k+1}^R\left(1+b_1D+\ldots+b_{k+1}D^{k+1}\right)\varepsilon \quad \left(H_{2k+3}\right),$$

і які поділяють РР $(k+1)$-го рангу на чотири сукупності РТ: $R_1^{(k+1)}=\{N_{2k+1}\}$, $R_2^{(k+1)}=$ $=\{N_{2(k+1)}\}$, $R_3^{(k+1)}=\{H_{2(k+1)}\}$, $R_4^{(k+1)}=$ $=\{H_{2k+3}\}$.

РТ $(k+1)$-го рангу утворюють, об'єднавши РТ меншого рангу за допомогою формул (6), (7) різноманітними способами. Як приклад одного з таких варіантів розглянемо паралельне приєднання ВЕ до довільного елемента з $R_2^{(k)}$. У підсумку отримаємо нові РТ, а для коефіцієнтів їх РР за допомогою формул (6) запишемо

$$P=P_2^{(k)}\cdot 1=P^{(k)},$$

$$Q=H_k^R D\,Q_2^{(k-1)}+P_2^{(k)}\cdot\eta D=$$

$$=\left(H_k^R+\eta\right)D\left(Q_2^{(k-1)}H_k^R\Big/\left(H_k^R+\eta\right)+\right.$$

$$\left.+P_2^{(k)}\cdot\eta\Big/\left(H_k^R+\eta\right)\right)=\left(H_k^R+\eta\right)D\,Q^{(k)}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнт при напруженні є поліномом k-го порядку відносно D, а коефіцієнт при деформації — поліномом $(k+1)$-го порядку відносно D без АК. У стандартній формі ці рівняння мають вигляд

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_kD^k\right)\sigma=$$

$$=H_{k+1}^R D\left(1+b_1D+\ldots+b_kD^k\right)\varepsilon. \quad (11а)$$

Запишемо в узагальненій формі утворені РТ:

$$N_{2(k+1)-1}=N_{2k+1}.$$

Сукупність усіх РТ, РР яких задовольняють цьому рівнянню, запишемо як

$$R_1^{(k+1)}=\left\{N_{2k+1}\right\}.$$

Аналогічно, приєднавши послідовно ПЕ до довільного елемента з $R_4^{(k)}$, отримаємо нове РТ, коефіцієнти РР якого знайдемо за формулою (7):

$$P=P_4^{(k)}\eta D+E_k^R Q_4^{(k)}\cdot 1=E_k^R P^{(k+1)},$$

$$Q=\eta D\,E_k^R Q^{(k)}.$$

Розділимо обидва коефіцієнти на E_k^R і одержимо для новоутворених РТ РР, які в стандартній формі запишемо так:

$$\left(1+a_1D+\ldots+a_{k+1}D^{k+1}\right)\sigma=$$

$$=H_{k+1}^R D\left(1+b_1D+\ldots+b_kD^k\right)\varepsilon, \quad (11б)$$

а створені РТ в узагальненому вигляді — як $N_{2(k+1)}$. Сукупність усіх РТ, які задовольняють цим РР, буде

$$R_2^{(k+1)}=\left\{N_{2\left(k+1\right)}\right\}.$$

Далі приєднаємо паралельно ВЕ до довільного елемента з $R_4^{(k)}$ і отримаємо РТ, коефіцієнти РР яких визначимо за формулою (6):

$$P_{k+1} = P_4^{(k)} \cdot 1 = P^{(k)},$$

$$Q_{k+1} = E_k^R Q_4^{(k)} \cdot 1 + P_4^{(k)} \cdot \eta D = E_{k+1}^R Q^{(k+1)}.$$

Стандартна форма РР така:

$$\left(1 + a_1 D + ... + a_k D^k\right)\sigma =$$

$$= E_{k+1}^R \left(1 + b_1 D + ... + b_{k+1} D^{k+1}\right)\varepsilon, \qquad (11в)$$

а в узагальненій формі ці РТ запишуться як $H_{2(k+1)}$. Назвемо $R_3^{(k+1)} = \{H_{2(k+1)}\}$ сукупність всіх РТ, які задовольняють цьому РР.

І, нарешті, приєднавши ПЕ паралельно до довільного елемента з $R_2^{(k+1)}$, утворимо за допомогою формули (6) РТ, коефіцієнти РР яких набудуть вигляду

$$P = P_2^{(k+1)} \cdot 1 = P^{(k+1)},$$

$$Q = P_2^{(k+1)} \cdot E + D H_k^R Q_2^{(k)} \cdot 1 = E Q^{(k+1)}.$$

У стандартній формі ці РР запишуться так:

$$\left(1 + a_1 D + ... + a_k D^{k+1}\right)\sigma =$$

$$= E_{k+1}^R \left(1 + b_1 D + ... + b_k D^{k+1}\right)\varepsilon. \qquad (11г)$$

В узагальненій формі утворені РТ запишемо як $H_{2(k+1)}$, а сукупність РТ, які задовольняють рівнянню (11г), —

$$R_4^{(k+1)} = \left\{H_{2(k+1)+1}\right\} = \left\{H_{2k+3}\right\}.$$

У підсумку, можна зазначити, що рівняння (11а—г) дають шукану систему РР для РТ $(k+1)$-го рангу, за допомогою їх поділено на чотири сукупності:

$$R_1^{(k+1)} = \left\{N_{2k+1}\right\}; \quad R_2^{(k+1)} = \left\{N_{2(k+1)}\right\};$$

$$R_3^{(k+1)} = \left\{H_{2(k+1)}\right\};$$

$$R_4^{(k+1)} = \left\{H_{2(k+1)+1}\right\} = \left\{H_{2k+3}\right\}.$$

Такий розподіл РТ можна покласти в основу класифікації РТ: тип тіла — КПРТ або КВРТ; рід І, якщо ЛДВ P і Q мають однаковий порядок, рід ІІ, якщо порядок ЛДВ P на одиницю менший від порядку ЛДВ Q.

Зауважимо, що РТ високого порядку необхідні для побудови функцій повзучості та релаксації, а також ядер інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ роду при дослідженні непружних процесів у фізичних середовищах і в полімерах [Колтунов, 1976; Бартенев, Зеленев, 1983].

З формул (8) можна встановити зв'язок між порядками ЛДВ P і Q, тобто між константами m і n з формули (1). Порядок ЛДВ Q є рангом РТ, а порядок ЛДВ P співпадає з рангом РТ для РТ H_{2n+1} і N_{2n} і на одиницю менший за ранг для РТ H_{2n} і N_{2n+1}.

Слід звернути увагу на такий висновок з теореми 1.

Висновок 1. Число елементів у невиродженому РТ на одиницю перевищує число ненулевих часів релаксації і часів післядії.

Дійсно, число невироджених часів релаксації дорівнює порядку ЛДВ P, а кількість ненулевих часів післядії визначається порядком полінома з АК в ЛДВ Q. З системи (10) випливають такі співвідношення між кількістю елементів у РТ і числом часів релаксації та часів післядії:

$$(N_{2n}): 2n - n - (n-1) = 1;$$

$$(N_{2n-1}): 2n - 1 - (n-1) - (n-1) = 1;$$

$$(H_{2n}): 2n - (n-1) - n = 1;$$

$$(H_{2n+1}): 2n + 1 - n - n = 1.$$

Звідси виходить, що коефіцієнти, а отже, і механічні параметри невиродженого РТ, яке складається з m елементів, можна відшукати, знаючи релаксуючий модуль (пружний чи в'язкий залежно від типу РТ) та $m-1$ коренів характеристичних рівнянь, породжених ЛДВ P і Q.

Ще зауважимо, що у вироджених РТ неможливо визначити механічні параметри РТ. Якщо кількість реологічних елементів на p перевищує число елементів у невиродженому РТ того самого типу, роду та рангу, то різниця між числом невироджених часів релаксацій і кількістю елементів дорівнюватиме $p+1$ і система рівнянь для визначення механічних параметрів РТ буде недовизначеною.

Форму запису РР, відповідно до формул (8), назвемо стандартною (зведеною). Вона залежить від трьох параметрів: рангу, типу і роду. За ана-логією з тим, як це виконано у праці [Зинер, 1954], назвемо невироджене РТ, РР яких описують рівняннями (8), стандартними лінійними тілами (СЛТ) k-го рангу, i-го типу (квазіпружними ($i = 1$) або квазів'язкими ($i = 2$)), j-го роду СЛТ ($k/i/j$), або відповідно у формулах N_{2k-j} і H_{2k-j}, де, як згадувалось вище, N — квазів'язкі, а H — квазіпружні РТ, нижній індекс позначає число елементів у РТ, k — ранг, $j = 0$ для КВРТ І роду і КПРТ ІІ роду і $j = 1$ в іншому випадку.

Кожна із стандартних форм запису РР РТ, число елементів у яких більше двох, має кілька невироджених реалізацій, які утворюють клас механічно еквівалентних реологічних тіл. Механічно еквівалентними РТ, або подібними, назвемо РТ, РР яких розрізняються величиною коефіцієнтів. Якщо ж коефіцієнти РР однакові за величиною, то такі РТ назвемо реологічно еквівалентними, тому що збігаються їх часи релаксації і післядії. Кількість реалізацій залежить від числа елементів РТ. Наприклад, у триелементних РТ є по дві, в чотириелементних — по чотири, а в п'ятиелементних — по вісім реалізацій кожного типу.

Виникає питання: чим відрізняється вироджене приєднання від невиродженого. Виявляється, що воно тісно пов'язане з різницею між числом пружних і в'язких елементів $\delta_e = | n_N - n_H |$ і різницею між кількістю паралельних і послідовних включень $\delta_c = | n_I - n_- |$, де n_H і n_N — число пружних і в'язких елементів; n_I і n_- — число паралельних і послідовних приєднань у РТ відповідно. Назвемо балансом приєднання суму різниць $\delta = \delta_e + \delta_c$. Якщо підрахувати баланс для РТ, які застосовують у реології, то виявиться, що для них він дорівнює одиниці:

$$\delta_e + \delta_c = 1. \tag{12}$$

Такі тіла назвемо збалансованими, або базовими. З'ясуємо роль балансу при побудові РТ. Приєднання певного елемента до РТ назвемо виродженим, якщо в результаті отримаємо РТ, РР якого якісно не змінюється і відрізняється лише величиною коефіцієнтів і кількістю елементів, а ранг, рід і тип РР не змінюються, тобто новоутворене РТ є механічно еквівалентним базовому [Рейнер, 1965; Савін, Рущицький, 1975]. Таке РТ називатимемо виродженим. Можна вважати, що в результаті виродженого приєднання утворюється вироджене РТ, отже, ці поняття еквівалентні. Так, приєднавши до певного елемента однотипний елемент, отримаємо у підсумку той самий елемент, тільки іншої величини. Приєднавши паралельно до тіла Фойгта пружний або в'язкий елемент, одержимо тіло Фойгта, але з іншими за величиною коефіцієнтами. Таких прикладів можна навести дуже багато. До речі, слід зауважити, що виродженим може бути РТ, до якого приєднано інші РТ, наприклад, паралельно два реологічні тіла Фойгта тощо. Отже, питання про умови побудови невироджених РТ є нетривіальним.

Невироджені РТ побудуємо за допомогою формул (6), (7). Простежимо виконання балансу при утворенні нових РТ. Спочатку розглянемо приєднання пружного елемента до всіх чотирьох варіантів збалансованих РТ k-го рангу. Приєднаємо спочатку ПЕ H до РТ N_{2k-1} паралельно. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ запишемо за допомогою формули (6) у вигляді

$$P = P^{(k-1)} \cdot 1 = P^{(k-1)},$$

$$Q = P^{(k-1)} \cdot E + H_k^R \, D \, Q^{(k-1)} \cdot 1 =$$

$$= E \left(P^{(k-1)} + \tau_k \, D \, Q^{(k-1)} \right) = E \, Q^{(k)},$$

де $\tau_k = H_k^R / E$. Одержане РР у стандартній формі запишемо так:

$$P^{(k-1)} \sigma - E \, Q^{(k)} \varepsilon = 0.$$

Звідси доходимо висновку, що об'єднане РТ є H_{2k}, тобто в результаті паралельного приєднання ПЕ H до РТ N_{2k-1} результуюче РТ змінило тип і збільшилось на один елемент, і тому це приєднання є невиродженим. Підрахуємо баланс підсумкового РТ. Базове РТ N_{2k-1} має один зайвий ВЕ, кількість послідовних і паралельних включень однакова; отже, з урахуванням паралельного приєднання до нього ПЕ H баланс підсумкового РТ дорівнюватиме одиниці, і воно буде збалансованим.

Розглянемо послідовне приєднання ПЕ H до РТ N_{2k-1}. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ у цьому разі знайдемо за формулою (7):

$$P = P^{(k-1)} \cdot E + H_k^R \, D \, Q^{(k-1)} \cdot 1 =$$

$$= E \left(P^{(k-1)} + \tau_k \, D \, Q^{(k-1)} \right) = E P^{(k)},$$

$$Q = H_k^R \, D \, Q^{(k-1)} \cdot E.$$

Після скорочення на константу E РР об'єднаного РТ матиме таку стандартну форму:

$$P^{(k)} \sigma - H_k^R \, D \, Q^{(k-1)} \varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ в узагальненому вигляді запишемо як N_{2k}. Таким чином, у результаті послідовного приєднання ПЕ H до РТ N_{2k-1} підсумкове РТ змінило рід і збільшилося на один елемент, тобто отримали невироджене РТ. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Унаслідок додавання пружного елемента до РТ N_{2k-1} складова балансу δ_e стане нульовою. Складова балансу δ_c в базовому РТ N_{2k-1} дорівнювала нулю, а внаслідок послідовного приєднання до нього ПЕ дорівнюватиме одиниці; умову балансу об'єднаного РТ запишемо так: $\delta_e+\delta_c=1$, а тому об'єднане РТ буде збалансованим.

Проаналізуємо приєднання ПЕ H до РТ N_{2k}. За паралельного варіанта об'єднання коефіцієнти РР підсумкового РТ знайдемо за формулою (6):

$$P=P^{(k)}\cdot 1=P^{(k)},$$

$$Q=P^{(k)}\cdot E+H_k^R DQ^{(k-1)}\cdot 1=$$

$$=E\left(P^{(k)}+\tau_k DQ^{(k-1)}\right)=EQ^{(k)}$$

і в підсумку РР об'єднаного РТ запишеться у стандартній формі:

$$P^{(k)}\sigma-EQ^{(k)}\varepsilon=0,$$

а в узагальненій формі об'єднане РТ матиме вигляд H_{2k+1}, тобто воно змінило тип, а його індекс збільшився на одиницю, отже, приєднання є невиродженим. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ кількість пружних і в'язких елементів однакова, а число послідовних паралельних включень на одиницю більше, ніж паралельних. У результаті паралельного приєднання ПЕ до РТ H_{2k} перша складова балансу збільшиться на одиницю ($\delta_e=1$), число паралельних і послідовних з'єднань буде однаковим ($\delta_c=0$), а рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e+\delta_c=1$, тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

За послідовного приєднання ПЕ H до РТ N_{2k} коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (7):

$$P=P^{(k)}\cdot E+H_k^R DQ^{(k-1)}\cdot 1=$$

$$=E\left(P^{(k)}+\tau_k DP^{(k-1)}\right)=EP^{(k)},$$

$$Q=E\cdot H_k^R DQ_k^{R(k-1)},$$

так що після скорочення на константу E РР об'єднаного РТ матиме вигляд

$$P^{(k)}\sigma-H_k^R DQ^{(k-1)}\varepsilon=0,$$

тобто об'єднане РТ в узагальненій формі запишемо як N_{2k}. Число елементів у ньому на одиницю перевищує його індекс, звідки робимо висновок, що є виродження. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Унаслідок послідовного приєднання ПЕ до РТ N_{2k} перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, а число послідовних включень перевищуватиме число паралельних з'єднань на дві одиниці, і рівняння балансу запишемо у вигляді: $\delta_e+\delta_c=3$, і, отже, об'єднане РТ буде незбалансованим.

Проаналізуємо приєднання ПЕ H до РТ H_{2k}. За паралельного об'єднання коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (6):

$$P=P^{(k-1)}\cdot 1=P^{(k-1)},$$

$$Q=P^{(k-1)}\cdot E+E_k^R Q^{(k)}\cdot 1=$$

$$=\left(E+E_k^R\right)\left(P^{(k-1)}E\Big/\left(E+E_k^R\right)+\right.$$

$$\left.+Q^{(k)}E_k\Big/\left(E+E_k^R\right)\right)=\left(E+E_k^R\right)Q^{(k)}.$$

У підсумку РР запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k-1)}\sigma-\left(E+E_k^R\right)Q^{(k)}\varepsilon=0,$$

і в узагальненій формі об'єднане РТ запишеться як H_{2k}. Звідси випливає, що кількість елементів в об'єднаному РТ на одиницю перевищує його індекс, тому має місце виродження. Перевіримо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ число пружних і в'язких елементів однакове, число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних. Унаслідок паралельного приєднання ПЕ до РТ N_{2k} кількість пружних елементів буде на одиницю більше, ніж в'язких, паралельних включень буде на дві одиниці більше, ніж послідовних, і рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e+\delta_c=3$, тобто об'єднане РТ є незбалансованим.

Розглянемо послідовне приєднання ПЕ H до РТ H_{2k}. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ відшукаємо за формулою (7):

$$Q=E_k^R Q^{(k)}\cdot E,$$

$$P=P^{(k-1)}\cdot E+E_k^R Q^{(k)}\cdot 1=$$

$$=\left(E+E_k^R\right)\left(P^{(k-1)}E\Big/\left(E+E_k^R\right)+\right.$$

$$+Q^{(k)}E_k^R \Big/ \left(E+E_k^R\right)\Big)=\left(E+E_k^R\right)P^{(k)},$$

а саме РР об'єднаного РТ після скорочення на константу $E+E_k^R$ матиме таку стандартну форму:

$$P^{(k)}\sigma - E_0^R Q^{(k)}\varepsilon = 0,$$

де $E_0^R = EE_k^R \Big/ \left(E+E_k^R\right)$, тобто об'єднане РТ є H_{2k+1}, воно зберегло ранг і тип, число елементів в ньому дорівнює індексу, а тому є невиродженим. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. За послідовного приєднання ПЕ до РТ H_{2k} перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, кількість послідовних і паралельних включень зрівняється і рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e+\delta_c=1$, і, отже, об'єднане РТ буде збалансованим.

І, нарешті, проаналізуємо приєднання ПЕ H до РТ H_{2k+1}. За паралельного об'єднання коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (6):

$$P=P^{(k)}\cdot 1 = P^{(k)},$$

$$Q=P^{(k)}\cdot E + E_k^R Q^{(k)}\cdot 1 =$$

$$=\left(E+E_k^R\right)\Big(P^{(k)}E \Big/ \left(E+E_k^R\right)+$$

$$+Q^{(k)}E_k^R \Big/ \left(E+E_k^R\right)\Big)=\left(E+E_k^R\right)Q^{(k)}.$$

РР об'єднаного РТ запишемо у підсумку в стандартній формі:

$$P^{(k)}\sigma - \left(E+E_k^R\right)Q^{(k)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що об'єднане РТ в узагальненій формі має вигляд: H_{2k+1}, тобто РТ H_{2k+1} у разі паралельного об'єднання з пружним елементом не змінилось, а кількість елементів в об'єднаному РТ на одиницю перевищила його індекс, і є виродження. Перевіримо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ число пружних елементів на одиницю більше, ніж в'язких, а кількість послідовних і паралельних включень однакова. За паралельного приєднання ПЕ до РТ H_{2k+1} перша складова балансу збільшиться на одиницю ($\delta_e=2$), інша складова дорівнюватиме одиниці і рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e+\delta_c=3$, тобто підсумкове РТ буде незбалансованим.

За послідовного приєднання ПЕ H до РТ H_{2k+1} коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (7):

$$P=P^{(k)}\cdot E + E_k^R Q^{(k)}\cdot 1 =$$

$$=\left(E+E_k^R\right)\Big(P^{(k)}E \Big/ \left(E+E_k^R\right)+$$

$$+Q^{(k-1)}E_k^R \Big/ \left(E+E_k^R\right)\Big)=\left(E+E_k^R\right)P^{(k)},$$

$$Q=E\cdot E_k^R Q^{(k)}.$$

У підсумку РР об'єднаного РТ після скорочення на константу $E+E_k^R$ матиме стандартну форму

$$P^{(k)}\sigma - E_0^R Q^{(k)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що об'єднане РТ в узагальненій формі записується як H_{2k+1}, число елементів в ньому на одиницю перевищить його індекс, а тому відбувається виродження. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ число пружних елементів на одиницю перевищує кількість в'язких, друга складова балансу дорівнює нулю. Приєднавши ПЕ H до РТ H_{2k+1}, збільшуємо першу складову балансу на одиницю: $\delta_e=2$. Друга складова балансу дорівнюватиме одиниці, а рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e+\delta_c=3$, тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

Випишемо результати приєднання ПЕ до РТ k-го рангу:

$$H \,\big|\, N_{2k-1}=H_{2k},\; H-N_{2k-1}=N_{2k},$$

$$H \,\big|\, N_{2k}=H_{2k+1},\; H-N_{2k}=N_{2k},$$

$$H \,\big|\, H_{2k}=H_{2k},\; H-H_{2k}=H_{2k+1},$$

$$H \,\big|\, H_{2k+1}=H_{2k+1},\; H-H_{2k+1}=H_{2k+1}. \quad (13)$$

З восьми варіантів маємо чотири вироджені і чотири невироджені випадки. Неважко переконатися, що невиродженими є тільки такі приєднання, які виконуються з дотриманням умови балансу. Якщо ж умова балансу не виконується, то відбувається виродження — структура РР базового РТ (тип і рід) за приєднання до нього ПЕ не змінюється.

Невироджені РТ запишемо для наочності так:

$$H \,\big|\, N_{2k-1}=H_{2k},\; H-N_{2k-1}=N_{2k},$$

$$H \,\big|\, N_{2k}=H_{2k+1},\; H-H_{2k}=H_{2k+1}. \quad (14)$$

Звідси видно, що характерною особливістю невиродженого приєднання ПЕ до РТ є те, що в результаті приєднання ранг нового РТ не змінюється, але за паралельного приєднання рід РТ зберігається, тип змінюється; за послідовного приєднання, навпаки, — рід РТ змінюється, а тип залишається без змін.

Далі розглянемо приєднання ВЕ до всіх чотирьох варіантів збалансованих РТ k-го рангу. Спочатку проаналізуємо результат послідовного приєднання ВЕ до РТ N_{2k-1}. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ у цьому разі знайдемо за формулою (7):

$$Q = H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot \eta D = \eta H_k^R D^2 Q^{(k-1)},$$

$$P = P^{(k-1)} \cdot \eta D + H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot 1 =$$

$$= \left(\eta + H_k^R\right) D \left(P^{(k-1)} \cdot \eta \middle/ \left(\eta + H_k^R\right) + \right.$$

$$\left. + Q^{(k-1)} H_k^R \middle/ \left(\eta + H_k^R\right)\right) = \left(\eta + H_k^R\right) D P^{(k-1)}.$$

Після скорочення на константу $\eta + H_k^R$ запишемо РР об'єднаного РТ у стандартній формі:

$$D\left[P^{(k-1)}\sigma - H_0^R D Q^{(k-1)}\varepsilon\right] = 0,$$

$$\text{де } H_0^R = \eta H_k^R \middle/ \left(\eta + H_k^R\right).$$

Вираз у квадратних дужках — РР для РТ N_{2k-1}, звідки випливає, що об'єднане РТ є N_{2k-1}, і, отже, приєднання ВЕ до базового РТ N_{2k-1} не змінило його структуру, а кількість елементів в ньому на одиницю перевищує його індекс, а тому є виродження. Перевіримо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ в'язких елементів на одиницю більше, ніж пружних, кількість послідовних і паралельних включень однакова. За послідовного приєднання ВЕ до РТ N_{2k-1} перша складова балансу збільшиться на одиницю ($\delta_e = 2$), інша складова балансу дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e + \delta_c = 3$, тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

Розглянемо варіант паралельного приєднання ВЕ до РТ N_{2k-1}. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (6):

$$P = P^{(k-1)} \cdot 1 = P^{(k-1)},$$

$$Q = P^{(k-1)} \cdot \eta D + H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot 1 =$$

$$= \left(\eta + H_k^R\right) D \left(P^{(k-1)} \cdot \eta \middle/ \left(\eta + H_k^R\right) + \right.$$

$$\left. + Q^{(k-1)} H_k^R \middle/ \left(\eta + H_k^R\right)\right) = \left(\eta + H_k^R\right) D Q^{(k-1)}.$$

РР об'єднаного РТ запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k-1)}\sigma - \left(\eta + H_k^R\right) D Q^{(k-1)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що об'єднане РТ в узагальненій формі має вигляд N_{2k-1}, тобто паралельне приєднання ВЕ до РТ N_{2k-1} не змінило його структуру, а число елементів в ньому перевищує на одиницю його індекс, а тому є виродження. Підрахуємо баланс підсумкового РТ. Унаслідок паралельного приєднання ВЕ до РТ N_{2k-1} перша складова балансу збільшиться на одиницю: $\delta_e = 2$, друга дорівнюватиме одиниці, рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e + \delta_c = 3$; отже, об'єднане РТ буде незбалансованим.

Проаналізуємо приєднання ВЕ до РТ N_{2k}. За паралельного варіанта коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (6):

$$P = P^{(k)} \cdot 1 = P^{(k)},$$

$$Q = P^{(k)} \cdot \eta D + H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot 1 =$$

$$= \left(\eta + H_k^R\right) D \left(P^{(k)} \eta \middle/ \left(\eta + H_k^R\right) + \right.$$

$$\left. + Q^{(k-1)} H_k^R \middle/ \left(\eta + H_k^R\right)\right) = \left(\eta + H_k^R\right) D Q^{(k)};$$

РР об'єднаного РТ запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k)}\sigma - \left(\eta + H_k^R\right) D Q^{(k)}\varepsilon = 0.$$

Звідси об'єднане РТ — це N_{2k+1}, кількість елементів у ньому збігається з його індексом, і приєднання ВЕ до РТ H_{2k} буде невиродженим. Перевіримо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ пружних і в'язких елементів порівну, число послідовних включень на одиницю більше, ніж паралельних. Унаслідок паралельного приєднання ВЕ до РТ H_{2k} перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, число послідовних і паралельних включень зрівняється, а рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e + \delta_c = 1$, тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

За послідовного приєднання ВЕ до РТ N_{2k} коефіцієнти РР об'єднаного РТ знаходимо за формулою (7):

$$P = P^{(k)} \cdot \eta D + H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot 1 =$$

$$= \left(\eta + H_k^R\right) D \left(P^{(k)} \cdot \eta \Big/ \left(\eta + H_k^R\right) +\right.$$

$$\left. + P^{(k-1)} H_k^R \Big/ \left(\eta + H_k^R\right)\right) = \left(\eta + H_k^R\right) D P^{(k)},$$

$$Q = H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot \eta D = \eta H_k^R D^2 Q_k^{R(k-1)}.$$

У підсумку РР об'єднаного РТ у стандартній формі матиме вигляд

$$\left(\eta + H_k^R\right) D \left[P^{(k)} \sigma - H_0^R D Q^{(k-1)} \varepsilon\right] = 0.$$

Зводимо його до рівняння

$$P^{(k)} \sigma - H_0^R D Q^{(k-1)} \varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ в узагальненій формі запишемо як N_{2k}, і послідовне приєднання ВЕ до базового РТ не змінило його структуру, кількість елементів в ньому перевищує на одиницю його індекс, і відбувається виродження. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ пружних і в'язких елементів порівну, число послідовних включень було на одиницю більше, ніж паралельних. Унаслідок послідовного приєднання ВЕ до РТ N_{2k} перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, число послідовних включень перевищуватиме число паралельних приєднань на дві одиниці, рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e + \delta_c = 3$, і об'єднане РТ буде незбалансованим.

Проаналізуємо приєднання ВЕ до РТ H_{2k}. За паралельного варіанта коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (6):

$$P = P^{(k-1)} \cdot 1 = P^{(k-1)},$$

$$Q = P^{(k-1)} \cdot \eta D + E_k^R Q^{(k)} \cdot 1 =$$

$$= E_k^R \left(\tilde{\tau}_k D P^{(k-1)} + Q^{(k)}\right) = E_k^R Q^{(k)},$$

де $\tilde{\tau}_k = \eta / E_k^R$, РР об'єднаного РТ запишеться у стандартній формі:

$$P^{(k-1)} \sigma - E_k^R Q^{(k)} \varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ є H_{2k}. Звідси випливає, що внаслідок паралельного приєднання ВЕ до РТ H_{2k} останнє не змінило свою структуру, кількість елементів в ньому перевищує на одиницю його індекс, і відбувається виродження. Перевіримо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ пружних і в'язких елементів порівну, число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних. Унаслідок паралельного приєднання ВЕ до РТ H_{2k} кількість в'язких елементів буде на одиницю більше, ніж пружних, паралельних включень стане на дві одиниці більше, ніж послідовних, і для рівняння балансу матимемо такий запис: $\delta_e + \delta_c = 3$, тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

Розглянемо послідовне приєднання ВЕ до РТ H_{2k}. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (7):

$$P = P^{(k-1)} \cdot \eta D + E_k^R Q^{(k)} \cdot 1 =$$

$$= E_k^R \left(P^{(k-1)} D \tau_k + Q^{(k)}\right) = E_k^R P^{(k)},$$

$$Q = E_k^R \eta D Q^{(k)}.$$

Після скорочення на константу E_k^R матимемо

$$P^{(k)} \sigma - \eta D Q^{(k)} \varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ в узагальненій формі запишеться як N_{2k+1}. Воно змінило ранг і тип, але зберегло рід, кількість елементів у ньому збігається з його індексом, отже, приєднання ВЕ до РТ H_{2k} буде невиродженим. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ пружних і в'язких елементів порівну, кількість ГВ паралельних включень на одиницю більше ніж послідовних. Внаслідок послідовного приєднання ПЕ до РТ H_{2k} перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, кількість послідовних і паралельних включень зрівняється, рівняння балансу набуде вигляду: $\delta_e + \delta_c = 1$, і, таким чином, об'єднане РТ буде збалансованим.

Проаналізуємо приєднання ВЕ до РТ H_{2k+1}. За паралельного варіанта коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (6):

$$P = P^{(k)} \cdot 1 = P^{(k)},$$

$$Q = P^{(k)} \cdot \eta D + E_k^R Q^{(k)} \cdot 1 =$$

$$= E_k^R \left(\tau_k D P^{(k)} + Q^{(k)}\right) = E_k^R Q^{(k+1)}.$$

РР об'єднаного РТ запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k)} \sigma - E_k^R Q^{(k+1)} \varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ є $H_{2(k+1)}$, і, отже, результуюче РТ змінило ранг і рід, кількість елементів в ньому збільшилась на одиницю і збігається з його індексом. Звідси випливає, що паралельне приєднання ВЕ до РТ H_{2k+1} буде невиродженим. Перевіримо баланс об'єднаного РТ. У базовому РТ пружних елементів на одиницю більше, ніж в'язких, кількість послідовних і паралельних включень однакова. Внаслідок паралельного приєднання ВЕ до РТ H_{2k+1} перша складова балансу збалансується, а інша з урахуванням паралельного типу приєднання ВЕ до базового РТ дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e + \delta_c = 1$, тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

За послідовного приєднання ВЕ до РТ H_{2k+1} коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за формулою (7):

$$P = P^{(k)} \cdot \eta D + E_k^R Q^{(k)} \cdot 1 =$$

$$= E_k^R \left(Q^{(k)} + \tilde{\tau}_k D P^{(k)} \right) = E_k^R P^{(k+1)},$$

$$Q = E_k^R \eta D Q^{(k)},$$

а для РР об'єднаного РТ після скорочення на константу E_k^R матимемо

$$P^{(k+1)} \sigma - \eta D Q^{(k)} \varepsilon = 0.$$

Звідси об'єднане РТ в узагальненій формі має вигляд $N_{2(k+1)}$, отже, послідовне приєднання ВЕ до РТ H_{2k+1} змінило його ранг і тип, кількість елементів у ньому збігається з його індексом, і приєднання ВЕ до РТ H_{2k} буде невиродженим. Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Приєднання ВЕ до РТ H_{2k+1} збалансовує першу складову балансу, інша його складова дорівнюватиме одиниці, і в підсумку рівняння балансу матиме вигляд: $\delta_e + \delta_c = 1$, тобто об'єднане РТ буде збалансованим

Результати приєднання ВЕ до РТ k-го рангу такі:

$$N \,\Big|\, N_{2k} = N_{2k+1},\ N \,\Big|\, H_{2k+1} = H_{2(k+1)},$$

$$N - N_{2k} = N_{2k},\ N - H_{2k+1} = N_{2(k+1)},$$

$$N \,\Big|\, N_{2k-1} = N_{2k-1},\ N - N_{2k-1} = N_{2k-1},$$

$$N \,\Big|\, N_{2k} = N_{2k+1} N - H_{2k} = N_{2k},$$

$$N \,\Big|\, H_{2k} = N_{2k},\ N - H_{2k} = N_{2k+1},$$

$$N \,\Big|\, H_{2k+1} = H_{2(k+1)},\ N - H_{2k+1} = N_{2(k+1)}. \quad (15)$$

Підсумуємо результат приєднання ВЕ до всіх чотирьох варіантів збалансованих РТ k-го рангу. З восьми варіантів чотири будуть виродженими і чотири — невиродженими. Невиродженими будуть тільки такі приєднання, за яких виконуються умови балансу. Ще слід зауважити, що за невиродженого приєднання ВЕ до РТ, на відміну від розглянутих вище невироджених приєднань ПЕ до РТ, ранг об'єднаного РТ підвищується на одиницю. Якщо ж умова балансу не виконується, то відбувається виродження — РР базового РТ унаслідок приєднання до нього ВЕ якісно не змінюється. Можна зазначити, що вимога дотримання умови балансу є визначальним моментом невиродженості приєднання в'язкого або пружного елемента до РТ.

Невироджені приєднання ВЕ до РТ запишемо для наочності в окремий рядок:

$$N \,\Big|\, N_{2k} = N_{2(e+1)+1} = N_{2k+1},\ N - H_{2k} = N_{2k+1},$$

$$N \,\Big|\, H_{2k+1} = H_{2(k+1)},\ N - H_{2k+1} = N_{2(k+1)}. \quad (16)$$

Звідси можна дійти висновку, що характерною особливістю невиродженого приєднання ВЕ до РТ є підвищення на одиницю його рангу, причому за паралельного приєднання змінюється рід РТ, а тип залишається без змін, за послідовного навпаки — змінюється тип, а рід залишається без змін.

З формул (14), (16) випливає такий висновок.

Висновок 2. Для того щоб приєднання пружного або в'язкого елемента до невиродженого РТ було невиродженим, необхідно і достатньо, щоб воно виконувалося з дотриманням умови балансу.

Дійсно, якщо в результаті приєднання пружного або в'язкого елемента до збалансованого РТ утворилося невироджене РТ, то згідно з формулами (14), 16), таке приєднання можливе за дотримання умови балансу (12), тобто це є необхідною умовою невиродженості приєднання реологічного елемента до збалансованого РТ. Переконаємося, що виконання умови балансу (12) є достатньою умовою невиродженості приєднання пружного або в'язкого елемента до збалансованого РТ. З формул (14), (16) випливає, що приєднання пружного або в'язкого елемента до збалансованого РТ з дотриманням умови балансу (12) приводить до невиродженого РТ.

Розглянемо зв'язок між кількістю ВЕ і рангом РТ. Уперше про це згадано у публікації [Качанов, 1949], в якій зазначено, що ранг РТ дорівнює кількості в ньому ВЕ. Пізніше у праці [Ржаницын, 1968] наведено приклади вироджених приєднань ВЕ до РТ, які не підвищують ранг РТ, але не з'ясовано, що спричинює виродженість.

Вище доведено, що виродженість РТ у разі приєднання окремого реологічного елемента до невиродженого РТ пояснюється порушенням балансу РТ під час його утворення. Те, що ранг невиродженого РТ підвищується на одиницю внаслідок приєднання ВЕ з дотриманням умови балансу, є важливим моментом для встановлення зв'язку між кількістю ВЕ і рангом невиродженого РТ. Покажемо методом математичної індукції, що в невироджених РТ ранг РТ дорівнює кількості в ньому ВЕ, тобто невиродженість РТ є необхідною умовою збігу рангу РТ з кількістю в ньому ВЕ.

Дійсно, цей висновок справедливий для невироджених РТ першого рангу — це ВЕ (N_1), тіло Максвелла (N_2), тіло Фойгта (H_2) і РТ Кельвіна та Пойнтінга — Томпсона (H_3), які мають по одному ВЕ.

Якщо цей факт має місце при $n = k$, тобто маємо чотири типи невироджених РТ k-го рангу з різною структурою РР, які мають по k ВЕ, і в узагальненому вигляді запишуться таким чином:

$$N_{2k-1},\ N_{2k},\ H_{2k},\ H_{2k+1}, \qquad (17)$$

то це справедливо і при $n = k+1$. Дійсно, приєднавши ВЕ до невироджених РТ, які задовольняють (17), згідно з формулою (16) одержимо три класи невироджених РТ $(k+1)$-го рангу, РР яких в узагальненому вигляді запишемо як: $N_{2(k+1)-1} = N_{2k+1}$, $N_{2(k+1)}$, $H_{2(k+1)}$, і які мають по $k+1$ ВЕ. За допомогою цих РТ за формулами (6), (7), (14) отримаємо ще один клас РТ $(k+1)$-го рангу, що мають $k+1$ ВЕ, РР яких в узагальненому вигляді запишемо як:

$$H \,\Big|\, N_{2(k+1)} = H - H_{2(k+1)} = H_{2(k+1)+1} = H_{2k+3}.$$

Таким чином, отримано чотири класи невироджених РТ $(k+1)$-го рангу, РР яких мають такий узагальнений вигляд:

$$N_{2k+1},\ N_{2(k+1)},\ H_{2(k+1)},\ H_{2k+3}.$$

Ці класи мають по $k+1$ ВЕ, що і треба було довести. Наведений результат сформулюємо як висновок.

Висновок 3. Невиродженість РТ є необхідною умовою співпадання його рангу з кількістю в ньому в'язких елементів.

Список літератури

Бартенев Г.М., Зеленев Ю.В. Физика и механика полимеров. Москва: Высш. шк., 1983. 391 с. [*Bartenev G.M., Zelenev Ju.V.*, 1983. Physics and mechanics of polymers. Moskow: Vysshaja Shkola, 391 p. (in Russian)].

Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. Москва: Мир, 1965. 200 с. [*Bland D.R.*, 1965. Theory of linear viscoelasticity. Moskow: Mir, 200 p. (in Russian)].

Зинер К.М. Упругость и неупругость металлов. Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. 396 с. [*Zener C.*, 1954. Elasticity and inelasticity of metals. Moskow: Izdatelstvo inostrannoj literatury, 396 p. (in Russian)].

Качанов Л.М. Некоторые вопросы теории ползучести. Москва: Гостехиздат, 1949. 164 с. [*Katshanov L.M.*, 1949. Some issues of creep theory. Moskow: Gostechizdat, 164 p. (in Russian)].

Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. Москва: Высш. шк., 1976. 277 с. [*Koltunov M.A.*, 1976. Creep and relaxation. Moskow: Vysshaja Shkola, 277 p. (in Russian)].

Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенства материалов. Киев: Наук. думка, 1970. 251 с. [*Pisarenko G.S.*, 1970. Mechanic system oscillation in view of materials' irregularity. Kiev: Naukova Dumka, 251 p. (in Russian)].

Рейнер М. Реология. Москва: Наука, 1965. 294 с.

[*Reiner M.*, 1965. Rheology. Moskow: Nauka, 294 p. (in Russian)].

Ржаницын А. Р. Теория ползучести. Москва: Госстройиздат, 1968. 416 с. [*Rschanicyn A. R.*, 1968. Creep theory. Moskow: Gosstrojizdat, 416 p. (in Russian)].

Савін Г. М., Рущицький Я. Я. Елементи механіки спадкових середовищ. Київ: Вища шк., 1975. 252 с. [*Savin G. M., Rushtshyc'kyj Ja. Ja.*, 1975. Elements of mechanics in the inherited. Kiev: Vyshtsha Shkola, 252 p. (in Ukraian)].

Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения. Москва: Госстройиздат, 1960. 152 с. [*Sorokin Je. S.*, 1960. To the theory of internal friction. Moskow: Gosstrojizdat, 152 p (in Russian)].