УДК 530.3+550.344

Про деякі особливості структури узагальненого реологічного тіла. 2

© *Є. М. Бицань, 2014*

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла 13 лютого 2013 р.

Представлено членом редколегії В. М. Шуманом

Проанализированы особенности образования реологических тел (РТ) высокого ранга путем объединения двух РТ с меньшим числом. Сформулированы необходимые и достаточные условия невырожденности объединенного РТ, состоящие в том, чтобы сумма разностей между количеством упругих и вязких элементов и между числом параллельных и последовательных соединений в построенном РТ равнялась единице, а времена релаксации РТ-слагаемых при параллельном соединении и времена последействия при последовательном соединении различались между собой. Построены функции ползучести релаксации. С их помощью созданы ядра и резольвенты интегральных уравнений 2-го рода, которые описывают неупругие процессы в средах с последействием.

Ключевые слова: реологическое тело, реологическое уравнение, деформация, напряжение, релаксация, ранг, неупругость, невырожденность, волновое поле, геологическая среда.

Ця робота є продовженням статті [Бицань, 2014], в якій розглянуто деякі особливості побудови реологічних тіл (РТ) довільного рангу. Детально проаналізовано побудову РТ приєднанням пружного (ПЕ) або в'язкого (ВЕ) елемента до невироджених РТ.

Розглянемо далі об'єднання окремих РТ. У згадуваній статті доведено, що РТ n-го рангу поділяють за структурою на чотири сукупності. Їх реологічні рівняння (РР) записують в узагальненому вигляді:

$$\left(N_{2n-1}\right):\left(1+a_1 D+\cdots+a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma = $$
$$= H_n^R D\left(1+b_1 D+\cdots+b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon,$$

$$\left(N_{2n}\right):\left(1+a_1 D+\cdots+a_n D^n\right)\sigma =$$
$$= H_n^R D\left(1+b_1 D+\cdots+b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon,$$

$$\left(H_{2n}\right):\left(1+a_1 D+\cdots+a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma =$$
$$= E_n^R\left(1+b_1 D+\cdots+b_n D^n\right)\varepsilon,$$

$$\left(H_{2n+1}\right):\left(1+a_1 D+\cdots+a_n D^n\right)\sigma =$$
$$= E_n^R\left(1+b_1 D+\cdots+b_n D^n\right)\varepsilon, \qquad (1)$$

де $D=\partial/\partial t$; H і N — квазіпружні та квазів'язкі РТ; E_n^R і H_n^R — релаксуючі пружні та в'язкі модулі відповідно.

Проаналізуємо вплив структури окремих РТ, балансу і типу об'єднання на структуру об'єднаного РТ. Нагадаємо, що за паралельного об'єднання двох РТ, РР яких мають вигляд

$$P_1\sigma_1 = Q_1\varepsilon_1, \quad P_2\sigma_2 = Q_2\varepsilon_2, \qquad (2)$$

одержимо РТ, РР якого запишемо так:

$$P_1 P_2\sigma = \left(P_1 Q_2 + P_2 Q_1\right)\varepsilon. \qquad (3)$$

За послідовного об'єднання для РР цих РТ матимемо такий запис:

$$\left(P_1 Q_2 + P_2 Q_1\right) = Q_1 Q_2\varepsilon. \qquad (4)$$

Розглянемо питання про ранг об'єднаного РТ. Він залежить від структури його складових. Слід звернути увагу на те, що характеристичні рівняння (ХР) лінійних диференціальних виразів (ЛДВ) P і Q об'єднаного РТ можуть мати спільний корінь, тобто один із часів релаксації напруження за постійної деформації збігається з одним із часів релаксації деформації за постійного напруження. Тоді коефіцієнти РР запишемо:

$$P^m = (D - \alpha_0) P^{m-1}, \quad Q^n = (D - \alpha_0) Q^{n-1},$$

де m і n — порядки ЛДВ P і Q відповідно, а РР об'єднаного РТ матиме вигляд

$$(D - \alpha_0)\left[P^{m-1}\sigma - Q^{n-1}\varepsilon \right] = 0, \qquad (5)$$

в якому вираз у квадратних дужках є реологічним рівнянням для РТ $n-1$-го рангу і має дорівнювати нулю. Звідси випливає, що об'єднане РТ матиме $n-1$-й ранг, тобто відбувається виродження.

Вияснимо причину появи спільних коренів у характеристичних рівняннях ЛДВ P і Q. З рівняння (3) випливає, що спільний корінь α_0 має входити до одного із співмножників P_1 або P_2. Якщо $\alpha_0 \in P_1$ і можна записати, що $P_1 = (D - \alpha_0)\, P_1^*$, то з рівняння (3) одержимо

$$(D - \alpha_0) \times$$

$$\times \left[P_1^* P_2 \sigma - \left(P_1^* Q_2 + P_2 Q_1 / (D - \alpha_0) \right) \varepsilon \right] = 0,$$

звідки випливає, що двочлен $P_2 Q_1$ має ділитися на множник $(D - \alpha_0)$, якщо $\alpha_0 \in Q_1$ або $\alpha_0 \in P_2$. В першому випадку з урахуванням довільності вибору ЛДВ P_1 це означає, що якийсь з РТ-доданків — вироджений, а в другому — наявний спільний корінь у ХР коефіцієнтів при напруженні в обох РТ-доданках.

Аналогічно з рівняння (4) випливає, що за послідовного об'єднання РТ ранг об'єднаного РТ зменшиться внаслідок виродження якогось з РТ-доданків або наявності спільного кореня в ХР коефіцієнтів при деформації.

Якщо характеристичні рівняння ЛДВ P і Q матимуть k спільних коренів, то РР об'єднаного РТ набуде вигляду

$$\prod_{i=1}^{k} (D - \alpha_i)\left[P^{m-k}\sigma - Q^{n-k}\varepsilon \right] = 0, \qquad (6)$$

де вираз у квадратних дужках є реологічним рівнянням для РТ $n-k$-го рангу і дорівнює нулю.

Отже, РР об'єднаного РТ запишемо так:

$$P^{m-k}\sigma - Q^{n-k}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що наявність спільних коренів у ХР коефіцієнтів при деформації і напруженні об'єднаного РТ зменшує його ранг на кількість цих коренів.

Таким чином, важливим елементом при побудові РТ високого порядку за допомогою РТ меншого рангу є вимога невиродженості РТ-складових і відсутність спільних коренів ХР коефіцієнтів об'єднаного РТ у разі деформації при послідовному об'єднанні, а при паралельному — напруженні.

Як і в розглянутих вище приєднаннях одиночного реологічного елемента до невироджених РТ, звернімо увагу на важливу роль балансу РТ, який визначаємо за формулою

$$\delta_e + \delta_c = 1, \qquad (7)$$

де $\delta_e = |\, n_N - n_H \,|$ — різниця між числом пружних і в'язких елементів у РТ; $\delta_c = |\, n_I - n_- \,|$ — різниця між кількістю паралельних і послідовних включень.

Проаналізуємо особливості об'єднання РТ.

1. Розглянемо об'єднання РТ N_{2k-1} і N_{2l-1}. За паралельного об'єднання РТ коефіцієнти РР знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k-1)} \cdot P^{(l-1)} = P^{(k+l-2)},$$

$$Q = P^{(l-1)} \cdot H_k^R D Q^{(k-1)} +$$

$$+ H_l^R D Q^{(l-1)} \cdot P^{(k-1)} = \left(H_k^R + H_l^R \right) \times$$

$$\times D \left(P^{(k-1)} Q^{(k-1)} H_k^R / \left(H_k^R + H_l^R \right) + \right.$$

$$\left. + Q^{(l-1)} P^{(k-1)} H_l^R / \left(H_k^R + H_l^R \right) \right) =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R \right) D Q^{(k+l-2)}.$$

Запишемо РР у стандартній формі так:

$$P^{(k+l-2)}\sigma - \left(H_k^R + H_l^R \right) D Q^{(k+l-2)} \varepsilon = 0.$$

Тоді узагальнена форма об'єднаного РТ матиме вигляд

$$N_{2(k+l)-3} = N_{2(k+l-1)-1},$$

його ранг менший на одиницю від суми рангів РТ-доданків, а індекс менший на одиницю від числа елементів у цих доданках, тобто відбувається виродження. Лишній елемент в об'єднаному РТ — в'язкий.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має один лишній ВЕ, а кількість послідовних і паралельних включень однакова. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнює двом, а друга з урахуванням паралельного типу приєднання РТ-доданків — одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

За послідовного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k-1)} \cdot H_l^R D Q^{(l-1)} +$$

$$+ H_k^R D Q^{(k-1)} \cdot P^{(l-1)} = \left(H_k^R + H_l^R\right)\times$$

$$\times D\left(P^{(k-1)} Q^{(l-1)} H_l^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R\right) +\right.$$

$$\left. + P^{(l-1)} Q^{(k-1)} H_k^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R\right)\right) =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R\right) D P^{(k+l-2)},$$

$$Q = H_k^R D Q^{(k-1)} H_l^R D Q^{(l-1)} =$$

$$= H_k^R H_l^R D^2 Q^{(k+l-2)}.$$

РР об'єднаного РТ у стандартній формі матиме вигляд

$$\left(H_k^R + H_l^R\right)\times$$

$$\times D\left[P^{(k+l-2)}\sigma - H_{kl}^R D Q^{(k+l-2)}\varepsilon\right] = 0,$$

де

$$H_{kl}^R = H_k^R H_l^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R\right).$$

Воно має спільний нулевий корінь зводиться до рівняння

$$P^{(k+l-2)}\sigma - H_{kl}^R D Q^{(k+l-2)}\varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ є

$$N_{2(k+l-1)-1}.$$

Звідси випливає, що ранг об'єднаного РТ менший на одиницю від суми рангів РТ-доданків, а індекс менший на одиницю від числа елементів у РТ-доданках, і є виродження.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має один лишній ВЕ і порівну різних типів включень, тому в балансі об'єднаного РТ перша складова дорівнює двом, а друга — одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ є незбалансованим.

2. Розглянемо приєднання РТ N_{2k-1} до РТ N_{2l}. За паралельного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k-1)} \cdot P^{(l)} = P^{(k+l-1)},$$

$$Q = P^{(l)} \cdot H_k^R D Q^{(k-1)} +$$

$$+ H_l^R D Q^{(l-1)} \cdot P^{(k-1)} = \left(H_k^R + H_l^R\right)\times$$

$$\times D\left(P^{(l)} Q^{(k-1)} H_l^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R\right) +\right.$$

$$\left. + Q^{(l-1)} P^{(k-1)} H_l \Big/ \left(H_k^R + H_l^R\right)\right) =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R\right) D Q^{(k+l-1)}.$$

Запишемо РР у стандартній формі:

$$P^{(k+l-1)}\sigma - \left(H_k^R + H_l^R\right) D Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що результатом паралельного приєднання РТ N_{2k-1} до РТ N_{2l} є РТ $N_{2(k+l)-1}$, ранг якого дорівнює сумі рангів у його РТ-складових, а число елементів у ньому дорівнює його індексу. Отже, об'єднане РТ є невироджене.

Підрахуємо його баланс. РТ N_{2k-1} має один лишній ВЕ і порівну послідовних і паралельних включень, РТ N_{2k} — порівну пружних і в'язких елементів, а число послідовних включень на одиницю більше, ніж паралельних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова дорівнює одиниці, друга з урахуванням паралельного типу об'єднання РТ-складових — нулю. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим

За послідовного об'єднання цих РТ коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k-1)} \cdot H_l^R D\, Q^{(l-1)} +$$

$$+ H_k^R D\, Q^{(k-1)} \cdot P^{(l)} = \left(H_k^R + H_l^R \right) \times$$

$$\times D \left(P^{(k-1)} Q^{(l-1)} H_l^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R \right) + \right.$$

$$\left. + P^{(l)} Q^{(k-1)} H_k^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R \right) \right) =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R \right) D\, P^{(k+l-1)},$$

$$Q = H_k^R D\, Q^{(k-1)} H_l^R D\, Q^{(l-1)} =$$

$$= H_k^R H_l^R D^2 Q^{(k+l-2)}.$$

РР об'єднаного РТ у стандартній формі матиме вигляд

$$\left(H_k^R + H_l^R \right) D \left[P^{(k+l-1)} \sigma - \right.$$

$$\left. - H_{kl}^R D\, Q^{(k+l-2)} \varepsilon \right] = 0,$$

воно має спільний нульовий корінь і зводиться, як і вище, до рівняння

$$P^{(k+l-1)} \sigma - H_{kl}^R D\, Q^{(k+l-2)} \varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що об'єднане РТ є $N_{2(k+l-1)}$, його ранг на одиницю менший від суми рангів РТ-складових, індекс менший на одиницю від числа елементів, а тому є виродження.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. РТ N_{2k-1} має один лишній ВЕ і порівну послідовних і паралельних включень. РТ N_{2k} має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень на одиницю більше, ніж паралельних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова дорівнює одиниці, друга з урахуванням послідовного типу — двом. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

3. Розглянемо об'єднання РТ N_{2k-1} до РТ H_{2l}. За паралельного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k-1)} \cdot P^{(l-1)} = P^{(k+l-2)},$$

$$Q = P^{(l-1)} \cdot H_k^R D\, Q^{(k-1)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k-1)} =$$

$$= E_l^R \left(P^{(l-1)} Q^{(k-1)} \tau_{kl} + Q^{(l)} P^{(k-1)} \right) =$$

$$= E_l^R Q^{(k+l-1)}.$$

РР об'єднаного РТ запишемо у стандартній формі

$$P^{(k+l-2)} \sigma - E_l^R Q^{(k+l-1)} \varepsilon = 0.$$

Внаслідок паралельного приєднання РТ N_{2k-1} до РТ H_{2l} утворилося РТ, яке в узагальненій формі запишемо так:

$$N_{2(k+l-1)}.$$

Звідси випливає, що ранг об'єднаного РТ на одиницю менший від суми рангів РТ-складових, індекс менший на одиницю від числа елементів у ньому, тому відбувається виродження.

Перевіримо баланс об'єднаного РТ. РТ H_{2l} має порівну пружних і в'язких елементів, число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних, у РТ N_{2k-1} є лишній ВЕ і порівну послідовних і паралельних включень. Унаслідок паралельного приєднання РТ H_{2l} до РТ N_{2k-1} перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, друга з урахуванням паралельного типу об'єднання РТ-складових — двом. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

За послідовного об'єднання цих РТ коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l-1)} + H_k^R D\, Q^{(k-1)} \cdot P^{(l-1)} =$$

$$= E_l^R \left(P^{(k-1)} Q^{(l-1)} + P^{(l)} Q^{(k-1)} \tau_{kl} \right) =$$

$$= E_l^R P^{(k+l-1)},$$

$$Q = H_k^R D\, Q^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = H_k^R E_l^R D\, Q^{(k+l-1)},$$

де $\tau_{kl} = H_k^R \big/ E_l^R$.

Після скорочення на константу E_l^R запишемо РР у стандартній формі:

$$P^{(k+l-1)}\sigma - H_k^R D\,Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0.$$

Звідси виходить, що результатом послідовного приєднання N_{2k-1} до РТ H_{2l} є РТ $N_{2(k+l)-1}$, ранг якого дорівнює сумі рангів РТ-складових, число елементів у ньому — його індексу, тобто маємо невироджений випадок.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Складові рівняння балансу в РТ N_{2k-1} такі: $\delta_e = 1$, $\delta_c = 0$ (в'язких елементів більше), в РТ H_{2l} — $\delta_e = 0$, $\delta_c = 1$ (паралельних включень більше). Рівняння балансу з урахуванням послідовного типу об'єднання РТ-складових матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

4. Приєднаємо РТ N_{2k-1} до РТ H_{2l+1}. За паралельного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k-1)} \cdot P^{(l)} = P^{(k+l-1)},$$

$$Q = P^{(l)} \cdot H_k^R D\,Q^{(k-1)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k-1)} =$$

$$= E_l^R \left(D\,P^{(l)} Q^{(k-1)} \tau_{kl} + Q^{(l)} P^{(k-1)} \right) =$$

$$= E_l^R Q^{(k+l)}.$$

Запишемо його у стандартній формі:

$$P^{(k+l-1)}\sigma - E_l^R Q^{(k+l)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що результатом паралельного приєднання РТ N_{2k-1} до РТ H_{2l+1} є РТ $H_{2(k+l)}$, число елементів і ранг в якому збігаються із сумою елементів і рангів у його складових, тому об'єднане РТ є невиродженим.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. РТ N_{2k-1} має один лишній ВЕ і порівну послідовних та паралельних включень, а РТ H_{2l+1} має один лишній ПЕ і порівну послідовних та паралельних включень. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнюватиме нулю, друга з урахуванням послідовного типу об'єднання РТ-складових — одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

Проаналізуємо послідовне об'єднання цих РТ. Коефіцієнти РР об'єднаного РТ знаходимо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} + H_k^R D\,Q^{(k-1)} \cdot P^{(l)} =$$

$$= E_l^R \left(P^{(k-1)} Q^{(l)} + P^{(l)} Q^{(k-1)} \tau_{kl} \right) =$$

$$= E_l^R P^{(k+l)},$$

$$Q = H_k^R D\,Q^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = H_k^R D\,E_l^R Q^{(k+l-1)}.$$

Після скорочення на константу E_l^R РР запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k+l)}\sigma - H_k^R D\,Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що результатом послідовного приєднання РТ N_{2k-1} до РТ H_{2l+1} є РТ $N_{2(k+l)}$, число елементів і ранг в якому збігаються із сумою елементів і рангів у його складових, тобто маємо невироджений випадок.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. З огляду на те, що РТ N_{2k-1} має один лишній ВЕ, а РТ H_{2l+1} — ПЕ і в обох РТ порівну послідовних і паралельних включень, в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу буде збалансованою, а друга з урахуванням послідовного типу об'єднання РТ-складових дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

5. Проаналізуємо об'єднання РТ N_{2k} і N_{2l}. За паралельного об'єднання коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k)} \cdot P^{(l)} = P^{(k+l)},$$

$$Q = P^{(l)} \cdot H_k^R D\,Q^{(k-1)} + H_l^R D\,Q^{(l-1)} \cdot P^{(k)} =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R \right) \times$$

$$\times D \left(P^{(l)} Q^{(k-1)} H_k^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R \right) + \right.$$

$$\left. + Q^{(l-1)} P^{(k)} H_l^R \Big/ \left(H_k^R + H_l^R \right) \right) =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R \right) D\,Q^{(k+l-1)}.$$

У стандартній формі воно матиме вигляд

$$P^{(k+l)}\sigma - \left(H_k^R + H_l^R \right) D\,Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0,$$

а в узагальненій формі об'єднане РТ запишемо, як $N_{2(k+l)}$. Число елементів і ранг у ньому збігаються із сумою елементів і рангів у його складових, тобто є невиродженість.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень на одиницю більше, ніж паралельних. Тому в об'єднаному РТ перша складова балансу буде збалансованою, друга з урахуванням паралельного типу об'єднання РТ-складових дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

За послідовного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k)} \cdot H_l^R D\, Q^{(l-1)} + H_k^R D\, Q^{(k-1)} \cdot P^{(l)} =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R\right)\times$$

$$\times D\left(P^{(k)} Q^{(l-1)} H_l^R \,/\, \left(H_k^R + H_l^R\right) +\right.$$

$$\left. + P^{(l)} Q^{(k-1)} H_k^R \,/\, \left(H_k^R + H_l^R\right)\right) =$$

$$= \left(H_k^R + H_l^R\right) D P^{(k+l-1)},$$

$$Q = H_k^R D\, Q^{(k-1)} \cdot H_l^R D\, Q^{(l-1)} =$$

$$= H_k^R H_l^R D^2 Q^{(k+l-2)},$$

РР об'єднаного РТ у стандартній формі запишемо так:

$$\left(H_k^R + H_l^R\right) D \left[P^{(k+l-1)}\sigma - \right.$$

$$\left. - H_{kl}^R D\, Q^{(k+l-2)}\varepsilon\right] = 0.$$

Як показано вище, воно зводиться до рівняння

$$P^{(k+l-2)}\sigma - H_{kl}^R D\, Q^{(k+l-2)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що об'єднане РТ є $N_{2(k+l-1)}$, його ранг на одиницю менший від суми рангів РТ-складових, число елементів на два перевищує його індекс, тому є виродження.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень на одиницю більше, ніж паралельних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу буде збалансованою, друга з урахуванням послідовного типу об'єднання РТ-складових дорівнюватиме трьом. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

6. Розглянемо об'єднання РТ N_{2k} з РТ H_{2l}. За паралельного об'єднання коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k)} \cdot P^{(l-1)} = P^{(k+l-1)},$$

$$Q = P^{(l-1)} \cdot H_k^R D\, Q^{(k-1)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k)} =$$

$$= E_l^R \left(P^{(k)} Q^{(l)} + Q^{(k-1)} P^{(l-1)} \tau_{kl}\right) =$$

$$= E_l^R Q^{(k+l)}.$$

РР запишемо у стандартній формі так:

$$P^{(k+l-1)}\sigma - E_l^R Q^{(k+l)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що об'єднане РТ — це $H_{2(k+l)}$. Його ранг збігається із сумою рангів його складових, число елементів у ньому — з його індексом, тобто є невиродженість.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень в N_{2k} на одиницю більше, ніж паралельних, а в H_{2k} навпаки. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу буде збалансованою, а друга з урахуванням паралельного типу об'єднання РТ-складових дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

За послідовного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k)} \cdot E_l^R Q^{(l)} + H_k^R D\, Q^{(k-1)} \cdot P^{(l-1)} =$$

$$= E_l^R \left(P^{(k)} Q^{(l)} + P^{(l)} Q^{(k-1)} \tau_{kl}\right) = E_l^R P^{(k+l)},$$

$$Q = H_k^R D\,Q^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = H_k^R E_l^R D\,Q^{(k+l-1)}.$$

Після скорочення на константу E_l^R у стандартній формі РР матиме вигляд

$$P^{(k+l)}\sigma - H_k^R D\,Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ є $N_{2(k+l)}$. Отже, воно зберегло ранг та число елементів і є невиродженість.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень у РТ N_{2k} на одиницю більше, ніж паралельних, у РТ H_{2k} навпаки — число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу буде збалансованою, друга з урахуванням виду об'єднання двох РТ дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

7. Розглянемо приєднання РТ N_{2k} до РТ H_{2l+1}. За паралельного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k)} \cdot P^{(l)} = P^{(k+l)},$$

$$Q = P^{(l)} \cdot H_k^R D\,Q^{(k-1)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k-1)} =$$

$$= E^R \left(P^{(l)} Q^{(k-1)} \tau_{kl} D + Q^{(l)} P^{(k)} \right) =$$

$$= E_l^R Q^{(k+l)}.$$

У стандартній формі РР запишемо так:

$$P^{(k+l)}\sigma - E_l^R Q^{(k+l)}\varepsilon = 0.$$

Отже, результатом паралельного приєднання РТ N_{2k} до РТ H_{2l+1} є РТ $H_{2(k+l)+1}$. Число елементів в об'єднаному РТ дорівнює його індексу, його ранг збігається із сумою рангів у його РТ-складових, тому об'єднане РТ є невиродженим.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Вище зазначено, що РТ H_{2k+1} має один лишній ПЕ і порівну послідовних і паралельних включень, а РТ N_{2l} має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень у ньому на одиницю більше, ніж паралельних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнює одиниці, друга з урахуванням паралельного типу об'єднання РТ-складових — нулю. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

За послідовного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k)} \cdot E_l^R Q^{(l)} + H_k^R D\,Q^{(k-1)} \cdot P^{(l)} =$$

$$= E_l^R \left(P^{(k)} Q^{(l)} + D P^{(l)} Q^{(k-1)} \tau_{kl} \right) =$$

$$= E_l^R P^{(k+l)},$$

$$Q = H_k^R D\,Q^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = H_k^R E_l^R D\,Q^{(k+l-1)}.$$

Після скорочення обох ЛДВ на сталу E_l^R РР об'єднаного РТ набуде вигляду

$$P^{(k+l)}\sigma - H_k^R D\,Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0,$$

тобто об'єднане РТ є $N_{2(k+l)}$. Звідси випливає, що ранг об'єднаного РТ збігається із сумою рангів у його складових, число елементів у ньому на одиницю перевищує його індекс, і, отже, є виродження.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. РТ N_{2k} має порівну пружних і в'язких елементів, число послідовних включень на одиницю більше, ніж паралельних, РТ H_{2k+1} має один лишній ПЕ і порівну послідовних і паралельних включень. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнюватиме одиниці, друга з урахуванням послідовного виду об'єднання двох РТ — двом. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

8. Проаналізуємо об'єднання РТ H_{2k} і H_{2l}. За паралельного об'єднання коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k-1)} \cdot P^{(l-1)} = P^{(k+l-2)},$$

$$Q = P^{(l-1)} \cdot E_k^R Q^{(k)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k-1)} =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) D \left(P^{(l-1)} Q^{(k)} E_k^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R \right) + \right.$$

$$+Q^{(l)}P^{(k-1)}E_l \Big/ \left(E_k^R + {}^R_l\right)\Big) =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R\right)Q^{(k+l-1)}.$$

Запишемо РР у стандартній формі:

$$P^{(k+l-2)}\sigma - \left(E_k^R + E_l^R\right)Q^{(k+l-1)}\varepsilon = 0.$$

В узагальненому вигляді об'єднане РТ запишемо, як $H_{2(k+l-1)}$. Звідси випливає, що ранг об'єднаного РТ на одиницю менший від суми рангів РТ-складових, число елементів у ньому на дві одиниці перевищує його індекс, тобто є виродженість.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має порівну пружних і в'язких елементів, число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу буде збалансованою, а друга з урахуванням паралельного типу об'єднання двох РТ дорівнюватиме трьом. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

За послідовного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} + E_k^R Q^{(k)} \cdot P^{(l-1)} =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R\right)\Big(P^{(k-1)}Q^{(l)}E_l^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R\right) +$$

$$+ P^{(l-1)}Q^{(k-1)}E_k^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R\right)\Big) =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R\right)P^{(k+l-1)},$$

$$Q = E_k^R Q^{(k)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = E_k^R E_l^R Q^{(k+l)}.$$

РР об'єднаного РТ після скорочення обох ЛДВ на сталу $E_k^R + E_l^R$ матиме стандартний вигляд

$$P^{(k+l-1)}\sigma - E_{kl}^R Q^{(k+l)}\varepsilon = 0,$$

де $E_{kl}^R = E_k^R E_l^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R\right)$.

Звідси випливає, що об'єднане РТ є $H_{2(k+l)}$. Його ранг дорівнює сумі рангів РТ-складових, число елементів у ньому дорівнює його індексу, отже, об'єднане РТ є невиродженим.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має порівну пружних і в'язких елементів, число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу буде збалансованою, друга з урахуванням послідовного типу об'єднання РТ-складових дорівнюватиме одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

9. Роглянемо приєднання РТ H_{2k} до РТ H_{2l+1}. За паралельного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k-1)} \cdot P^{(l)} = P^{(k+l-1)},$$

$$Q = P^{(l)} \cdot E_k^R Q^{(k)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k-1)} =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R\right)\Big(P^{(l)}Q^{(k)}E_k^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R\right) +$$

$$+ Q^{(l)}P^{(k-1)}E_l^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R\right)\Big) =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R\right)Q^{(k+l)}.$$

РР запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k+l-1)}\sigma - \left(E_k^R + E_l^R\right)Q^{(k+l)}\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що результатом паралельного приєднання РТ H_{2k} до РТ H_{2l+1} є РТ $H_{2(k+l)}$, ранг якого дорівнює сумі рангів його РТ-складових, число елементів у ньому на одиницю перевищує його індекс, отже об'єднане РТ буде виродженим.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Уже зазначалось, що РТ H_{2k} має порівну пружних і в'язких елементів, а число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних, РТ H_{2l+1} має один лишній ПЕ і порівну послідовних і паралельних включень. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнює одиниці, друга з урахуванням паралельного типу об'єднання двох РТ — двом. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

За послідовного об'єднання цих РТ коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k-1)} \cdot E_l^R Q^{(l)} + E_k^R Q^{(k)} \cdot P^{(l)} =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) \left(P^{(k-1)} Q^{(l)} E_l^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R \right) + \right.$$

$$\left. + P^{(l)} Q^{(k-1)} E_k^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R \right) \right) =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) P^{(k+l)},$$

$$Q = E_k^R Q^{(k)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = E_k^R E_l^R Q^{(k+l)}.$$

Після скорочення обох ЛДВ на сталу $E_k^R + E_l^R$ запишемо РР у стандартній формі:

$$P^{(k+l)} \sigma - E_{kl}^R Q^{(k+l)} \varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що результатом послідовного приєднання РТ H_{2k} до РТ H_{2l+1} є РТ $H_{2(k+l)+1}$, ранг якого дорівнює сумі рангів його РТ-складових, його індекс дорівнює числу елементів у його складових, тобто маємо невиродженість.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Враховуючи, що РТ H_{2k} має порівну пружних і в'язких елементів, число паралельних включень на одиницю більше, ніж послідовних, РТ H_{2l+1} має один лишній ПЕ і порівну послідовних і паралельних включень, у балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнює одиниці, а друга з урахуванням послідовного типу об'єднання двох РТ буде збалансованою. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

тобто об'єднане РТ буде збалансованим.

10. Проаналізуємо приєднання РТ H_{2k+1} до РТ H_{2l+1}. За паралельного об'єднання коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (3):

$$P = P^{(k)} \cdot P^{(l)} = P^{(k+l)},$$

$$Q = P^{(l)} \cdot E_k^R Q^{(k)} + E_l^R Q^{(l)} \cdot P^{(k)} =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) D \left(P^{(l)} Q^{(k)} E \Big/ \left(E_l^R + E_k^R \right) + \right.$$

$$\left. + Q^{(l)} P^{(k)} E_l \Big/ \left(E_k^R + E_l^R \right) \right) =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) Q^{(k+l)}.$$

Запишемо РР у стандартній формі:

$$P^{(k+l)} \sigma - \left(E_k^R + E_l^R \right) Q^{(k+l)} \varepsilon = 0.$$

Звідси отримаємо об'єднане РТ в узагальненому вигляді — $H_{2(k+l)+1}$. Його ранг дорівнює сумі рангів РТ-складових, його індекс на одиницю менший за кількість елементів у складових, тому маємо вироджений випадок.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. РТ-доданки мають один лишній ПЕ і порівну послідовних і паралельних включень. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнює двом, друга з урахуванням паралельного типу об'єднання двох РТ — одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

За послідовного об'єднання цих тіл коефіцієнти РР об'єднаного РТ знайдемо за допомогою формули (4):

$$P = P^{(k)} \cdot E_l^R Q^{(l)} + E_k^R Q^{(k)} \cdot P^{(l)} =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) \left(P^{(k)} Q^{(l)} E_l^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R \right) + \right.$$

$$\left. + P^{(l)} Q^{(k)} E_k^R \Big/ \left(E_k^R + E_l^R \right) \right) =$$

$$= \left(E_k^R + E_l^R \right) P^{(k+l)},$$

$$Q = E_k^R Q^{(k)} \cdot E_l^R Q^{(l)} = E_k^R E_l^R Q^{(k+l)}.$$

Після скорочення обох ЛДВ на сталу $E_k^R + E_l^R$ РР запишемо у стандартній формі:

$$P^{(k+l)} \sigma - E_{kl}^R Q^{(k+l)} \varepsilon = 0,$$

узагальнений вигляд об'єднаного РТ — $H_{2(k+l)+1}$. Ранг об'єднаного РТ дорівнює сумі рангів його РТ-складових, його індекс на одиницю менше кількості елементів у складових, тобто є виродженість.

Підрахуємо баланс об'єднаного РТ. Кожен з РТ-доданків має один лишній ПЕ і порівну послідовних і паралельних включень. Тому в балансі об'єднаного РТ перша складова балансу дорівнює двом, друга з урахуванням послідовного типу об'єднання двох РТ — одиниці. Рівняння балансу матиме вигляд

$$\delta_e + \delta_c = 3,$$

тобто об'єднане РТ буде незбалансованим.

Випишемо результати об'єднання двох збалансованих РТ в окрему табличку:

$$N_{2k-1} \mid N_{2k-1} = N_{2(k+l-1)-1},$$

$$N_{2k-1} - N_{2l-1} =$$
$$= N_{2(k+l-1)-1},\ N_{2k-1} \mid N_{2l} = N_{2(k+l)-1},$$

$$N_{2k-1} - N_{2l} = N_{2(k+l-1)},$$

$$N_{2k-1} \mid H_{2l} = H_{2(k+l-1)},$$

$$N_{2k-1} - H_{2l} = N_{2(k+l)-1},$$

$$N_{2k-1} \mid H_{2l+1} = H_{2(k+l)},$$

$$N_{2k-1} - H_{2l+1} = N_{2(k+l)},$$

$$N_{2k} \mid N_{2l} = N_{2(k+l)},$$

$$N_{2k} - N_{2l} = N_{2(k+l-1)},\ N_{2k} \mid H_{2l} = H_{2(k+l)},$$

$$N_{2k} - H_{2l} = N_{2(k+l)},$$

$$N_{2k} \mid H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1},$$

$$N_{2k} - H_{2l+1} = N_{2(k+l)},$$

$$H_{2k} \mid H_{2l} = H_{2(k+l-1)},$$

$$H_{2k} - H_{2l} = H_{2(k+l)},$$

$$H_{2k} \mid H_{2l+1} = H_{2(k+l)},$$

$$H_{2k} - H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1},$$

$$H_{2k+1} \mid H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1},$$

$$H_{2k+1} - H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1}.$$

Всього налічуємо 20 різних варіантів. З них половина буде виродженими, половина — невиродженими.

Випишемо окремо невироджені випадки:

$$N_{2k-1} \mid N_{2l} = N_{2(k+l)-1},$$

$$N_{2k-1} - H_{2l} = N_{2(k+l)-1},$$

$$N_{2k-1} \mid H_{2l+1} = H_{2(k+l)},$$

$$N_{2k-1} - H_{2l+1} = N_{2(k+l)},$$

$$N_{2k} \mid N_{2l} = N_{2(k+l)},\quad N_{2k} \mid H_{2l} = H_{2(k+l)},$$

$$H_{2k} - N_{2l} = N_{2(k+l)},$$

$$N_{2k} \mid H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1},$$

$$H_{2k} - H_{2l} = H_{2(k+l)},$$

$$H_{2k} - H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1}. \tag{8}$$

Характерною особливістю невироджених об'єднань є те, що вони виконуються з дотриманням умови балансу (7). Звідси випливає така теорема.

Теорема. *Необхідними і достатніми умовами невиродженості РТ, утвореного об'єднанням двох збалансованих РТ, є дотримання умови балансу (7) і вимога, щоб характеристичні рівняння ЛДВ P_i за паралельного і Q_i за послідовного об'єднання не мали спільних коренів.*

Переконаємося, що ці умови будуть необхідними. Дійсно, якщо результуюче РТ є невиродженим, то з рівняння (8) доходимо висновку, що об'єднання двох РТ буде невиродженим лише тоді, коли воно виконується з дотриманням балансу (7), а в РТ-доданках часи післядії за паралельного і часи релаксації за послідовного об'єднання не збігаються.

Водночас ці умови будуть і достатніми. Це випливає з того факту, що, якщо виконуються умови балансу і дотримуються умови щодо незбіжності коренів характеристичних рівнянь ЛДВ P за паралельного і характеристичних рівнянь ЛДВ Q за послідовного об'єднання РТ-доданків, то результуюче РТ, згідно з рівняннями (8), буде невиродженим.

Як приклад застосування РТ високого порядку можна навести побудову функцій повзучості та післядії для знаходження ядер інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду, що описують процеси післядії в непружних середовищах, які записують так [Рейнер, 1965; Савін, Рущицький, 1975; Колтунов, 1976 та ін.]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau\right], \tag{9}$$

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau\right], \quad (10)$$

де $K(t-\tau)$ — ядро інтегрального рівняння (9); $R(t-\tau)$ — його резольвента, так що вираз (10) є розв'язком рівняння (9), і навпаки — вираз (9) буде розв'язком рівняння (10).

Ядро інтегрального рівняння (9) визначають через швидкість функції повзучості $\dot{\varepsilon}$ у такий спосіб [Колтунов, 1976]:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\,\dot{\varepsilon}. \quad (11)$$

Функцію повзучості знаходять з реологічних рівнянь (1). Розглянемо будь-яке з квазіпружних РТ n-го рангу. Якщо $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$, для деформації (функції повзучості) ε одержимо диференціальне рівняння

$$\varepsilon^{(n)} + c_1\varepsilon^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{\varepsilon} + \varepsilon / b_n = \\ = \sigma_0 / \left(E_n^R b_n\right), \quad (12)$$

де $c_i = b_{n-i} / b_n$. Його загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{\varepsilon}, \quad (13)$$

Тут $\hat{\varepsilon} = \sigma_0 / \left(E_n^R b_n\right)$ — частковий розв'язок рівняння (12); $\lambda_i = -1/\nu_i$ — корені характеристичного рівняння, породженого диференціальним рівнянням (12):

$$\nu^n + c_1\nu^{n-1} + c_2\nu^{n-2} + \ldots + 1 / b_n = 0,$$

де ν_i — часи релаксації деформацій за постійного напруження (часи післядії або часи повзучості); d_i — сталі інтегрування, які визначають з початкових умов.

Функція повзучості, що записана згідно з рівнянням (13), є по суті розкладом деформації в ряд по експонентах. Якщо маємо експериментально отриману функцію повзучості, то її можна розкласти в ряд по експонентах. Їх можна розглядати як базис, і за цим розкладенням отримаємо спектр часів післядії, за допомогою яких можна будувати реологічні тіла.

Підставивши у рівняння (11) значення функції повзучості, підрахованої за допомогою рівняння (13), одержимо для ядра $K(t-\tau)$ інтегрального рівняння (9) такий вираз:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\tau_i}\,c_i\,e^{-t/\tau_i}\right]. \quad (14)$$

Зауважимо, що функцію швидкості повзучості, яка потрібна для побудови ядра $K(t-\tau)$ інтегрального рівняння (9), можна отримати з реологічних рівнянь (1), розглянувши також будь-яке з квазів'язких РТ n-го рангу. Якщо $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$, для швидкості деформації (функції швидкості повзучості) $\dot{\varepsilon} = v$ отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$v^{(n-1)} + c_1 v^{(n-2)} + \ldots + c_{n-2} v + v / b_{n-1} = \\ = \sigma_0 / \left(H_n^R b_{n-1}\right), \quad (15)$$

де $c_i = b_{n-2-i} / b_{n-1}$; запишемо його розв'язок:

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} e_i \exp\left(\mu_i t\right) + \hat{v}, \quad (16)$$

де $\hat{v} = \sigma_0 / \left(H_n^R b_{n-1}\right)$ — частковий розв'язок рівняння (15); μ_i — корені характеристичного рівняння, породженого диференціальним рівнянням (15):

$$\mu^{n-1} + c_1\mu^{n-2} + c_2\mu^{n-3} + \ldots + 1 / b_{n-1} = 0, \quad (17)$$

а $\tau_i = -1/\mu_i$ — часи релаксації деформацій за постійного напруження (часи післядії або часи повзучості).

Як випливає з рівнянь (13), (16), функції швидкості повзучості, отримані за допомогою РР (1), різняться порядком.

Побудуємо резольвенту $R(t-\tau)$ рівняння (9). Її виражають через функцію релаксації $\sigma(t)$, яка описує процес релаксації напружень у середовищі за постійної деформації ε_0 [Колтунов, 1976]:

$$R(t-\tau) = \dot{\sigma}(t) / \varepsilon_0 .$$

Функцію релаксації $\sigma(t)$ знаходимо з реологічних рівнянь (1). Розглянемо будь-яке з квазіпружних РТ n-го рангу, наприклад H_{2n+1}. Якщо $\varepsilon = \varepsilon_0 = \mathrm{const}$, для напруження (функції релаксації) σ одержимо диференціальне рівняння

$$\sigma^{(n)} + c_1\sigma^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{\sigma} + \sigma / a_n = \\ = \varepsilon_0 / \left(E_n^R a_n\right), \quad (18)$$

де $c_i = a_{n-i} / a_n$. Його загальний розв'язок запишеться так:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{\sigma},$$

де $\hat{\sigma}_0 = \varepsilon_0 \Big/ \left(E_n^R a_n\right)$ — частковий розв'язок рівняння (18); $\lambda_i = -1/\nu_i$ — корені характеристичного рівняння, породженого диференціальним рівнянням (18):

$$\nu^n + c_1 \nu^{n-1} + c_2 \nu^{n-2} + \ldots + 1 / a_n = 0,$$

ν_i — часи релаксації напружень за постійної деформації (часи релаксації); d_i — сталі інтегрування, які визначають з початкових умов.

Функція повзучості, що записана згідно з рівнянням (13), є по суті розкладом деформації в ряд по експонентах. Якщо маємо експериментально отриману функцію повзучості, то її можна розкласти в ряд по експонентах, які можна розглядати як базис, і по цьому розкладанню отримати спектр часів післядії, за допомогою яких можна будувати реологічні тіла.

Систему (1) можна представити в іншій формі через часи релаксацій. ЛДВ P і Q є поліномами від параметра D, їх можна розкласти на множники і записати у вигляді

$$P_k = \prod_{i=1}^{k-l} \left(D - \mu_i\right),$$

$$Q_k = D^j M_R \prod_{i=1}^{k-j} \left(D - \lambda_i\right),$$

де $j = 0$, якщо ЛДВ Q має АК, і $j = 1$ у протилежному випадку; $l = 1$, якщо РТ є квазів'язким, і $l = 0$, якщо РТ буде квазіпружним; λ_i і μ_i — корені характеристичних поліномів Q та P відповідно, які виражають через часи релаксацій так:

$$\lambda_i = -\tau_i^{-1}, \quad \mu_i = -\nu_i^{-1},$$

де τ_i — часи релаксації напружень за постійної деформації (часи релаксацій); ν_i — часи релаксації деформацій за постійного напруження (часи післядії, часи повзучості); M_R — релаксуючий модуль (пружний, якщо в ЛДВ Q є АК, і в'язкий — у протилежному випадку).

Виразимо далі корені характеристичних поліномів через часи релаксацій і отримаємо у підсумку форму запису РР системи (1) через часи релаксацій:

$$\left(N_{2k-1}\right): a_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(D + \mu_i\right)\sigma = H_k^R D\, b_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(D + \lambda_i\right)\varepsilon,$$

$$\left(N_{2k}\right): a_k \prod_{i=1}^{k} \left(D + \mu_i\right)\sigma = H_k^R D\, b_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(D + \lambda_i\right)\varepsilon,$$

$$\left(H_{2k}\right): a_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(D + \mu_i\right)\sigma = E_k^R b_k \prod_{i=1}^{k} \left(D + \lambda_i\right)\varepsilon,$$

$$\left(H_{2k+1}\right): a_k \prod_{i=1}^{k} \left(D + \mu_i\right)\sigma = E_k^R b_k \prod_{i=1}^{k} \left(D + \lambda_i\right)\varepsilon. \qquad (19)$$

Представлення РТ у формі (6) дає змогу провести порівняння з розбиттям РТ, за [Бленд, 1965]:

$$\prod_{i=1}^{N+1} \left(D + \mu_i\right)\sigma = E \prod_{j=1}^{N} \left(D + \lambda_j\right) D\varepsilon \quad \left(B_1\right),$$

$$\prod_{i=1}^{N} \left(D + \mu_i\right)\sigma = E \prod_{j=1}^{N} \left(D + \lambda_j\right)\varepsilon \quad \left(B_2\right),$$

$$\prod_{i=1}^{N} \left(D + \mu_i\right)\sigma = \eta' \prod_{j=1}^{N} \left(D + \lambda_j\right) D\varepsilon \quad \left(B_3\right),$$

$$\prod_{i=1}^{N-1} \left(D + \mu_i\right)\sigma = \eta' \prod_{j=1}^{N} \left(D + \lambda_j\right)\varepsilon \quad \left(B_4\right), \qquad (20)$$

де N — число нормальних координат, за допомогою яких описують деформацію в РТ.

Зауважимо, що у формулі B_4 (формула (85) на с. 62 у праці [Бленд, 1965]) показники над добутками треба взяти на одиницю менше, тому що вираз для деформації

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\eta D}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i B_i}{D+\lambda_i}\right)\sigma,$$

де сталі B_i мають розмірність оберненого пружного модуля, при $1/E=1/\eta=0$ зводиться до рівняння

$$\prod_{i=1}^{N}(D+\lambda_i)\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i B_i\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N}\left(D+\lambda_j\right)\sigma=$$

$$=\eta_0^{-1}\prod_{i=1}^{N-1}(D+\mu_i)\sigma,$$

де $\eta_0=\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i B_i\right)^{-1}=\eta'$ — в'язкий модуль.

Таке зображення певним чином пов'язане зі стандартною формою РТ k-го рангу (1): $B_1\propto N_{2k}, B_2\propto H_{2k+1}, B_3\propto N_{2k-1}, B_4\propto H_{2k}$.

Знайдемо зв'язок між кількістю нормальних координат в РТ N і його рангом k, а також між релаксуючими модулями E_k^R і H_k^R та параметрами η' і E, враховуючи, що за теоремою Вієта

$$1/a_n=\prod_{i=1}^{n}(-1)^i\mu_i=\prod_{i=1}^{n}\tau_i^{-1}$$

і

$$1/b_n=\prod_{i=1}^{n}(-1)^i\lambda_i=\prod_{i=1}^{n}\nu_i^{-1}.$$

Система рівнянь (14) матиме вигляд

$$\left(N_{2k-1}\right):\prod_{i=1}^{k-1}\tau_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\mu_i)\sigma=$$

$$=H_k^R D\prod_{i=1}^{k-1}\nu_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\lambda_i)\varepsilon,$$

$$\left(N_{2k}\right):\prod_{i=1}^{k}\tau_i\prod_{i=1}^{k}(D+\mu_i)\sigma=$$

$$=H_k^R D\prod_{i=1}^{k-1}\nu_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\lambda_i)\varepsilon,$$

$$\left(H_{2k}\right):\prod_{i=1}^{k-1}\tau_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\mu_i)\sigma=$$

$$=E_k^R\prod_{i=1}^{k}\nu_i\prod_{i=1}^{k}(D+\lambda_i)\varepsilon,$$

$$\left(H_{2k+1}\right):\prod_{i=1}^{k}\tau_i\prod_{i=1}^{k}(D+\mu_i)\sigma=$$

$$=E_k^R\prod_{i=1}^{k}\nu_i\prod_{i=1}^{k}(D+\lambda_i)\varepsilon. \quad (21)$$

Звідси, порівнявши системи (19) і (20), знаходимо, що $k=N+1$ для перших двох рівнянь систем (21) і $k=N$ — для інших, а для непружних модулів E і η' одержимо такі вирази:

$$E=H_N^R\, b_N\big/a_{N+1}=$$

$$=H_{N+1}^R\nu_{N+1}\prod_{i=1}^{N}(\tau_i/\nu_i)\;\;(B_1),$$

$$E=E_N^R\, b_N\big/a_N=E_{N+1}^R\prod_{i=1}^{N}(\tau_i/\nu_i)\;\;(B_2),$$

$$\eta'=H_{N+1}^R\, b_N\big/a_N=$$

$$=H_{N+1}^R\prod_{i=1}^{N}(\tau_i/\nu_i)\;\;(B_3),$$

$$\eta'=E_N^R\, b_N\big/a_{N-1}=$$

$$=\left(E_N^R/\tau_n\right)\prod_{i=1}^{N}(\tau_i/\nu_i)\;\;(B_4).$$

Якщо ввести, за [Зинер, 1954], нерелаксуючі модулі для РТ довільного рангу за формулою

$$M_U=M_R\, b_n/a_m,$$

де m і n — порядки ЛДВ P і Q, то можна зробити висновок, що модулі E і η' у формулах (20) є нерелаксуючими пружними та в'язкими модулями відповідно.

Прив'язка до нормальних координат не дає змоги впорядкувати РТ за рангом. Для того щоб досягти відповідності між зображенням РР у формі (19) і (20), слід збільшити на одиницю число нормальних координат, якщо у виразі для деформації (20) константа $\eta^{-1} = 0$. Ще зауважимо, що використання нормальних координат пов'язане зі значними математичними труднощами, чого позбавлений запропонований метод розбиття РТ на класи і побудови РТ високого рангу. Використання запропонованого алгоритму дає можливість одержати РТ високого рангу і позбавитись виродження за допомогою рівняння балансу (7).

Список літератури

Бицань Є. М. Про деякі особливості структури узагальненого реологічного тіла. 1. *Геофиз. журн.* 2014. Т. 35. № 1. С. 119—132.

Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. Москва: Мир, 1965. 200 с.

Зинер К. М. Упругость и неупругость металлов. Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. 396 с.

Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. Москва: Высш. шк., 1976. 277 с.

Рейнер М. Реология. Москва: Наука, 1965. 294 с.

Савін Г. М., Рущицький Я. Я. Елементи механіки спадкових середовищ. Київ: Вища шк., 1975. 252 с.

Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения. Москва: Госстройиздат, 1960. 152 с.

Of some peculiarities of generalized rheological body. 2

© *Ye. M. Bytzan, 2014*

Peculiarities of high-rank rheological bodies (RB) formation through unification of two RBs with lesser number of elements were analyzed. The necessary and sufficient conditions for the nonsingularity of complex RB are formulated, which lie in the equality of difference between the quantity of parallel and consecutive connections in the formed RB to one, and the RB relaxation times that are composed in case of parallel connections and aftereffect times in case of consecutive connection were different. The function of relaxation creeping were built, with the help of which the cores are built, as well as resolutions of integral equations of the 2nd kind, which describe nonelastic processes in media with aftereffects.

Key words: rheological body, rheological equation, deformation, tension, relaxation, rank, non-elasticity, non-degeneracy, wave field, rheological medium.

References

Bytzan Ye. M. On some peculiarities of generalized rheological body structure. 1. *Geofizicheskij zhurnal* 35(1), 119—132 (in Ukrainian).

Blend D., 1965. The theory of linear viscoelasticity. Moscow: Mir, 200 p. (in Russian).

Ziner K. M., 1954. Elasticity and inelasticity of metals. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 396 p. (in Russian).

Koltunov M. A., 1976. Creep and relaxation. Moscow: Vysshaja shkola, 277 p. (in Russian).

Rejner M., 1965. Rheology. Moscow: Nauka, 294 p. (in Russian).

Savin G. M., Rushhic'kij Ja. Ja., 1975. Elements of hereditary media mechanics. Kiev: Vishha shkola, 252 p. (in Ukrainian).

Sorokin E. S., 1960. The theory of internal friction. Moscow: Gosstrojizdat, 152 p. (in Russian).