УДК 534.23; 537.877

Взаимодействие акустических и электромагнитных полей в смеси электролитов

© *Л. М. Кузьмина, В. М. Рылюк, М. И. Скипа, 2016*

Отделение гидроакустики Института геофизики НАН Украины, Одесса, Украина
Поступила 18 января 2016 г.
Представлено членом редколлегии В. Н. Шуманом

Розглянуто нелінійний механізм взаємодії акустичного та електромагнітного полів. Показано, що звукова хвиля, що поширюється у розчині суміші електролітів, здатна індукувати змінне електромагнітне поле акустичного діапазону, а наявність зовнішнього джерела електромагнітного випромінювання в зоні поширення звукової хвилі приводить до виникнення додаткових акустичних гармонік. Розраховано напруженість індукованого магнітного поля і звуковий тиск таких гармонік. Наведено умови здійснення магнітоакустичного резонансу, що приводить до появи постійних магнітного поля та звукового тиску додаткових акустичних гармонік.
Ключові слова: акустичні та електромагнітні поля, звукова хвиля, резонансні частоти, нелінійна взаємодія.

Звуковая волна, распространяющаяся в растворе смесей электролитов (примером может служить морская вода), благодаря наличию в такой среде заряженных частиц способна индуцировать в ней токи и переменные электромагнитные поля. Внешний источник электромагнитного излучения в такой среде приводит к генерации индуцированного электромагнитного поля, воздействующего на заряды электролита и приводящего, в свою очередь, к возникновению дополнительных колебаний плотности в области распространения звуковой волны, т. е. к возникновению добавочных акустических гармоник. Таким образом, можно говорить о нелинейном взаимодействии акустического и электромагнитного полей в такой среде, которое может быть названо магнитоакустическим. Отметим, что этот вопрос рассматривался также в работах [Конторович, Глуцюк, 1961; Семкин и др., 2008а—в; Ершов и др., 2010; Шуман, 2012].

Рассмотрим ситуацию, когда в растворе смесей сильных электролитов присутствует источник электромагнитного поля частоты ω_0. Предположим далее, что в области пространства, где есть такое электромагнитное поле, распространяется плоская монохроматическая звуковая волна с частотой ω_ν. Эта волна индуцирует электромагнитное поле, которое накладывается на поле источника и генерирует дополнительные акустические колебания. Исследуем это индуцированное поле и определим давление добавочных акустических гармоник на примере морской воды.

Примем следующую модель. Будем считать, что в морской воде в наибольшей концентрации присутствует соль NaCl, ввиду чего ее электропроводность обусловливается преимущественно ионами Na+ и Cl–. Присутствие же других ионов не сильно влияет на электропроводность при условии, что эти ионы не содержатся в воде в значительных количествах. Запишем уравнения магнитной гидродинамики для раствора электролита NaCl [Франк-Каменецкий, 1964]:

$$\frac{\partial m_- v_-}{\partial t} + (v_- \nabla) v_- = -e\left\{\mathbf{E}^{\text{tot}} + \frac{1}{c}\left[v_-, \mathbf{H}^{\text{tot}}\right]\right\} - \frac{1}{n}\nabla p_- - R_\pm n\left(v_- - v_+\right),$$

$$\frac{\partial m_+ v_+}{\partial t} + (v_+ \nabla) v_+ = -e\left\{\mathbf{E}^{\text{tot}} + \frac{1}{c}\left[v_+, \mathbf{H}^{\text{tot}}\right]\right\} - \frac{1}{n}\nabla p_+ - R_\pm n\left(v_+ - v_-\right), \qquad (1)$$

где m_- и v_- — масса и распределение скоростей анионов хлора Cl_-, m_+ и v_+ — масса и распределение скоростей катионов натрия Na+, а n — их общая концентрация. В данной модели полагаем концентрации катионов натрия и анионов хлора равными, так что условие электронейтральности выполнено. Кроме того, считаем, что на анионы Cl^- действует только давление p_-, а на катионы Na+ — только давление p_+ (стандартное приближение двухжидкостной гидродинамики). Коэффициенты $R_\pm$ в уравнении (1) описывают взаимное трение (передачу импульса) при взаимодействии между ионами натрия и хлора. Вязкостью среды и взаимодействием ионов с нейтральными молекулами воды будем пренебрегать и, кроме того, будем считать движение ионов электролита безвихревым, т. е. положим $\mathrm{rot}\,v_\pm=0$. Входящие в уравнение (1) полные электрические $\mathbf{E}^{\mathrm{tot}}$ и магнитные $\mathbf{H}^{\mathrm{tot}}$ поля, действующие в среде, являются суммой заданных внешних полей и полей, индуцированных движением ионов электролита:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{tot}} = \mathbf{E}^{\mathrm{ext}} + \mathbf{E}^{\mathrm{ind}},$$
$$\mathbf{H}^{\mathrm{tot}} = \mathbf{H}^{\mathrm{ext}} + \mathbf{H}^{\mathrm{ind}}. \qquad (2)$$

Внешние переменные электрические и магнитные поля $\mathbf{E}^{\mathrm{ext}}$ и $\mathbf{H}^{\mathrm{ext}}$ связаны между собой уравнениями Максвелла в вакууме. Индуцированное же магнитное поле $\mathbf{H}^{\mathrm{ind}}$ удовлетворяет уравнению Максвелла в среде:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}^{\mathrm{ind}}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H}^{\mathrm{ind}}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}^{\mathrm{ind}}(\mathbf{r},t), \qquad (3)$$

где c — скорость света, а плотность индуцированного тока $\mathbf{j}^{\mathrm{ind}}$ определена следующим образом:

$$\mathbf{j}^{\mathrm{ind}} = en\left(v_+ - v_-\right). \qquad (4)$$

Введем среднюю массовую скорость согласно соотношению

$$\mathbf{V} = \frac{\rho_- v_- + \rho_+ v_+}{\rho}, \qquad (5)$$

где $\rho_-=nm_-$ и $\rho_+=nm_+$ — плотности катионов и анионов соответственно, а $\rho=\rho_-+\rho_+$ — их суммарная плотность. Тогда, учитывая малость относительных изменений плотности и давления электролита в звуковой волне и пренебрегая нелинейными вкладами $\sim(v_\pm\nabla)v_\pm$ в (1), получим уравнение для плотности индуцированного тока:

$$\frac{\partial \mathbf{j}^{\mathrm{ind}}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi}\left\{\mathbf{E}^{\mathrm{tot}} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{V},\mathbf{H}^{\mathrm{tot}}\right]\right\} - \frac{\omega_p^2}{4\pi\sigma_0}\mathbf{j}^{\mathrm{ind}}, \qquad (6)$$

где $\omega_p = \left(4\pi n e^2/m_\pm\right)^{1/2}$ — плазменная частота, n — равновесная концентрация ионов электролита, $m_\pm = m_+ m_-/\left(m_+ + m_-\right)$ — приведенная масса и $\sigma_0 = e^2/R_\pm$ — электропроводность электролита. Появление в уравнении (6), выражающем закон Ома в среде, члена $\frac{1}{c}\left[\mathbf{V},\mathbf{H}^{\mathrm{tot}}\right]$, пропорционального магнитному полю, связано с преобразованием Лоренца к движущейся системе координат.

Дополнив систему уравнений (1), (3) и (6) уравнением непрерывности

$$\partial\rho'/\partial t + \rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \qquad (7)$$

в котором ρ_0 — равновесное значение плотности, ρ' — отклонение плотности от равновесного значения, получим уравнения для средней массовой скорости и для отклонения $p' = p'_- + p'_+$ от равновесного значения давления:

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} - c_0^{\,2}\Delta\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \quad \Delta p' - \frac{1}{c_0^{\,2}}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \mathrm{div}\,\mathbf{F}, \qquad (8)$$

где c_0 — скорость звука и $\mathbf{F} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}^{\mathrm{ind}},\mathbf{H}^{\mathrm{tot}}\right]$.

Определим теперь источники внешнего электромагнитного поля $\mathbf{E}^{\mathrm{ext}}$ и $\mathbf{H}^{\mathrm{ext}}$, действующие на среду. Будем считать движение системы зарядов, создающих электромагнитное поле, нерелятивистским. Это условие эквивалентно тому, что размеры самой системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны λ: $a \ll \lambda$. Тогда можно рассматривать электромагнитное поле в магнитодипольном приближении. Анализируя частный случай излучающей системы с дипольным моментом, равным нулю, представим электромагнитное поле в виде [Ландау, Лифшиц, 1973]

$$\mathbf{E}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{m}}(\mathbf{r},t)/r,$$
$$\mathbf{H}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{rotrot}\,\dot{\mathbf{m}}(\mathbf{r},t)/r, \qquad (9)$$

где точка над вектором означает дифференцирование по времени и

$$\mathbf{m}(\mathbf{r},t) = \mathbf{m}_0\cos\left[\omega_0 t - k_0 r\right] \qquad (10)$$

— магнитный момент системы с амплитудой m_0, а $k_0 = \omega_0/c$. Полученная система уравнений (3), (6), (8) и (9) сильно нелинейна, и для ее решения заменим в нулевом приближении в уравнении (6) для плотности индуцированного тока среднюю массовую скорость $\mathbf{V}$ на скорость, создаваемую внешним акустическим источником:

$$\mathbf{V}_0 = u_0 \mathbf{e}_v \exp\left[i\left(k_v r - \omega_v t\right)\right],$$
$$k_v = \omega_v / c_0 ,\ \mathbf{e}_v = \mathbf{k}_v / k_v , \qquad (11)$$

где u_0 — амплитуда скорости внешнего акустического источника. Тогда представим фурье-компоненту плотности индуцированного тока в уравнении (6):

$$\mathbf{j}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},\omega\right) = \pi \frac{u_0}{c} \sigma\left(\omega\right) e^{i\mathbf{k}_v \mathbf{r}} \times$$
$$\times \left\{ \left[\mathbf{e}_v , \mathrm{rotrot}\left(\frac{m_0}{r} e^{ik_0 r} \right)\right] \delta\left(\omega - \omega_v + \omega_0\right) + \right.$$
$$\left. + \left[\mathbf{e}_v , \mathrm{rotrot}\left(\frac{m_0}{r} e^{ik_0 r} \right)\right] \delta\left(\omega - \omega_v - \omega_0\right) \right\}, \qquad (12)$$

где

$$\sigma\left(\omega\right) = \frac{\sigma_0}{1 - 4\pi i \sigma_0\, \omega / \omega_p{}^2} . \qquad (13)$$

Рассматривая индуцированное магнитное поле $\mathbf{H}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},\omega\right)$ на расстояниях $r<<\lambda$ (это неравенство надежно выполняется, например, для акустических волн ультразвукового диапазона с частотами $\omega_v \leq 100$ кГц, поскольку им соответствуют волны электромагнитного излучения с длиной $\lambda \geq 10^3$ м), сведем (3) к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \mathbf{H}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},\omega\right) +$$
$$+ \left[k_0^2 + \frac{4\pi i}{c} k\left(\omega\right) \sigma\left(\omega\right)\right] \mathbf{H}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},\omega\right) =$$
$$= \frac{4\pi}{c} \mathrm{rot}\, \mathbf{j}_0{}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},\omega\right), \qquad (14)$$

решение которого может быть представлено в виде

$$\mathbf{H}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},t\right) \mathrm{Re}\left\{ \sigma\left(\omega_v - \omega_0\right) e^{-i\left(\omega_v - \omega_0\right)t} \mathbf{h}_-\left(\mathbf{r}\right) + \right.$$
$$\left. + \sigma\left(\omega_v + \omega_0\right) e^{-i\left(\omega_v + \omega_0\right)t} \mathbf{h}_+\left(\mathbf{r}\right) \right\}, \qquad (15)$$

где согласно формуле Кирхгофа для неограниченной среды [Тихонов, Самарский, 1972]

$$\mathbf{h}_\pm = -\frac{1}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} \exp\left\{ -i\sqrt{\beta\left(\omega_v \pm \omega_0\right)} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| \right\} \times$$
$$\times \mathrm{rot}\left\{ \mathbf{f}\left(\mathbf{r}\right) e^{ik_v r'} \right\} \qquad (16)$$

и

$$\beta\left(\omega\right) = k_0^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma\left(\omega\right),$$

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{r}\right) \cong \frac{u_0}{r^3} \left\{ 3\left(\mathbf{n},\mathbf{m}_0\right)\left[\mathbf{n},\mathbf{e}_v\right] - \left[\mathbf{e}_v,\mathbf{m}_0\right] \right\},\ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}} . \qquad (17)$$

Уравнение (15) описывает магнитное поле, индуцированное совместным действием электромагнитного и акустического полей. Оно зависит от гибридных частот $\omega_v \pm \omega_0$ и в случае резонанса $\omega_v = \omega_0$ содержит составляющую с удвоенной частотой, а также постоянное магнитное поле:

$$H^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{\sigma_0}{c^2} \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left\{ -ik_0 \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| \right\} \mathrm{rot}\left\{ \mathbf{f}\left(\mathbf{r}'\right) e^{ik_v r'} \right\} \right]. \qquad (18)$$

Аналогично из второго уравнения (8) можно определить звуковое давление добавочных гармоник. Пренебрегая нелинейными эффектами взаимодействия электромагнитного и акустического полей высшего порядка и заменяя в уравнениях (8) в силе $\mathbf{F}$ полное магнитное поле $\mathbf{H}^{\mathrm{tot}}$ на внешнее $\mathbf{H}^{\mathrm{ext}}$, в области расстояний $r<<\lambda$ получим

$$p'\left(\mathbf{r},t\right) = \mathrm{Re}\left\{ p\left(\omega_v\right)\left[\sigma\left(\omega_v - \omega_0\right) + \sigma\left(\omega_v + \omega_0\right)\right] e^{-i\omega_v t} \right\} +$$
$$+ \mathrm{Re}\left\{ p'\left(\omega_v - 2\omega_0\right) \sigma\left(\omega_v - \omega_0\right) e^{-i\left(\omega_v - 2\omega_0\right)t} + \right.$$
$$\left. + p\left(\omega_v + 2\omega_0\right) \sigma\left(\omega_v + \omega_0\right) e^{-i\left(\omega_v + 2\omega_0\right)t} \right\}, \qquad (19)$$

где

$$p\left(\omega\right) = -\frac{1}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} \times$$
$$\times \exp\left\{ -i\frac{\omega}{c_0} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| \right\} \mathrm{div}\left\{ \Phi\left(\mathbf{r}'\right) e^{ik_v r'} \right\} \qquad (20)$$

и

$$\Phi\left(\mathbf{r}\right) \cong \frac{u_0}{r^6} \left[u_1 \mathbf{n} + u_2 \mathbf{m}_0 - u_3 \mathbf{e}_v \right],$$
$$u_1 = 3\left(\mathbf{n},\mathbf{m}_0\right)\left\{ 3\left(\mathbf{n},\mathbf{e}_v\right)\left(\mathbf{n},\mathbf{m}_0\right) - \left(\mathbf{e}_v,\mathbf{m}_0\right)\right\},$$
$$u_2 = \left(\mathbf{e}_v,\mathbf{m}_0\right) - 3\left(\mathbf{n},\mathbf{m}_0\right)\left(\mathbf{n},\mathbf{e}_v\right),$$
$$u_3 = 3\left(\mathbf{n},\mathbf{m}_0\right)^2 + \mathbf{m}_0^2 . \qquad (21)$$

Давление $p'\ (r,t)$ в уравнении (19) связано с генерацией акустических гармоник посредством индуцированного электромагнитного поля. Заметим, что в отличие от выражения (15) оно содержит гибридные частоты $\omega_v \pm 2\omega_0$ с удвоенной частотой электромагнитного поля, что непосредственно связано с нелинейным характером взаимодействия электромагнитного и акустического полей в среде в процессе такой генерации. В случае резонанса $\omega_\nu=2\omega_0$ выражение (19) содержит постоянную составляющую давления добавочных акустических гармоник:

$$p^{\mathrm{res}}(\mathbf{r})=$$

$$=\frac{1}{2c^2}\mathrm{Re}\left[\sigma(\omega_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{div}\left\{\Phi(\mathbf{r}')e^{ik_\nu r'}\right\}\right]. \quad (22)$$

Поскольку интегралы, входящие в уравнения (16) и (20), не вычисляются аналитически, рассмотрим их асимптотические значения при $a\leq r<<\lambda$, где a — характерный размер излучающей системы. Тогда для проекции индуцированного магнитного поля на направление вектора наблюдения $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$ получим следующее выражение:

$$nH^{\mathrm{ind}}(\mathbf{r},t)\cong$$

$$\cong\frac{\sigma_0}{c^2 r}\Im\left[h_+(t)\exp\left\{-\frac{r}{\delta_+}\right\}+h_-(t)\exp\left\{-\frac{r}{\delta_-}\right\}\right], (23)$$

в котором

$$h_\pm(t)=\frac{\alpha_\pm\cos(\omega_\nu\pm\omega_0)t-\sin(\omega_\nu\pm\omega_0)t}{1+\alpha_\pm^2}, \quad (24)$$

а

$$\delta_\pm^{-1}=\frac{k_0\beta^2}{\sqrt{2}}\frac{|\alpha_\pm|}{\sqrt{1+\alpha_\pm^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_\pm^2(1-\beta^2)+K_\pm}},$$

$$K_\pm=\sqrt{1+\alpha_\pm^2\left[1+(1-\beta^2)(1+\alpha_\pm^2)\right]}, \quad (25)$$

$\alpha_\pm=4\pi\sigma_0(\omega_\nu\pm\omega_0)/\omega_p^2$ и $\beta=\omega_p/\omega_0$. Согласно выражениям (23) и (24), индуцированное магнитное поле испытывает сильную частотную дисперсию на гибридных частотах $\omega_\nu\pm\omega_0$. Общее представление о характере проникновения магнитного поля в раствор смесей электролитов можно получить, исходя из выражений (23) и (25). Прежде всего заметим, что в квазистационарном случае при выполнении неравенств $\omega_p>>\omega_0$, $\omega_p>>\omega_\nu$ с учетом выражения (13) получим известное выражение для глубины проникновения магнитного поля при нормальном скин-эффекте [Ландау, Лифшиц, 1982]:

$$\delta_\pm=\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0|\omega_\nu\pm\omega_0|}}. \quad (26)$$

Для частот электромагнитного излучения, сравнимых с акустическими в диапазоне $\omega_\nu\cong2\times(10^4—10^5)$ Гц ($\lambda\cong9{,}4\cdot10^4\div1{,}9\cdot10^3$ м) в случае морской воды ($\sigma_0\cong3$ См/м), будем иметь $\delta_+\cong5\div2$ м, $\delta_+<<\lambda$. При этих условиях величина индуцированного электрического поля $E^{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{r},t)\sim(\delta_+/\lambda)H^{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{r},t)<<H^{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{r},t)$. Значения величины δ_- в отличие от случая нормального скин-эффекта могут быть существенно выше, поскольку они зависят от разности частот акустического и электромагнитного полей $\omega_p-\omega_0$, содержащейся в знаменателях выражений (25) и (26). При выполнении неравенства $|\omega_\nu-\omega_0|<<\min\{\omega_p,\omega_0\}$, $\delta_->>\delta_+$ и в случае резонанса $\omega_\nu=\omega_0$ формально получим $\delta_-=\infty$. При этом характер убывания квазистационарного индуцированного магнитного поля с расстоянием вглубь электролита изменяется с экспоненциального на степенной (см. уравнение (30)) для его статической компоненты.

Для расчета углового интеграла, входящего в уравнение (23), выберем сферическую систему координат с осью Z, параллельной направлению распространения акустического сигнала, т. е. $0Z\|\mathbf{e}_\nu$, и с плоскостью XZ, проходящей через векторы $\mathbf{e}_\nu$ и $\mathbf{m}_0$. Тогда угловой интеграл $\Im$ в уравнении (23) выразится через характерный размер излучающей системы a следующим образом:

$$\Im=2\pi\frac{u_0c_0}{a^2\omega_\nu}|\mathbf{m}_0|\left[\cos(k_\nu a)-\frac{4\sin(k_\nu a)}{k_\nu a}+\right.$$

$$\left.+\frac{9\sin(k_\nu a)}{(k_\nu a)^3}-\frac{9\cos(k_\nu a)}{(k_\nu a)^2}\right]\sin\theta_m\sin\theta\cos\varphi+$$

$$+2\pi\frac{u_0c_0}{a^2\omega_\nu}|\mathbf{m}_0|\frac{6}{k_\nu a}\left[\sin(k_\nu a)-\frac{3\sin(k_\nu a)}{(k_\nu a)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3\cos(k_\nu a)}{k_\nu a}\right]\cos\theta_m\cos\theta, \quad (27)$$

где θ_m — полярный угол вектора магнитного момента $\mathbf{m}_0$ (угол между вектором магнитного момента и направлением распространения внешнего акустического сигнала), а θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора наблюдения $\mathbf{n}$ в выбранной системе координат. Уравнение (27) описывает угловое распределение индуцированного магнитного поля. Рассмотрим различные предельные случаи полученного выражения. В случае низких частот звуковой волны, т. е. когда длина волны внешнего акустического источника намного больше характерного размера излучающей системы $a(k_\nu a<<1)$, получим

$$\Im = \frac{4\pi}{5}\frac{u_0}{c_0}\omega_v\left|\mathbf{m}_0\right|\left[\frac{1}{3}\sin\theta_m\sin\theta\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \cos\theta_m\cos\theta\right]. \qquad (28)$$

Из этого соотношения следует, что в низкочастотном пределе индуцированное магнитное поле максимально в направлении вектора магнитного момента ($\varphi=\pi/2$, $\theta=\theta_m$), когда последний параллелен направлению распространения акустического сигнала ($\theta_m=0, \pi$). В то же время в случае, когда вектор магнитного момента перпендикулярен направлению распространения звуковой волны ($\theta_m=\pi/2$), индуцированное магнитное поле равно нулю в плоскости YZ ($\varphi=\pi/2$). Оно также равно нулю вдоль оси Y ($\varphi=\theta=\pi/2$) при любом направлении вектора магнитного момента. Кроме того, заметим, что в низкочастотном пределе индуцированное магнитное поле вдоль вектора магнитного момента $\theta=\theta_m$ в случае, когда последний параллелен направлению распространения акустического сигнала ($\theta_m=0, \pi$), в три раза больше, чем в случае, когда звуковая волна распространяется перпендикулярно направлению вектора магнитного момента ($\theta_m=\pi/2$). В предельном случае высоких частот ($k_v a>>1$) из уравнения (27) получим

$$\Im \cong 2\pi\frac{u_0 c_0}{a^2\omega_v}\left|\mathbf{m}_0\right|\cos\left(k_v a\right)\sin\theta_m\sin\theta\cos\varphi\,. \qquad (29)$$

Из выражения (29) следует, что в высокочастотном пределе индуцированное магнитное поле максимально в направлении магнитного момента ($\varphi=\pi/2$, $\theta=\theta_m$) в случае, когда последний перпендикулярен направлению распространения звуковой волны ($\theta_m=\pi/2$). В то же время магнитное поле отсутствует в плоскости YZ и вдоль направления распространения акустического сигнала. Оно также равно нулю в случае, когда направление распространения акустического сигнала параллельно направлению вектора магнитного момента. Полученные соотношения позволяют также определить величину проекции постоянного индуцированного магнитного поля, возникающего в результате магнитоакустического резонанса ($\omega_v=\omega_0$):

$$\left|\mathbf{n}\mathbf{H}^{\mathrm{ind}}\left(\mathbf{r},t\right)\right| \cong \frac{\sigma_0}{c^2}\Im\frac{\sin\left(k_0 r\right)}{r} \cong$$
$$\cong \frac{\sigma_0}{c^2}\Im k_0\left(1-\frac{\left(k_0 r\right)^2}{6}\right)+\mathrm{O}\left(\left(k_0 r\right)^4\right), \qquad (30)$$

т. е. ввиду малости пространственной дисперсии слабо зависит от r.

Исходя из уравнений (19) — (21), для звукового давления добавочных гармоник в наиболее интересном случае гибридных частот $\omega_{\pm}=\omega_v\pm 2\omega_0$ будем иметь

$$p'\left(\mathbf{r},t\right) \cong \frac{\sigma_0}{c^2 r}\left[\mathrm{P}_-\left(\mathbf{r},t\right)+\mathrm{P}_+\left(\mathbf{r},t\right)\right], \qquad (31)$$

где

$$\mathrm{P}_{\pm}\left(\mathbf{r},t\right) = \sigma_{\pm}^{(1)}\left[\Im_{\pm}^{(1)}\sin\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)+\right.$$
$$\left.+\Im_{\pm}^{(2)}\cos\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)\right]\cos\left(\omega_v\pm 2\omega_0\right)t+$$
$$+\sigma_{\pm}^{(1)}\left[\Im_{\pm}^{(2)}\sin\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)-\right.$$
$$\left.-\Im_{\pm}^{(1)}\cos\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)\right]\sin\left(\omega_v\pm 2\omega_0\right)t+$$
$$+\sigma_{\pm}^{(2)}\left[\Im_{\pm}^{(1)}\sin\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)+\right.$$
$$\left.+\Im_{\pm}^{(2)}\cos\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)\right]\sin\left(\omega_v\pm 2\omega_0\right)t-$$
$$-\sigma_{\pm}^{(2)}\left[\Im_{\pm}^{(2)}\sin\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)-\right.$$
$$\left.-\Im_{\pm}^{(1)}\cos\left(k_0\left(\omega_{\pm}\right)r\right)\right]\cos\left(\omega_v\pm 2\omega_0\right)t \qquad (32)$$

и $k_0(\omega_{\pm})=\omega_{\pm}/c_0$. Выражения (31) и (32) показывают, что давление добавочных акустических гармоник испытывает сильную частотную дисперсию на гибридных частотах $\omega_v\pm 2\omega_0$, а также сильную пространственную дисперсию с периодом порядка длины звуковой волны, затухая с расстоянием по закону $\sim 1/r$. Заметим, что учет теплопроводности среды приводит к более сильному экспоненциальному затуханию по типу скин-эффекта. Величины $\Im_{\pm}^{(1)}$ и $\Im_{\pm}^{(2)}$ в уравнении (32) являются соответственно действительными и мнимыми частями интеграла $\Im_{\pm}=\Im_{\pm}^{(1)}+i\Im_{\pm}^{(2)}$, который описывает угловое распределение звукового давления добавочных акустических гармоник. Детальный анализ этого интеграла показывает, что динамическое звуковое давление добавочных гармоник, возникающее в результате нелинейного взаимодействия акустического и электромагнитного полей в среде, является пространственно неизотропной величиной. В общем случае он может быть рассчитан только численно. Однако в направлении распространения внешнего акустического сигнала в предельных случаях низких ($\tilde{\tilde{k}}_v\, a<<1$) и высоких ($\tilde{\tilde{k}}_v\, a>>1$) гибридных частот могут быть получены простые аналитические выражения. В случае, когда $\tilde{\tilde{k}}_v\, a<<$ $<<1$ и при $\omega_v\neq\omega_0$, будем иметь

$$\Im_{\pm}^{(1)} \cong 8\pi\omega_\nu \frac{u_0}{c_0}\frac{|\mathbf{m}_0|^2}{a^3}\left[1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_m - \right.$$

$$\left. -\frac{46}{35}\left(1-\frac{109}{138}\sin^2\theta_m\right)\tilde{\tilde{k}}_\nu a^2\right],$$

$$\Im_{\pm}^{(2)} \cong \frac{27}{10}\pi u_0 \frac{\omega_\nu}{\omega_\nu \pm \omega_0}\frac{|\mathbf{m}_0|^2}{a^4}\left[1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_m - \right.$$

$$\left. -\frac{20}{7}\left(1-\frac{4}{5}\sin^2\theta_m\right)\tilde{\tilde{k}}_\nu a^2\right]. \qquad (33)$$

Соответственно при $\tilde{\tilde{k}}_\nu a >> 1$ получим

$$\Im_{\pm}^{(1)} \cong \frac{\pi}{2}u_0 c_0 \frac{\omega_\nu}{(\omega_\nu \pm \omega_0)^2}\frac{|\mathbf{m}_0|^2}{a^5}\left[-\cos\left(2\tilde{\tilde{k}}_\nu a\right)\sin^2\theta_m + \right.$$

$$\left. +24\frac{\sin\left(2\tilde{\tilde{k}}_\nu a\right)}{\tilde{\tilde{k}}_\nu a}\left(1-\frac{11}{12}\sin^2\theta_m\right)\right],$$

$$\Im_{\pm}^{(2)} \cong \frac{27}{2}\pi u_0 c_0^2 \frac{\omega_\nu}{(\omega_\nu \pm \omega_0)^3}\frac{|\mathbf{m}_0|^2}{a^6}\times \qquad (34)$$

$$\times\left[\cos\left(2\tilde{\tilde{k}}_\nu a\right)\cos^2\theta_m + \frac{\sin\left(2\tilde{\tilde{k}}_\nu a\right)}{\tilde{\tilde{k}}_\nu a}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta_m\right)\right].$$

В приведенных соотношениях $\tilde{\tilde{k}}_\nu = (\omega_\nu \pm \omega_0)/c_0$. В свою очередь, для постоянного (магниторезонансного) давления добавочных акустических гармоник приближенно будем иметь

$$p^{\text{res}}(\mathbf{r}) \cong \frac{\sigma_0}{c^2 r}\text{P}_-(\mathbf{r}), \qquad (35)$$

где при $k_\nu a << 1$

$$P_-(\mathbf{r}) \cong \pi u_0 \frac{|\mathbf{m}_0|^2}{a^4}\frac{1}{1+\alpha_+^2}\times$$

$$\times\left[\frac{27}{10}+8\frac{a}{c_0}\omega_\nu\alpha_+\right]\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_m\right), \qquad (36)$$

и соответственно в высокочастотном случае, когда $k_\nu a >> 1$,

$$P_-(\mathbf{r}) \cong \frac{\pi}{2}u_0 c_0^2 \frac{|\mathbf{m}_0|^2}{a^6\omega_\nu^2}\frac{\cos(k_\nu a)}{1+\alpha_+^2}\times$$

$$\times\left[27\cos^2\theta_m - \frac{a}{c_0}\omega_\nu\alpha_+\sin^2\theta_m\right]. \qquad (37)$$

Заметим, что в отличие от динамического случая, постоянное магниторезонансное давление добавочных акустических гармоник пространственно изотропно. Из выражения (36) следует, что в низкочастотном пределе в случае, когда магнитный момент параллелен направлению распространения акустического сигнала (θ_m=0), постоянное давление добавочных акустических гармоник в три раза больше, чем в случае, когда магнитный момент перпендикулярен направлению распространения звуковой волны (θ_m=π/2). Из полученных выражений следует, что индуцированное магнитное поле $\mathbf{H}^{\text{ind}}(\mathbf{r},t)$~$m_0$, в то время как давление $p'(\mathbf{r},t) \sim m_0^2$, т. е. $p'(\mathbf{r},t) \sim \left[\mathbf{H}^{\text{ind}}(\mathbf{r},t)\right]^2$, что указывает на нелинейность механизма генерации добавочных акустических гармоник.

Таким образом, в статье рассмотрено взаимодействие акустического и электромагнитного полей (магнитоакустическое взаимодействие), приводящее в области расстояний r~$\delta_\pm$ к генерации переменного электромагнитного поля и добавочных акустических гармоник в растворе смесей электролитов. Рассматривается нелинейный механизм генерации таких гармоник, возникающих в результате индукции внешней электромагнитной волной дополнительного электромагнитного поля, которое, в свою очередь, генерирует в присутствии уже имеющегося внешнего акустического источника дополнительные акустические колебания на так называемый гибридных частотах. Отмечено, что в отличие от индуцированного магнитного поля добавочное постоянное звуковое давление возникает при условии совпадения частоты внешнего акустического поля с удвоенной частотой электромагнитной волны, так называемом нелинейном резонансе. Получены достаточно простые аналитические выражения для напряженности индуцированного магнитного поля и звукового давления добавочных акустических гармоник. Исследованы их угловые распределения.

В заключение авторы выражают признательность доктору физ.-мат. наук В. Н. Шуману за полезные и своевременные замечания, способствующие углубленному пониманию физического содержания проблемы.

Список литературы

Ершов С., Михайловская И., Новик О. Сейсмоэлектромагнитные сигналы над океаном: от верхней мантии до ионосферы (физика, математическая модель, численное исследование). 2010. http://www.iki.rssi.ru/galeev/abs_rus/a021003.htm.

Конторович В. М., Глуцюк А. М. Преобразование звуковых и электромагнитных волн на границе проводника в магнитном поле. *ЖТЭФ*. 1961. Т. 41. С. 1195—1204.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. II. Москва: Наука, 1973. 502 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Т. VIII. Москва: Наука, 1982. 620 с.

Семкин С. В., Смагин В. П., Савченко В. Н. Взаимодействие электромагнитных и акустических полей в морской среде. *Геомагнетизм и аэрономия*. 2008а. Т. 48. №. 6. С. 829—830.

Семкин С. В., Смагин В. П., Савченко В. Н. Генерация акустических волн при нелинейном взаимодействии гидроакустических и электромагнитных полей в морской среде. *Известия АН. Физика атмосферы и океан*а. 2008б. Т. 44. №. 2. С. 271—275.

Семкин С. В., Смагин В. П., Савченко В. Н. Гидроакустические волны во внешнем переменном магнитном поле. *Геомагнетизм и аэрономия*. 2008в. Т. 48. №. 3. С. 336—339.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972. 735 с.

Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. Москва: Атомиздат, 1964. 278 с.

Шуман В. Н. Электромагнитно-акустические преобразования и высокоразрешающие зондирующие системы: новые возможности и новые формулировки старых вопросов. *Геофиз. журн*. 2012. Т. 34. № 3. С. 38—39.

Interaction of acoustic and electromagnetic field in a mixture of electrolytes

© L. M. Kuzmina, V. M. Rylyuk, M. I. Skipa, 2016

Nonlinear mechanism of interaction of acoustic and electromagnetic fields is considered. It is shown that the sound wave propagating in a mixture solution of electrolytes is able to induce alternating electromagnetic fields of the acoustic range and the presence of an external source of electromagnetic radiation in the region of the sound wave propagation leads to the appearance of additional acoustic harmonics. The strength of the induced magnetic field and the magnitude of sound pressure of harmonics are calculated. The conditions of the magnetic acoustic resonance, which leads to the appearance of the constant magnetic field and the sound pressure of additional acoustic harmonics, are considered.

Key words: acoustic and electromagnetic fields, sound wave, resonance frequencies, nonlinear interaction.

References

Yershov S., Mikhaylovskaya I., Novik O., 2010. Seismic-electromagnetic Signals over the Ocean from the Upper Mantle to the Ionosphere (Physics, mathematical model, numerical study). http://www.iki.rssi.ru/galeev/abs_rus/a021003.htm (in Russian).

Kontorovich V. M., Glutsyuk A. M., 1961. Transformation of Sound and Electromagnetic Waves at the Boundary of a Magnetic Field. *JETP* 14, 852—858 (in Russian).

Landau L. D., Lifshits E. M., 1973. Theory of Fields. Vol. II. Moscow: Nauka, 502 p. (in Russian).

Landau L. D., Lifshits E. M., 1982. Electrodynamics of Continuous Media. Vol. VIII. Moscow: Nauka, 620 p. (in Russian).

Semkin S. V., Smagin V. P., Savchenko V. N., 2008a. Interaction between the Electromagnetic and Acoustic Fields in the Marine Environment. *Geomagnetizm i aeronomiya* 48(6), 829—830 (in Russian).

Semkin S. V., Smagin V. P., Savchenko V. N., 2008b. Generation of Acoustic Waves during Nonlinear Interaction of Hydroacoustic and Electromagnetic Fields in the Marine Environment. *Izvestiya AN. Fizika atmosfery i okeana* 44(2), 271—275 (in Russian).

Semkin S. V., Smagin V. P., Savchenko V. N., 2008c. Hydroacoustic Wave in the External Alternating Magnetic Field. *Geomagnetizm i aeronomiya* 48(3), 336—339 (in Russian).

Tikhonov A. N., Samarskiy A. A., 1972. Equations of

Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 735 p. (in Russian).

Frank-Kamenetskiy D. A., 1964. Lectures on Plasma Physics. Moscow: Atomizdat, 278 p. (in Russian).

Shuman V. N., 2012. Electromagnetic-acoustic transformations and high-resolution sounding systems: new possibilities and new formulations of the old questions. *Geofizicheskiy zhurnal* 34(3), 38—39 (in Russian).