

# Метод минимизации риска для решения обратных задач гравиразведки при слабых предположениях о свойствах геологических помех

© П. И. Балк<sup>1</sup>, А. С. Долгаль<sup>2</sup>, 2016

<sup>1</sup> Берлин, Германия

<sup>2</sup> Горный институт Уральского отделения РАН,  
Пермь, Россия

Поступила 12 июля 2016 г.

*Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко*

Уведено поняття прихованої інформації про джерела гравітаційної аномалії як спільного фрагмента істинного і модельного збурювальних об'єктів. За наявності невизначеності, властивої оберненим задачам, межа можливостей алгоритмів побудови найліпших оцінок параметрів моделі джерел полягає в максимізації гарантованого обсягу добуваної достовірної інформації. Обґрунтовано додаток до нелінійних обернених задач гравірозвідки "рудного" типу відомої концепції мінімізації ризику під час розв'язання проблеми вибору в умовах нестачі апріорної інформації. Відповідно до цієї концепції як найліпший з допустимих розв'язків оберненої задачі вибрано той, за якого досягається мінімум математичного очікування похибки результатів інтерпретації. Передбачається нульове медіанне значення перешкод у спостереженому гравітаційному полі, тобто наявність позитивних і негативних перешкод рівноймовірна, але при цьому не виключається, що за абсолютним значенням перешкоди якогось одного знака можуть превалювати. Достатню репрезентативну множину допустимих варіантів інтерпретації, з яких вибрано найліпший, побудовано за допомогою монтажного алгоритму в класі скінченноелементних моделей геологічних тіл. Важливою перевагою методу, що ґрунтується на ідеї мінімізації ризику, є можливість наближеного оцінювання близькості запропонованої математичної моделі джерел аномалії до істинного збурювального об'єкта. Наведено результати обчислювальних експериментів, що підтверджують ефективність таких оцінювань, а також вищу якість розв'язання оберненої задачі за допомогою запропонованого методу порівняно з традиційним підходом.

**Ключові слова:** гравірозвідка, інтерпретація, обернена задача, джерело поля, перешкода, відхил полів, мінімізація емпіричного ризику.

**Введение.** По своей целевой направленности методы решения обратных задач геофизики являются основным способом извлечения достоверной информации об изучаемых геологических объектах (их форме, размерах, пространственном положении и петрофизических характеристиках). В математическом плане — это инструмент для борьбы с неопределенностью, которая сопутствует интерпретации данных полевых измерений. В гравиразведке, как и других геофизических методах, неопределенность проявляется в существовании множест-

ва  $Q$  вариантов интерпретации  $S_\alpha$ , каждый из которых соответствует всей имеющейся информации  $G$  и может претендовать на роль истинного решения  $\hat{S}$ . Всегда возникает вопрос: какую информацию об истинном объекте  $\hat{S}$  мы извлекаем, когда берем за его оценку  $S^{\text{opt}}$  один из вариантов  $S_\alpha \in Q$ .

Нельзя утверждать, что в описаниях известных алгоритмов решения обратных задач гравиметрии их информационная направленность не декларируется. Беда в том, что критерии выбора наилучшего решения  $S^{\text{opt}}$  имеют к его ин-

формативности весьма опосредованное отношение. Взять, хотя бы, критерий минимума невязки модельного и измеренного полей. В теории выбора [Айзерман, Малишевский, 1981] доказана неэффективность критериев, где оптимальное решение выбирается в результате попарного сравнения альтернативных вариантов.

В детерминистских постановках обратных задач допустимые решения  $S_\alpha \in Q$  априори равноправны, их невозможно ранжировать по плотности вероятности совпадения с точным решением  $\hat{S}$ . Иначе говоря, нет объективных предпосылок к выбору лучшего варианта интерпретации, поскольку априорная информация уже была задействована в формировании множества  $Q$ . Большинство известных критериев базируются на каких-то формальных признаках, которые навязываются природным объектам. Пример такого признака — гладкость границы геологического объекта, хотя из физических законов, управляющих процессом формирования такого объекта, не следует, что эта граница должна быть самой гладкой из всех возможных.

Вся эта противоречивость привела к тому, что большинство известных методов количественной интерпретации гравитационных аномалий на поверку являются эквивалентными с точки зрения объемов достоверной информации, которую гарантированно удастся извлечь с их помощью. Понятно, что свойства решения  $S^{opt}$ , позволяющие считать его наилучшим, должны выражаться в терминах свойств извлекаемой информации об источниках аномалии. Для этого, в свою очередь, необходимо чтобы наилучшее решение обеспечивало компромисс между всеми допустимыми решениями. В работе [Страхов, 1995] идея такого компромисса сформулирована как концепция согласования допустимых решений обратной задачи. Мы реализуем ее здесь в алгоритме минимизации эмпирического риска для решения обратной задачи гравиметрии "рудного" типа.

**Некоторые дополнения к понятийно-терминологической базе теории интерпретации потенциальных полей.** Для дальнейшего развития концепции согласования допустимых решений той понятийно-терминологической базы, которая есть сейчас, явно недостаточно. Как известно, всеобъемлющего понятия информации найти пока не удалось и потому приходится довольствоваться не претендующим на полноту определением Клода Шеннона: "информация — это снятая неопределенность наших знаний о предмете изучения" [Стратонович, 1975]. Допускаются любые частные опре-

деления, если в них адекватно отражена специфика изучаемого класса задач. Воспользуемся этим правом.

Формальный подход к оценке параметров источников гравитационных аномалий не гарантирует получения полезной геологической информации. При одном ограничении на максимально возможную норму помехи множество вариантов интерпретации будет неограничено. В сочетании же с множеством  $Q_1$  допустимых решений, соответствующих ограничениям  $G_1$ , полученным с помощью других геофизических методов и естественными диапазонами изменения геометрических и физических параметров источников аномалии, данные гравиразведки могут внести заметный вклад в информативность результатов комплексной интерпретации. Следует различать абсолютную информативность гравиметрических данных, их (условную) информативность относительно конкретной целевой задачи интерпретации и, собственно, информативность конкретного приближенного решения обратной задачи, построенного с помощью того или иного алгоритма при определенном критерии оптимальности  $F$ .

Абсолютную информативность гравиметрических данных предлагается измерять в терминах той части неопределенности, которую удастся снять за счет одних только данных гравиметрии, например в терминах разности множества  $Q_1$  допустимых решений, соответствующих косвенным данным  $G_1$  о возмущающем объекте и множества  $Q$  решений, не противоречащих всей имеющейся информации  $G$ . Возьмем линейную обратную задачу гравиразведки в случае модели источников аномалии в виде системы  $n$  тел  $\hat{S}_k$  плотности  $\hat{\delta}_k$ . Если информация  $G_1$  заключена в неравенствах  $\hat{\delta}_k \leq \delta_k \leq \bar{\delta}_k$ , то при ограничении на норму помех в гравиметрических измерениях они позволяют из априорного  $n$ -мерного параллелепипеда  $Q_1$  "высечь" многогранник  $Q$ , каждая точка которого есть вектор возможных плотностей  $\hat{\delta}_k$ .

Если  $\mu$  — некоторая мера, установленная на множестве  $M$  модельных решений обратной задачи, то

$$\Delta(Q, Q_1) = \mu(Q_1) - \mu(Q) \quad (1)$$

является абсолютной оценкой неопределенности, снятой за счет совместного использования гравиметрических данных и косвенных априорных ограничений. За относительный показатель информативности гравиразведки в конкретных физико-геологических условиях можно принять нормированную величину:

$$v(Q, Q_1) = 1 - \frac{\mu(Q)}{\mu(Q_1)}. \quad (2)$$

Значение  $v=0$  соответствует ситуации, когда гравиразведке не по силам дать новую информацию об источниках поля сверх той, что и без того известна по данным  $G_1$ . Так, в линейной обратной задаче данных может оказаться недостаточно, чтобы уточнить априорные границы  $\bar{\delta}_k, \delta_k$  плотностей аномалиеобразующих тел  $\hat{S}_k$ , но достаточно для уточнения избыточной массы источников поля. В первом случае оценкой информативности гравиразведки может служить нормированная величина:

$$v = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^{(\max)} - \delta_k^{(\min)}}{\bar{\delta}_k - \delta_k}, \quad (3)$$

где  $\delta_k^{(\min)}, \delta_k^{(\max)}$  — экстремальные значения плотностей  $\delta_k$  на  $Q$ , которые являются решением задачи линейного программирования (если ни одна из априорных границ для плотностей не может быть уточнена, то  $v=1$ ).

В обратной задаче "рудного" типа, когда плотности фиксированы, а оцениваются носители масс  $\hat{S}_k$ , информативность гравиразведки характеризуют величины

$$v_k = 1 - \frac{\mu(D_{2,k})}{\mu(D_{1,k})}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где  $D_{1,k}$  — объединение ( $D_{2,k}$  — пересечение) парциальных носителей  $S_{k,\alpha}$ , входящих в  $Q$ , или его представительное подмножество,  $\mu$  — классическая мера Лебега в  $\mathbf{R}^3$ . В ситуации, когда по имеющимся данным нельзя указать ни одну точку пространства, наверняка принадлежащую носителю  $\hat{S}$ , величина  $v=1$ . Имеют место неувлучшаемые включения  $D_{2,k} \subset \hat{S}_k \subset D_{1,k}$  для носителей  $\hat{S}_k$  [Балк, 1980].

Относительно информативности отдельных допустимых решений обратных задач также ощущается недостаточность существующей понятийно-терминологической базы. Попробуем исправить это положение. Выделим: область  $D_0 = S^{\text{opt}} \cap \hat{S}$ , которая является общим фрагментом реального и модельного носителей  $\hat{S}$  и  $S^{\text{opt}}$ ; область  $D_1 = S^{\text{opt}} \setminus \hat{S}$ , которая позиционирует себя как фрагмент носителя  $\hat{S}$ , но таковым не является; область  $D_2 = \hat{S} \setminus S^{\text{opt}}$ , являющуюся фрагментом носителя  $\hat{S}$ , не нашедшим отражение в решении  $S^{\text{opt}}$ . Назовем область  $D_0$  *гостевой*, область  $D_1$  — *ложной*, а область  $D_2$  — *потерянной* информацией. Их лебеговы ме-

ры  $\mu(D_j)$  можно принять за количественную оценку каждого из трех типов информации.

В какой мере допустимое решение  $S_\alpha$  обратной задачи вправе претендовать на оптимальность, предлагается связать с информативностью по предложенной выше классификации и возможностью алгоритма своими средствами оценить меру этой информации. Наличие такой возможности должно, по мнению авторов, определять состоятельность алгоритма решения обратной задачи.

**Информационная составляющая известных методов решения обратных задач гравиразведки.** Чтобы объективно оценить вклад предлагаемого здесь алгоритма минимизации риска, необходимо очертить границу принципиально возможного для алгоритмов решения обратных задач гравиразведки.

Точно также, как отдельный элемент не может сколь-нибудь полно представить собой все множество, которому он принадлежит, так и любой возможный вариант интерпретации не может охватить нюансы неопределенности, скрытые в множестве  $Q$ . Следствием этого является удручающий факт: ни один метод решения обратной задачи гравиразведки, как бы математически строг он ни был, не способен отыскать решение  $S_1^{\text{opt}}$ , которое *наверняка* превзошло бы по точности решение  $S_2^{\text{opt}}$ , найденное по не столь "продвинутому" методу. За счет дополнительных данных можно сузить множество  $Q$  до множества  $Q_0 \subset Q$ , но решение  $S_0^{\text{opt}} \in Q_0$  не обязательно окажется более точным, чем решение  $S^{\text{opt}} \in Q$ . В работе [Балк, 2004] приведены обескураживающие примеры, идущие вразрез со стереотипными представлениями о связи между точностью решения обратной задачи и объемом интерпретируемых данных.

Изложенное имеет простое объяснение. Если принять две точки  $S_1^{\text{opt}}, S_2^{\text{opt}} \in Q$  за оптимальные решения по двум конкурирующим методам, то решение  $S_1^{\text{opt}}$  уступит  $S_2^{\text{opt}}$  тогда, когда точным решением  $\hat{S}$  окажется любая точка области

$$Q' = \left\{ S_\alpha \in Q : \rho(S_1^{\text{opt}}, S_\alpha) > \rho(S_2^{\text{opt}}, S_\alpha) \right\}, \quad (5)$$

где  $\rho$  — некоторая метрика. Если множество

$$Q'' = \left\{ S_\alpha \in Q_0 : \rho(S^{\text{opt}}, S_\alpha) < \rho(S_0^{\text{opt}}, S_\alpha) \right\} \quad (6)$$

не пусто и  $\hat{S} \in Q''$ , то решение обратной зада-

чи по большему объему данных уступает решению по более бедной информации.

Если отмеченные свойства являются *непреодолимым* дефектом всех методов интерпретации, то остается одно — спуститься на "ступеньку" ниже, на уровень среднестатистических показателей метода, связывая оптимальность решения  $S^{opt}$  с понятиями достоверной, потерянной и ложной информации.

Через "призму" этих понятий охарактеризуем возможности алгоритмов решения обратных задач, использующих наиболее распространенные критерии  $F$  попарного сравнения альтернативных вариантов интерпретации. Оптимальные решения  $S^{opt}$ , соответствующие таким критериям, не чувствительны к любым изменениям в структуре множества  $Q$ , если последнее не затрагивают точку минимума функционала  $F$ . Де-факто такие алгоритмы входят в противоречие с идеей повышения достоверности результатов интерпретации за счет повышения объемов априорной информации. Концепция, согласно которой "победитель получает все" (решение  $S^{opt}$  единолично формирует итоговый результат интерпретации), выглядит сомнительной, если учесть, что лучшим может оказаться другое решение из  $Q$ . Полная неопределенность и с информационным наполнением такого рода "оптимальных" решений. Невозможно указать области пространства  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$ , обозначенные как достоверная, ложная и потерянная информация, или, хотя бы, оценить их меры  $\mu(D_j)$ . Суммируя, отметим так: с точки зрения способности оценить информативность собственных результатов многие известные методы решения обратных задач работают как бы "с завязанными глазами". В каждом случае успех зависит от того, оказался ли фактически объем  $\mu(D_0)$  достоверной (но скрытой от интерпретатора) информации достаточным для решения целевой задачи.

Несмотря на всю драматичность ситуации, на каких-то информационных уровнях с неопределенностью все же можно побороться. Для этого следует отказаться от критериев выбора  $F$ , основанных на попарном сравнении конкурирующих решений, и перейти к множественному сопоставлению альтернатив [Балк, Долгаль, 2015]. Метод минимизации риска, который здесь предлагается, показывает: достаточно отказаться от прежних критериев оптимальности, как тотчас намечается движение в сторону повышения достоверности и информативности результатов интерпретации гравитационных аномалий.

### Концепция минимизации эмпирического риска в обратных задачах гравиразведки.

В сложных нелинейных обратных задачах гравиразведки при большом объеме  $G$  разнородной априорной информации рассчитывать на технологии интерпретации, способные работать со всем множеством  $Q$  допустимых решений, не реалистично. Согласованию должны подлежать допустимые решения, составляющие некоторое представительное подмножество  $Q_0$ . Процедура согласования осуществляется в два этапа: вначале формируется множество  $Q_0$ , затем осуществляется согласование его элементов. В случае "рудной" обратной задачи гравиразведки проблему построения подмножества  $Q_0$  можно решить с помощью модификаций монтажного метода [Страхов, Лапина, 1976].

Итак, рассмотрим обратную задачу гравиразведки "рудного" типа, где

$$\tilde{u}_l = \tilde{u}(\hat{S}, \hat{\delta}; X_l) + \xi_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (7)$$

является аддитивной моделью наблюдаемого гравитационного поля. Здесь  $\tilde{u}(\hat{S}, \hat{\delta}; X_l)$  — поле масс, распределенных по неизвестному носителю  $\hat{S}$  с заданной плотностью  $\hat{\delta}$  в точке  $X_l$ . Значение суммарной помехи  $\xi_l$  складывается из помехи геологического характера (влияние неоднородностей, не учтенных в модели источников аномалии) и некоррелированной помехи, включающей помехи инструментального характера. Пусть  $Q_0 = \{S^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , — множество допустимых модельных носителей масс плотности  $\hat{\delta}$ , которые удалось построить интерпретатору любыми известными ему методами. Среди носителей  $S^{(k)}$  надо выбрать наилучший  $S^{opt}$ .

Пусть  $\Omega(S^{(k)}, \hat{S})$  — функционал, характеризующий различие носителей  $S^{(k)}$  и  $\hat{S}$ . С задачей оценки геометрического места точек  $\hat{S}$ , занятых возмущающими массами, хорошо согласуются метрики, порожденные мерой Лебега  $\mu$  в  $\mathbf{R}^3$ . К примеру

$$\Omega(S^{(k)}, \hat{S}) = 1 - \frac{\mu(S^{(k)} \cap \hat{S})}{\mu(S^{(k)} \cup \hat{S})}, \quad (8)$$

$\Omega = 0$  при  $S^{(k)} = \hat{S}$ . Если носители не имеют общих точек, то  $\Omega = 1$ .

Если носителем  $\hat{S}$  (или его приемлемой аппроксимацией) может оказаться любой из допустимых носителей  $S^{(k)}$ , то логично ассоциировать  $\hat{S}$  со случайным носителем, множеством реализацией которого есть  $Q$ , и  $p_k$  — вероятность события  $\hat{S} = S^{(k)}$  ( $\hat{S} \approx S^{(k)}$ ). Тогда функционал риска

$$R(S^*) = \sum_{k=1}^N p_k \Omega(S^{(k)}, S^*), \quad S^* \in Q_0, \quad (9)$$

есть математическое ожидание ошибки  $\Omega(S^*, \hat{S})$  результатов интерпретации в случае принятия носителя  $S^*$  в качестве оценки носителя  $\hat{S}$ . За решение  $S^{\text{opt}}$  принимается носитель  $S^*$ , на котором достигается минимум функционала (9). В его конструкции явно прослеживается концепция согласования допустимых решений  $S^{(k)}$ ; в каждом слагаемом в уравнении (9) один множитель — вероятность события  $\hat{S} = S^{(k)}$ , а другой — ошибка приближенного решения  $S^*$  обратной задачи в случае, если это событие произойдет [Балк и др., 2015].

Если информация  $G$  носит сугубо детерминистский характер, остается принять  $p_k = 1/N$ . Информация о свойствах помех  $\xi_l$  может резко понизить математическое ожидание погрешности решения  $S^{\text{opt}}$ . Но беда в том, что о свойствах помех (прежде всего, геологического характера) обычно мало что известно. Даже сторонники информационно-статистического подхода признают, что вероятностные методы решения обратных задач гравиразведки не имеют большой перспективы [Никитин, 2004]. Повидимому, основой наиболее реалистичных и эффективных постановок обратных задач гравиразведки должна быть детерминистская составляющая с "вкраплением" в нее простейшей и надежной информации о свойствах помех. К последней можно отнести гипотезу о нулевом медианном значении  $\text{Me}(\xi)$  помех. Авторам не известны разработки по обратным задачам гравиразведки, в которых фигурировала бы гипотеза  $\text{Me}(\xi) = 0$ . Она налагает одно довольно слабое требование: помехи обоих знаков равновероятны, но при этом не исключается, что по абсолютному значению помехи какого-то одного знака могут превалировать. Такая ситуация возникает, в частности, если в модели источников поля не отражены мелкие приповерхностные неоднородности, обладающие как повышенной, так и пониженной плотностью относительно вмещающих пород.

Если  $\text{Me}(\xi) = 0$ , то случайная величина  $\eta$ , описывающая число переходов знака ( $\xi_i > 0$ , но  $\xi_{i+1} < 0$ , либо  $\xi_i < 0$ , но  $\xi_{i+1} > 0$ ) в конечной последовательности  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_L$  реализаций помехи  $\xi$ , подчиняется биномиальному закону. В соответствии с этим законом вероятность  $p(r, L)$  того, что число переходов знака помех  $\xi_l$ , отягощающих наблюдаемые значения поля  $\tilde{u}_l, l = 1, 2, \dots, L$ , равно  $r$ , определяется по формуле

$$p(r, L) = \frac{\binom{L-1}{r}}{2^{L-1}}, \quad r = 0, 1, \dots, L-1. \quad (10)$$

Элементы последовательности  $\Delta u_l^{(k)} = \tilde{u}_l - u(S^{(k)}, \hat{\delta}; X_l), l = 1, 2, \dots, L$ , можно рассматривать как неизвестные помехи  $\xi_l$  в измерениях  $\tilde{u}_l$  при условии, что модельный носитель  $S^{(k)}$  совпал с истинным носителем  $\hat{S}$ . Следовательно, априорную вероятность того, что число переходов знаков элементов последовательности  $\Delta u_l^{(k)} = \tilde{u}_l - u(S^{(k)}, \hat{\delta}; X_l), l = 1, 2, \dots, L$ , равно заданному  $r$ , можно вычислить по формуле (10). Может оказаться, что для отдельных значений  $0 \leq r \leq L-1$  даже среди всех допустимых носителей не отыщется ни одного, дающего  $r$  переходов знака в указанной последовательности, т. е. определенной последовательности перехода знаков помех  $\xi_l$  заведомо быть не могло. В то же время сразу несколько найденных допустимых решений  $S^{(k)}$  могут обеспечивать одно и то же число  $r$  переходов знаков элементов последовательности  $(\Delta u_l^{(k)})$ , между которыми надо поровну разделить вероятность  $p(r, L)$ . Появляется возможность пересчитать априорные вероятности (10) в апостериорные  $p_k^{(a)}$ . С этой целью для каждого из найденных допустимых носителей  $S^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$ , определим число  $r(k)$  переходов знаков элементов последовательности  $(\Delta u_l^{(k)}), l = 1, 2, \dots, L$ . Пусть  $m(k)$  — количество найденных допустимых носителей  $S^{(t)} \in Q_0$ , включая сам носитель  $S^{(k)}$ , обеспечивающих (как  $S^{(k)}$ )  $r(k)$  переходов знаков в последовательности чисел  $\Delta u_l^{(t)}, l = 1, 2, \dots, L$ . Пусть  $K = \{1 \leq k \leq N : m(k) \neq 0\}$ . Тогда апостериорные вероятности

$$p_k^{(a)} = \frac{p(r(k), L)}{m(k) \sum_{j \in K} p(r(j), L)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

и в формуле (9) для эмпирического риска вместо  $p_k$  следует брать  $p_k^{(a)}$ .

**Результаты вычислительного эксперимента.** Статистическое оценивание эффективности метода минимизации риска по результатам вычислительного эксперимента предполагает помимо знания истинного решения обратной задачи еще и работу с различными выборками помех. Для этих целей практические примеры не подходят.



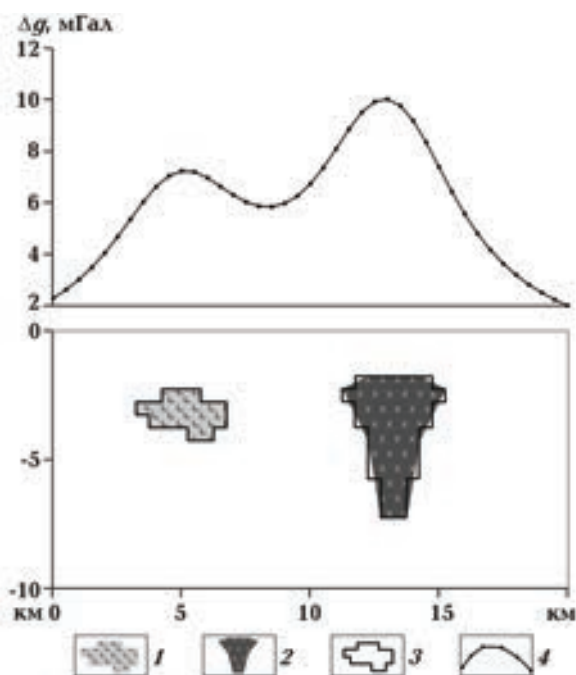


Рис. 1. Модель геоплотностного разреза: интрузии основного (1) и среднего (2) состава; их конечно-элементное представление (3) и гравитационное поле (4).

Модель источников аномалии  $\Delta g$  состоит из двух связанных объектов, которые ассоциируются с интрузивными телами: хонолитом основного состава с избыточной плотностью  $\bar{\delta}_1 = 0,3 \text{ г/см}^3$  и лакколитом среднего состава с плотностью  $\bar{\delta}_2 = 0,2 \text{ г/см}^3$ . Данная модель геоплотностного разреза ранее уже использовалась при оценке возможностей первой версии алгоритма минимизации риска при  $p_k = 1/N$  [Балк и др., 2015]. Приближенные значения поля заданы на профиле в 41 точке с шагом 500 м (рис. 1) и содержат случайную помету. Используются два типа случайных помет  $\xi_i$ : 1) нормально распределенные случайные числа с нулевым математическим ожиданием и стандартом  $\sigma = 0,5 \text{ мГал}$ , для генерации которых использовался метод Бокса—Мюллера; 2) случайные числа, равномерно распределенные на интервале  $[-0,5 \text{ мГал}; 0,5 \text{ мГал}]$ , значения которых увеличиваются в 3 раза, при превышении  $0,2 \text{ мГал}$  (~ 30 % от общего количества измерений). На рис. 2 представлены графики отдельных реализаций этих типов помет.

Тенденции, отслеживаемые по результатам серийных расчетов, в меньшей степени под-

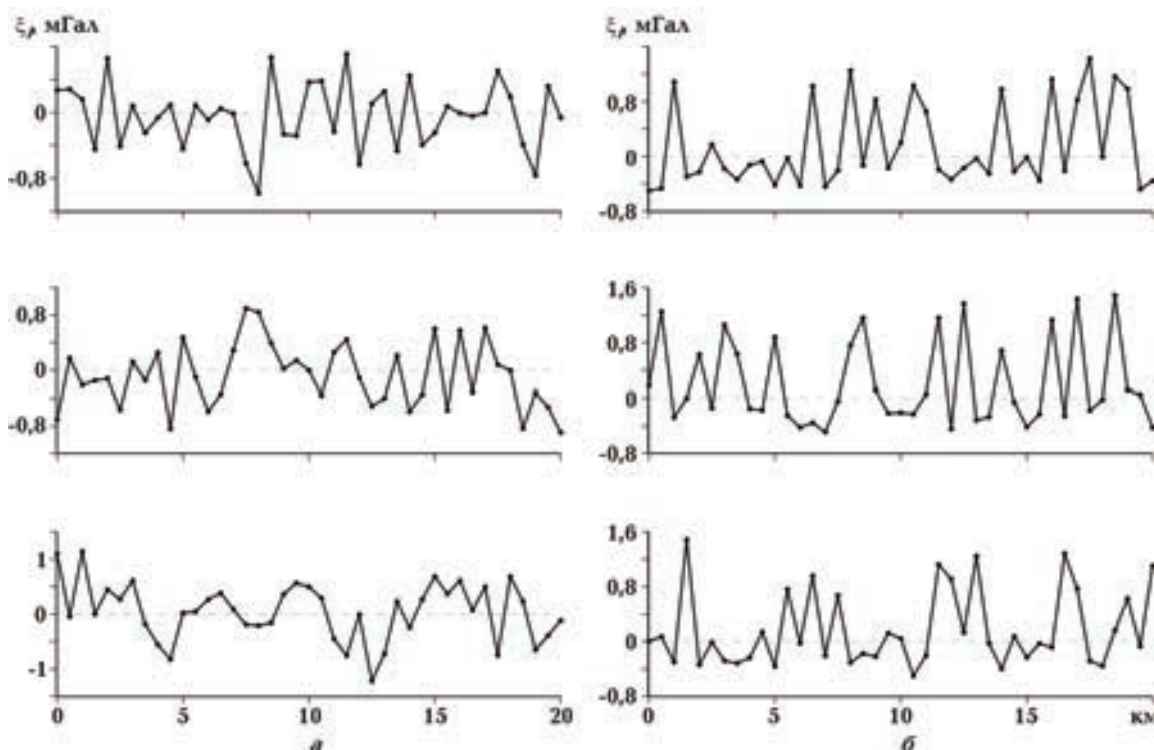


Рис. 2. Примеры помет 1-го (а) и 2-го типов (б), осложняющих “наблюдаемое” гравитационное поле.

вержены случайности, чем решения единичных примеров. Расчеты выполнены для  $N = 50$  вариантов имитации помех в "наблюдаемом" поле, в каждом из которых использовалась своя генерация  $\{\xi_i\}$  случайных чисел. Во всех вариантах  $t = 1, 2, \dots, N$  построение множества  $Q_0 = Q_0(t)$  выполняется с помощью модификации монтажного метода В.Н. Страхова [Страхов, Лапина, 1976], первый опыт применения которого на практике был описан в работе [Балк и др., 1993]. В качестве ограничения на геометрию носителя служили условия его односвязности (отсутствия пустот) и гладкости его границы. Ограничения на максимальный горизонтальный и вертикальный размеры носителя выбраны так, что превышают истинные размеры в 2 ра-

за. В среднем для каждой из  $N = 50$  реализаций 1-го типа помех было найдено порядка 964 допустимых решений обратной задачи, для 2-го типа — 812 допустимых решений. Сколь заметно могут различаться между собой допустимые носители, видно из рис. 3.

Более наглядным будет, если оптимальное решение выбрать не по минимуму математического ожидания ошибки решения, а (что принципиально не меняет дела) по максимуму оценки математического ожидания

$$W(S^*) = \sum_{k=1}^N p_k^{(a)} \Omega_1(S^{(k)}, S^*) \quad (12)$$

меры совпадения

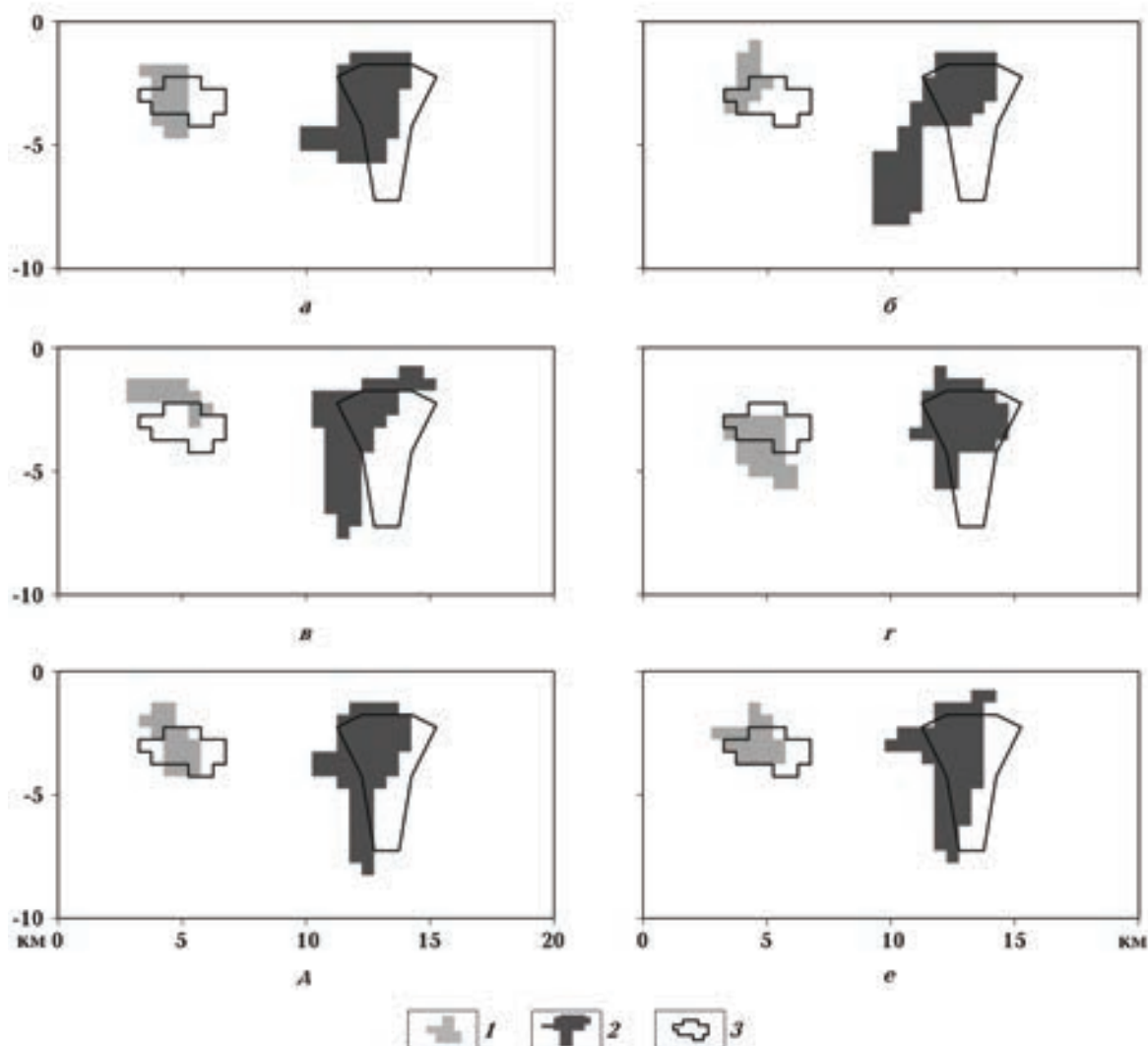


Рис. 3. Допустимые решения обратной задачи для одного из вариантов помех 2-го типа: *a* — по минимуму риска ( $\Omega_1 = 0,371$ ); *б* — по минимуму невязки ( $\Omega_1 = 0,252$ ); *в–е* — случайно выбранные (1, 2 — подобранные объекты; 3 — контуры истинных тел). Число решений обратной задачи 987.

$$\Omega_1(S^{(k)}, S^*) = \frac{\mu(S^{(k)} \cap S^*)}{\mu(S^{(k)} \cup S^*)} \quad (13)$$

приближенного решения  $S^*$  и неизвестного истинного решения  $\hat{S}$  в предположении, что каждое из найденных допустимых решений  $S^{(k)}$  может с вероятностью  $p_k^{(a)}$  быть истинным. Важны сравнительные характеристики предлагаемого метода. Лишь с их помощью можно оценить скрытые резервы гравirazведки, которые удалось выявить.

Решение обратной задачи по максимуму функционала (12) в варианте  $t$  обозначим как  $S_{1,t}^{opt}$ ,

а по минимуму невязки (при той же априорной информации) — как  $S_{2,t}^{opt}$ . В каждом варианте  $t$  было подсчитано качество  $\Omega_1(S_{1,t}^{opt}, \hat{S})$  и  $\Omega_1(S_{2,t}^{opt}, \hat{S})$  решений  $S_{1,t}^{opt}$  и  $S_{2,t}^{opt}$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ . Чувствительность этих показателей к особенностям выборки помех в измерениях характеризуют их экстремальные и средние значения, а также среднеквадратические отклонения (СКО), приведенные в табл. 1.

Решение по минимуму эмпирического риска обладает заметно лучшими свойствами, чем решение по минимуму невязки (рис. 4). Если попытаться в первом приближении связать воз-

**Т а б л и ц а 1. Фактические показатели качества решений обратной задачи гравirazведки**

Тип помехи	Параметр	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
1	$\Omega_1(S_{1,t}^{opt}, \hat{S})$	0,305	0,576	0,486	0,062
1	$\Omega_1(S_{2,t}^{opt}, \hat{S})$	0,191	0,583	0,381	0,096
2	$\Omega_1(S_{1,t}^{opt}, \hat{S})$	0,235	0,614	0,474	0,080
2	$\Omega_1(S_{2,t}^{opt}, \hat{S})$	0,169	0,586	0,378	0,093

*Примечание:* суммарное число решений обратной задачи гравirazведки для помех 1-го типа составляет 47 214, для помех 2-го типа — 38 196.

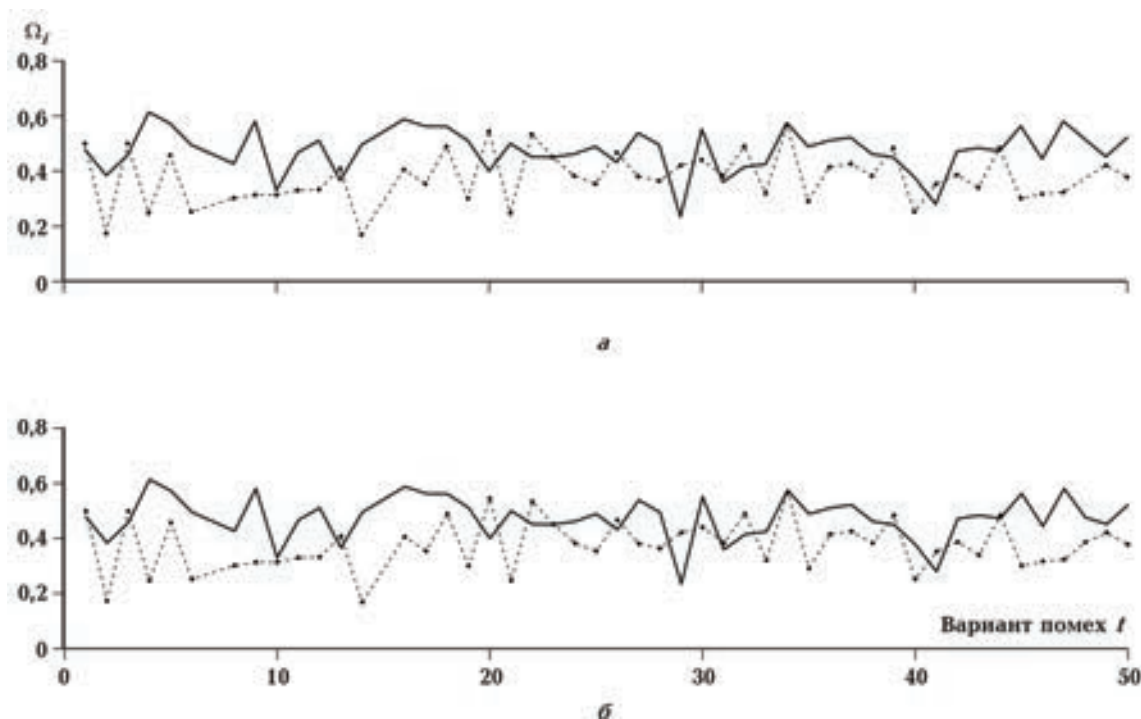


Рис. 4. Совпадение результатов решения обратной задачи гравirazведки по минимуму эмпирического риска (сплошная линия) и невязки (пунктирная линия) для помех типа 1 (а) и типа 2 (б).



**Т а б л и ц а 2. Прогнозируемые показатели качества решений обратной задачи гравиразведки**

Тип помехи	Параметр	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
1	$W(S_1^{\text{opt}})$	0,440	0,596	0,525	0,033
2	$W(S_1^{\text{opt}})$	0,443	0,752	0,545	0,056

возможности метода со свойствами помех в измерениях, то можно отметить: малый процент больших (по модулю) геологических помех не оказывает заметного влияния на точность решения; важно, чтобы число измерений, где доминируют помехи инструментального характера, было преобладающим [Балк, 2011].

На практике фактическую точность  $\Omega_1(S^{\text{opt}}, \hat{S})$  найденного решения  $S^{\text{opt}}$  узнать напрямую невозможно, но это можно сделать обходным путем, взяв за приближение к ней оценку математического ожидания меры близости истинного и найденного решений

$$\bar{W}(S_1^{\text{opt}}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N W(S_{1,t}^{\text{opt}}),$$

среднеквадратическое отклонение этого параметра

$$\sigma_W = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( W(S_{1,t}^{\text{opt}}) - \bar{W}(S_1^{\text{opt}}) \right)^2 \right)^{1/2},$$

а также его минимальное и максимальное значения (табл. 2).

В нашем примере погрешность оценки среднего значения ошибки решения  $\bar{\Omega}_1(S_1^{\text{opt}})$  с помощью величины  $\bar{W}(S_1^{\text{opt}})$  составляет для помех 1-го типа всего 8 %, для помех 2-го типа — около 15 %. Погрешность оценки величины

$\sigma_1$  с помощью  $\sigma_W$  несколько выше, но является вполне приемлемой для практики. Мера скрытой достоверной информации, заключенной в решении  $S^{\text{opt}}$  обратной задачи по минимуму риска  $R$  (или максимуму математического ожидания  $W$  меры близости истинного и построенного решений), достаточно уверенно можно оценить по значению  $R(S^{\text{opt}})$  (или  $W(S^{\text{opt}})$ ).

Следует добавить, что результаты решения обратной задачи гравиразведки, полученные с применением алгоритма минимизации эмпирического риска и соответствующие минимальной невязке наблюдаемого и модельного полей, существенно различаются между собой (табл. 3).

**Заключение.** Задача разработчиков программно-алгоритмического обеспечения обратных задач гравиразведки состоит в создании продукта, позволяющего интерпретатору реализовать ту постановку обратной задачи, которую он в силу опыта и интуиции считает наиболее подходящей. Задача математика-прикладника, работающего в области вычислительной геофизики, раскрыть перед интерпретатором преимущества и недостатки каждого метода и объяснить, к каким последствиям может привести использование тех или иных неадекватных реальности априорных предположений. Наиболее доходчиво это можно сделать в отношении методов, в которых свойства полученных результатов интерпретации выражены в терминах их информативности. При этом сами результаты могут выражаться не только в привычном виде как единичное допустимое реше-

**Т а б л и ц а 3. Сопоставление средних показателей решения обратной задачи гравиразведки по минимуму эмпирического риска и невязки**

Тип помехи	Параметр	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
1	$\Omega_1(S_1^{\text{opt}}, S_2^{\text{opt}})$	0,174	0,695	0,476	0,118
2	$\Omega_1(S_1^{\text{opt}}, S_2^{\text{opt}})$	0,241	1,00	0,475	0,151

ние обратной задачи, но и в терминах геофизически содержательных функций, которые бы характеризовали вероятность обнаружения источников аномалии в точках изучаемого геоло-

гического пространства [Балк, Долгаль, 2015; Долгаль, Шархимуллин, 2011].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-05-01823А).*

### Список литературы

- Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов. *Автоматика и телемеханика*. 1981. № 2. С. 65—83.
- Балк П.И. Об устойчивом методе локализации однородных геологических объектов по гравитационным аномалиям. *Геология и геофизика*. 1980. № 10. С. 89—98.
- Балк П.И. О принципиальных недостатках общепринятых форм представления результатов математической интерпретации потенциальных полей. *Геофиз. журн.* 2004. Т. 26. № 5. С. 124—132.
- Балк П.И. Оценивание параметров функциональной зависимости при нулевом медианном значении помех в измерениях. *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 5. С. 69—81.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминистские модели интерпретации для оптимизации местоположения и глубин заложения скважин при проверке гравитационных аномалий. *Физика Земли*. 2015а. № 1. С. 98—111.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Минимаксный подход к решению обратных задач гравиразведки и магниторазведки. *Докл. РАН*. 2015б. Т. 462. № 6. С. 706—710.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В. Сеточные методы решения обратных задач и опыт их применения при прослеживании дифференцированных интрузий по данным гравиразведки. *Геология и геофизика*. 1993. № 5. С. 127—134.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Согласование конкурирующих вариантов интерпретации гравитационных аномалий методом минимизации эмпирического риска. *Геоинформатика*. 2015. № 4. С. 24—35.
- Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногенных гравитационных аномалий. *Геоинформатика*. 2011. № 4. С. 49—56.
- Никитин А.А. Детерминированность и вероятность в обработке и интерпретации геофизических данных. *Геофизика*. 2004. № 3. С. 10—16.
- Стратонович Р.Л. Теория информации. Москва: Сов. радио, 1975. 424 с.
- Страхов В.Н. Геофизика и математика. *Физика Земли*. 1995. № 12. С. 4—23.
- Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии. *Докл. АН СССР*. 1976. Т. 227. № 2. С. 344—347.

## Minimization risk technique for solving gravity inverse problems in weak assumptions about geological noise properties

© P. I. Balk, A. S. Dolgal, 2016

The concept of the hidden information on the gravity anomaly sources as joint fragment of the true and model disturbing objects was introduced. In the presence of uncertainty inherent in inverse problems, limit possibilities of algorithms for constructing the best estimates of the parameters source models is to maximize the secure amount of the extracted reliable information. Justified application to "ore" type gravity nonlinear inverse problems known to minimization risk concept in solving the choice problem under conditions of a priori information shortage. According to this concept as the best of the feasible solutions of the inverse problem is

chosen at which the minimum of the expectation value error of interpretation results is achieved. It is assumed zero median noise in the observed gravity field, ie, the presence of positive and negative noise with equal probability, but it is not excluded that the absolute value of the interference of some one sign may prevail. Constructing a sufficiently representative set of feasible interpretation options of which will be chosen the best, performed by fitting algorithm in the finite element class models of geological bodies. An important advantage of the method, which is based on the idea of minimizing the risk is the possibility of an approximate estimate of the proximity of the proposed mathematical model to the true anomaly sources. Produced the results of computational experiments confirming the effectiveness of such assessments, as well as higher quality of the inverse problem solution using the proposed method in comparison with the traditional approach.

**Key words:** gravitational exploration, interpretation, inverse problem, field source, noise, anomalous error, empirical risk minimization.

## References

- Ayzerman M.A., Malishewskiy A. V., 1981. Some aspects of the general theory of best option choice. *Avtomatika i telemekhanika* (2), 65—83 (in Russian).
- Balk P.I., 1980. On a stable method of localization of homogeneous geological objects by gravitational anomalies. *Geologiya i geofizika* (10), 89—98 (in Russian).
- Balk P.I., 2004. About fundamental shortcomings of conventional forms of presentation of the results of mathematical interpretation of potential fields *Geofizicheskiy zhurnal* 26(5), 124—132 (in Russian).
- Balk P.I., 2011. Parameter Estimation of functional dependence at zero median value of noise in the measurements. *Avtomatika i telemekhanika* (5), 69—81 (in Russian).
- Balk P.I., Dolgal A.S., 2015a. Deterministic models of interpretation for optimizing the locations and depths of the boreholes for verifying the anomalies in gravity. *Fizika Zemli* (1), 98—111 (in Russian).
- Balk P.I., Dolgal A.S., 2015b. The minimax approach to solving inverse problems of gravity and magnetic data. *Doklady RAN* 462(6), 706—710 (in Russian).
- Balk P.I., Dolgal A.S., Balk T.V., 1993. Grid methods for solving inverse problems and experience of their use in tracking intrusions differentiated according to the gravity prospecting. *Geologiya i geofizika* (5), 127—134 (in Russian).
- Balk P.I., Dolgal A.S., Balk T.V., Khristenko L.A., 2015. Coordination of competitive variants of gravity data interpretation by empirical risk minimization method. *Geoinformatika* (4), 24—35 (in Russian).
- Dolgal A.S., Sharkhimullin A.F., 2011. The increase of the interpretation accuracy for monogenic gravity anomalies. *Geoinformatika* (4), 49—56 (in Russian).
- Nikitin A.A., 2004. Determinancy and probability in the processing and interpretation of geophysical data. *Geofizika* (3), 10—16 (in Russian).
- Stratonovich R.L., 1975. Information Theory. Moscow: Sovetskoye radio, 424 p. (in Russian).
- Strakhov V.N., 1995. Geophysics and Mathematics. *Fizika Zemli* (12), 4—23 (in Russian).
- Strakhov V.N., Lapina M.I., 1976. Mounting method for solving the inverse problem of gravimetry. *Doklady AN SSSR* 227(2), 344—347 (in Russian).