

## Дисперсия фазовых скоростей в горизонтально-слоистых анизотропных слабоконтрастных периодических средах

Ю. В. Роганов<sup>1</sup>, А. Стовас<sup>2</sup>, В. Ю. Роганов<sup>3</sup>, 2020

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Киев, Украина

<sup>2</sup>Норвежский университет, Тронхейм, Норвегия

<sup>3</sup>Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 23 октября 2019 г.

В статье разработан метод оценки дисперсии скоростей волн Флоке в периодической горизонтально-слоистой среде с анизотропными слоями. Метод основан на вычислении эффективной системной матрицы — логарифма пропагатора периода. В интервале низких частот эффективная системная матрица аппроксимирована тремя начальными членами ряда BCH (Baker-Campbell-Hausdorff). Собственные числа эффективной системной матрицы являются вертикальными медленностями волн Флоке разного типа, распространяющихся вверх и вниз. Для оценки дисперсии волн Флоке вычисляются разности системных матриц слоев и системной матрицы усредненной среды Бакуса для периода — матрицы приращений. В предположении, что матрицы приращений малы по сравнению с системной матрицей среды Бакуса, применяется теория возмущений второго порядка, позволяющая оценить собственные числа эффективной системной матрицы. В результате выведены формулы для вычисления аппроксимации дисперсии вертикальных медленностей и фазовых скоростей волн Флоке в периодической горизонтально-слоистой среде с анизотропными слоями. Эти формулы содержат взвешенную сумму произведений различных пар приращений системных матриц слоев и позволяют достаточно точно аппроксимировать дисперсии фазовых скоростей и вертикальных медленностей диапазоне малых частот. Точность вычислений продемонстрирована на трехслойной периодической среде с орторомбическими слоями с разными азимутами плоскостей симметрии. Полученная аппроксимация дисперсии квадратов вертикальных медленностей и фазовых скоростей волн Флоке достаточно точная в диапазоне малых частот и удовлетворительна в первой трети соответствующей зоны проходимости.

**Ключевые слова:** периодическая среда, дисперсия, фазовая скорость, волна Флоке, теория возмущений.

**Введение.** Изучению свойств волн, распространяющихся в периодических горизонтально-слоистых средах, посвящено много работ [Рытов, 1956; Бреховских, 1973; Молотков, 1979; Daley, Hron 1979; Сибиряков и др., 1980; Молотков, Хило, 1983; Helbig, 1984; Santosa, Symes 1991; Braga, Herrmann, 1992; Norris 1993; Norris, Wang 1994; Chicone, 1999; Wang, Rokhlin, 2002].

В первых работах были выполнены исследования дисперсионных свойств периодических сред с изотропными слоями на основе комбинирования уравнений движения в однородных слоях с условиями непрерывности решений на границах [Delph et al., 1978]. Уравнение дисперсии выводили приравниванием нулю детерминанта матрицы, размер которой зависел от числа слоев в периоде.

Матричный метод [Thomson, 1950; Haskell, 1953; Gilbert, Backus, 1966] и вычисление собственных чисел пропагатора для периода (матрицы монодромии) позволили значи-

тельно упростить дисперсионные уравнения для многослойных сред. Эти результаты были обобщены на периодические среды с жидкоупругими слоями [Schoenberg, 1984; Роганов, Роганов, 2016]. К. Хелбик получил аналитическое решение уравнения дисперсии и его низкочастотное приближение для  $SH$ -волн в периодических средах [Helbig, 1984]. А. Найфа вывел дисперсионное уравнение для периодических слоистых анизотропных сред [Nayfeh, 1989, 1991, 1995]. А. Брага и Дж. Хермен [Braga, Herrmann, 1992] представили корни дисперсионного уравнения в аналитическом виде и использовали их для описания расположения зон прохождения и поглощения.

Периодическая среда при частоте, стремящейся к нулю, становится однородной и ее параметры получают специальным осреднением по периоду параметров слоев [Backus, 1962; Schoenberg, 1989]. Для ненулевых частот применима теорема Флоке [Floquet, 1883; Якубович, Старжинский, 1972], следствием которой является существование стационарных пакетов, состоящих из плоских волн разного типа, распространяющихся в слоях вверх и вниз. Распространение этих пакетов (волн Флоке) в спектральной области описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка. Матрица этой системы зависит от частоты, горизонтальных медленностей и параметров слоев. Она пропорциональна логарифму пропагатора периода (матрицы монодромии). Собственные числа этой эффективной системной матрицы являются вертикальными медленностями волн Флоке, а собственные векторы — векторами смещений-напряжений. Эти собственные векторы и числа полностью отвечают за динамику распространения волн в периодической среде. В частности, они ответственны за наличие зон прохождения и поглощения [Якубович, Старжинский, 1972; Роганов и др., 2014]. Полученная матрица обладает специфическими свойствами и не является системной матрицей ни для какой однородной упругой среды.

Поскольку пропагатор является матричным произведением экспонент, его логарифм можно разложить в ряд BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) по частоте [Roganov, Stovas, 2012], где нулевой член является системной матрицей однородной среды Бакуса, а второй член отвечает за дисперсию волн при низких частотах и представлен однородным многочленом 3 степени либо коммутаторами от некоммутативных переменных, являющихся системными матрицами слоев. Полученная формула применена к исследованию скоростей распространения волн в вертикальном направлении в бинарных периодических средах.

В статье [Stovas et al., 2013] собственные числа эффективной системной матрицы были разложены в ряды по горизонтальным медленностям в окрестности вертикального направления, а начальные коэффициенты ряда сопоставлены с такими же коэффициентами для однородной ВТИ-среды. Это позволило найти параметры частотно-зависимой эффективной ВТИ-среды, кинематически аппроксимирующей периодическую среду с ВТИ-слоями в окрестности вертикального направления.

В статье [Roganov, Stovas, 2014] выведены формулы для дисперсии и рассеяния в вертикальном направлении в периодической слабоконтрастной горизонтально-слоистой среде.

Полученные результаты распространены на бинарную периодическую среду с орторомбическими слоями [Roganov et al., 2019]. Согласно теории возмущений найдена аппроксимация собственных чисел эффективной системной матрицы, являющихся вертикальными медленностями волн Флоке различного типа. Эта аппроксимация зависит от произведения возмущений системных матриц слоев периода и задается однородным многочленом второй степени от возмущений параметров слоев.

В настоящей статье результаты предыдущей статьи обобщены на периодическую горизонтально-слоистую среду с произвольным количеством слоев в периоде и любым типом анизотропии в слоях.

**Теория.** Рассмотрим горизонтально-слоистую среду с  $N$  анизотропными слоями в периоде. Распространение плоских волн в каждом слое после преобразования Фурье по времени и горизонтальным координатам пространства  $x_1, x_2$ , описывается матричным уравнением:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dz} = i\omega\mathbf{A}_j\mathbf{b}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}_j$  — системная матрица  $j$ -го слоя;  $\mathbf{b}=(u_1, u_2, u_3, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33})^T$  — вектор, состоящий из компонент скоростей смещений и тензора напряжений,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  — круговая частота. Системную матрицу  $\mathbf{A}_j$  представляют в виде [Stroh, 1962]

$$\mathbf{A}_j = -\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C}_{33}^{-1} \\ \mathbf{D} & \mathbf{B}^T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{C}_{33}^{-1}(p_1\mathbf{C}_{31} + p_2\mathbf{C}_{32}), \\ \mathbf{D} &= \sum_{m,n=1,2} p_m p_n (\mathbf{C}_{m3}\mathbf{C}_{33}^{-1}\mathbf{C}_{3n} - \mathbf{C}_{mn}) + \rho_j \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3)$$

$p_1, p_2$  — горизонтальные компоненты вектора медленности,  $\mathbf{I}$  — единичная  $3 \times 3$  матрица,  $\rho_j$  — плотность и  $\mathbf{C}_{mn}[p, q] = c_{mp, nq}^{(j)}$  — матрица, состоящая из компонент тензора упругости, относящихся к  $j$ -му слою.

Обозначим  $z_j$  — мощность  $j$ -го слоя,  $H = z_1 + \dots + z_N$  — мощность периода и  $\alpha_j = z_j/H$ .

Системная матрица  $\tilde{\mathbf{A}}(\omega)$  бесконечной периодической горизонтально-слоистой среды определяется соотношением

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega) = \frac{1}{i\omega H} \log \mathbf{P}(\omega, p_1, p_2), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{P}(\omega, p_1, p_2) = \exp(i\omega z_N \mathbf{A}_N) \dots \exp(i\omega z_1 \mathbf{A}_1) \quad (5)$$

является матричным пропагатором слоев  $j=1, \dots, N$  периода и называется матрицей монодромии [Haskell, 1953; Coppel, Howe, 1965; Braga, Herrmann, 1992; Roganov, Stovas, 2012]. Резонансные свойства плоских волн Флоке, распространяющихся в бесконечной периодической среде, зависят от расположения собственных чисел  $\theta_\alpha$  матрицы  $\mathbf{P}(\omega, p_1, p_2)$  на комплексной плоскости. Если  $|\theta_\alpha| = 1$ , то соответствующая плоская волна находится в зоне прохождения. В этом случае  $\theta_\alpha = \exp(i\varphi_\alpha)$ ,  $\varphi_\alpha \in \mathbf{R}$  и вертикальная медленность этой волны  $q_\alpha = \varphi_\alpha / (\omega H)$ . Из формулы (4) следует, что  $q_\alpha$  — собственное число матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(\omega)$ . Если  $|\theta_\alpha| \neq 1$ , то волна находится в зоне поглощения. При небольших значениях параметров  $(\omega, p_1, p_2)$  плоские волны всех типов  $\alpha$  находятся в зоне прохождения и все числа  $q_\alpha$  являются действительными. Выполняя сортировку шести чисел  $q_\alpha$  по возрастанию, можно расклассифицировать волны Флоке по типам и направлениям распространения:  $q_{S2}^{\text{up}} \leq q_{S1}^{\text{up}} \leq q_{qP}^{\text{up}} \leq 0 \leq q_{qP}^{\text{down}} \leq q_{S1}^{\text{down}} \leq q_{S2}^{\text{down}}$ . Системная матрица  $\tilde{\mathbf{A}}(\omega)$  при низких частотах  $\omega$  определяется начальными членами ряда BCH [Дынкин, 1947; Roganov, Stovas, 2012]:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega) = \mathbf{F}_0 + \frac{i\omega H}{2} \mathbf{F}_1 - \frac{\omega^2 H^2}{12} \mathbf{F}_2 + o(\omega^2), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F}_0 \equiv \mathbf{A}_B = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{A}_k, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^N \alpha_m \alpha_n [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n], \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N \alpha_m^2 \alpha_n [\mathbf{A}_m, [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n]] + 2 \sum_{\substack{m,n,k=1 \\ m>n>k}}^N \alpha_m \alpha_n \alpha_k \{ [\mathbf{A}_m, [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_k]] + [\mathbf{A}_k, [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_m]] \}. \quad (9)$$

Выражение  $[\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n]$  означает коммутатор  $\mathbf{A}_m \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m$ . Формулы (7), (8) следуют из соотношений (4), (5), а вывод формулы (9) приведен в приложении 1. Матрица  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{A}_B$  является системной для однородной среды Бакуса с осредненными параметрами слоев по периоду.

Обозначим  $q_j^{(0)}$ , ( $j=1, \dots, 6$ ) собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_B$ , а  $\boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}$  и  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)}$  — соответствующие правый и левый собственные векторы и применим теорию возмущений второго порядка точности по частоте  $\omega$  для оценки собственных значений  $q_j$  матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(\omega)$  [Ланкастер, 1978; Madelung, 1964]:

$$k_j q_j = k_j q_j^{(0)} + \frac{i\omega H}{2} \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} - \frac{\omega^2 H^2}{12} \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} - \frac{\omega^2 H^2}{4} \sum_{m \neq j} \frac{k_m^{-1} \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\varphi}_m^{(0)} \boldsymbol{\psi}_m^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}}{q_j^{(0)} - q_m^{(0)}} + o(\omega^2),$$

где  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} = k_j$ .

Из приложения 2 следует, что  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} = 0$ , и поэтому

$$k_j q_j = k_j q_j^{(0)} - \frac{\omega^2 H^2}{12} \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} - \frac{\omega^2 H^2}{4} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N \frac{k_m^{-1} \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\varphi}_m^{(0)} \boldsymbol{\psi}_m^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}}{q_j^{(0)} - q_m^{(0)}} + o(\omega^2). \quad (10)$$

В дальнейшем будем предполагать, что периодическая среда слабоконтрастная, т. е. параметры слоев  $\rho_j, c_{mp,nq}^{(j)}$  мало отличаются от параметров приближения Бакуса  $\rho_B, c_{mp,nq}^{(B)}$ . В этом случае  $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_B + \Delta \mathbf{A}_j$  и  $\Delta \mathbf{A}_j \ll \mathbf{A}_j$ . Из формулы (7) следует, что  $\sum \alpha_j \Delta \mathbf{A}_j = 0$ .

Для слабоконтрастной среды соотношение (10) можно упростить, если правую часть этого равенства рассматривать с точностью до 2-го порядка включительно относительно  $\Delta \mathbf{A}_j$ . Сумму одночленов, имеющих общую степень выше 2 относительно  $\Delta \mathbf{A}_j$  ( $j=1, \dots, N$ ), будем обозначать как  $o(\Delta^2 \mathbf{A}_j)$ .

В приложении 3 доказано, что для слабоконтрастной среды

$$q_j(\omega) = q_j^{(0)} - \frac{\omega^2 H^2 k_j^{-1}}{12} \sum_{p,q=1, \dots, N} \alpha_p \alpha_q t_{pq} \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \Delta \mathbf{A}_p \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_q \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} + o(\omega^2, \Delta^2 \mathbf{A}_j), \quad (11)$$

где  $\mathbf{G}_j = \mathbf{A}_B - q_j^{(0)} \mathbf{I}$ ,

$$t_{pq} = \begin{cases} 3(\tau_{1,p-1} - \tau_{p+1,N})(\tau_{1,q-1} - \tau_{q+1,N}) - 2(\tau_{1,p-1} + \tau_{q+1,N}), & \text{если } p = q, \\ 3(\tau_{1,p-1} - \tau_{p+1,N})(\tau_{1,q-1} - \tau_{q+1,N}) + 4\tau_{p+1,q-1} - 2(\tau_{1,p-1} + \tau_{q+1,N}) + (\alpha_p + \alpha_q), & \text{если } p > q, \\ t_{qp}, & \text{если } p < q \end{cases} \quad (12)$$

и

$$\tau_{p,q} = \begin{cases} \alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_q, & \text{если } p \leq q, \\ 0, & \text{если } p > q. \end{cases}$$

Из формулы (11) следует соотношение для приращения квадрата вертикальной мед-

ленности  $j$ -й волны  $\Delta q_j^2 = q_j^2(\omega) - q_j^{(0)2}$ :

$$\Delta q_j^2 = -\frac{\omega^2 H^2 q_j^{(0)} k_j^{-1}}{6} \sum_{p,q=1,\dots,N} \alpha_p \alpha_q t_{pq} \Psi_j^{(0)} \Delta \mathbf{A}_p \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_q \Phi_j^{(0)} + o(\omega^2, \Delta^2 \mathbf{A}_j). \quad (13)$$

Поскольку  $\Delta q_j^2 = \Delta v_j^{-2} = -2\Delta v_j / v_j^3$ , из соотношения (13) выводим формулу для дисперсии фазовой скорости  $j$ -волны:

$$\Delta v_j = \frac{\omega^2 H^2 q_j^{(0)} k_j^{-1}}{12 \left( q_j^{(0)2} + p_1^2 + p_2^2 \right)^{3/2}} \sum_{p,q=1,\dots,N} \alpha_p \alpha_q t_{pq} \Psi_j^{(0)} \Delta \mathbf{A}_p \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_q \Phi_j^{(0)} + o(\omega^2, \Delta^2 \mathbf{A}_j). \quad (14)$$

Отметим, что если разложить  $\Delta \mathbf{A}_k$  в ряд по контрастам параметров слоев  $\rho_k - \rho_B, c_{mp,nq}^{(k)} - c_{mp,nq}^{(B)}$  и использовать в формуле (13) члены рядов только 0 и 1-й степени, результирующая формула будет верна с точностью до 2-го порядка точности относительно этих контрастов.

Для двуслойной периодической среды ( $N=2$ ) справедливы соотношения  $t_{11} = \alpha_2(3\alpha_2 - 2)$ ,  $t_{12} = 1 - 3\alpha_2\alpha_1$ ,  $t_{22} = \alpha_1(3\alpha_1 - 2)$ ,  $\Delta \mathbf{A}_2 = -\alpha_1/\alpha_2 \Delta \mathbf{A}_1$ ,  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ .

Поэтому

$$\Delta q_j^2 = \frac{\omega^2 H^2 q_j^{(0)} k_j^{-1} \alpha_1^2}{6} \Psi_j^{(0)} \Delta \mathbf{A}_1 \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_1 \Phi_j^{(0)} + o(\omega^2, \Delta^2 \mathbf{A}_j) \quad (15)$$

и этот результат согласуется с результатом из статьи [Roganov et al., 2019].

Для трехслойной периодической среды значения коэффициентов  $t_{ij}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} t_{11} &= (\alpha_2 + \alpha_3)(3\alpha_2 + 3\alpha_3 - 2), & t_{12} &= -(3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_3^2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3), \\ t_{13} &= -(3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2 + 3\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - \alpha_3), \\ t_{22} &= 3\alpha_1^2 - 6\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_3^2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_3, & t_{23} &= 3\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ t_{33} &= (\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_2 - 2 + 3\alpha_1), & t_{21} &= t_{12}, & t_{31} &= t_{13}, & t_{32} &= t_{23}. \end{aligned} \quad (16)$$

**Численный пример.** Для иллюстрации точности вычисления дисперсии плоских волн по формулам (13), (14), рассмотрим трехслойную периодическую среду с анизотропными слоями. В слоях зададим орторомбическую анизотропию с горизонтальной и вертикальными плоскостями симметрии. Азимуты вертикальных плоскостей в трех слоях периода соответственно выберем  $30^\circ, 45^\circ$  и  $0^\circ$ . Ненулевые коэффициенты упругости слоев приведены в таблице. Плотности  $\rho$  среды в слоях соответственно равны 2000, 2200, 2100 кг/м<sup>3</sup>, мощности слоев — 3, 5 и 2 м, скорости по вертикали  $qP$ -волн соответственно равны 2356, 1568, 1900 м/с, а скорости  $S_1$ -волн по вертикали — 1225, 603, 850 м/с.

**Т а б л и ц а . Коэффициенты упругости трех анизотропных слоев периодической среды, 109 н/м<sup>2</sup>**

| $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{16}$ | $C_{22}$ | $C_{23}$ | $C_{26}$ | $C_{33}$ | $C_{36}$ | $C_{44}$ | $C_{45}$ | $C_{55}$ | $C_{66}$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 15,387   | 7,415    | 6,824    | 0,323    | 15,188   | 6,879    | -0,15    | 11,01    | -0,05    | 3,299    | -0,172   | 3,101    | 4,21     |
| 6,141    | 3,14     | 2,32     | -0,14    | 6,141    | 2,32     | -0,143   | 5,409    | -0,07    | 0,9      | -0,1     | 0,9      | 1,943    |
| 10,917   | 6,636    | 5,443    | 0        | 11,008   | 3,332    | 0        | 7,581    | 0        | 1,96     | 0        | 1,517    | 2,576    |

Вычисления показывают, что на границе между первой зоной прохождения и первой зоной поглощения плоские волны Флоке разного типа с горизонтальными медленностями  $p_1 = p_2 = 0,1$  с/км имеют частоты  $F_{qP} = 54,2$  Гц,  $F_{S1} = 36,9$  Гц,  $F_{S2} = 34,1$  Гц.

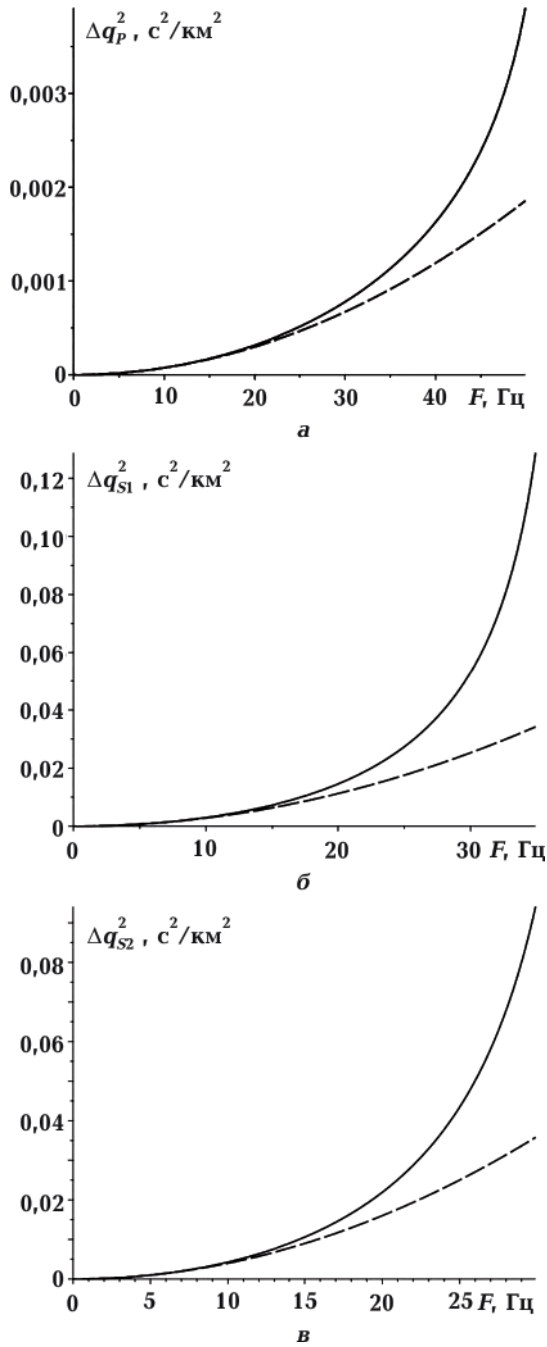


Рис. 1. Дисперсии квадратов вертикальных медленностей  $\Delta q^2 = q^2(\omega) - q^2(0)$  в первой зоне прохождения для горизонтальных медленностей  $p_1 = p_2 = 0,1$  с/км в зависимости от частоты  $F = \omega/2\pi$  для  $qP$ -волны (а),  $S_1$ -волны (б),  $S_2$ -волны (в). Сплошные линии — точные значения, пунктирные линии — аппроксимации по формуле (13).

Fig. 1. Dispersions of the squares of vertical slowness  $\Delta q^2 = q^2(\omega) - q^2(0)$  in the first passband at horizontal slowness  $p_1 = p_2 = 0,1$  s/km as a function of frequency  $F = \omega/2\pi$  for  $qP$ -wave (а),  $S_1$ -wave (б),  $S_2$ -wave (в). Solid lines denote exact values, dashed lines denote approximations by the formula (13).

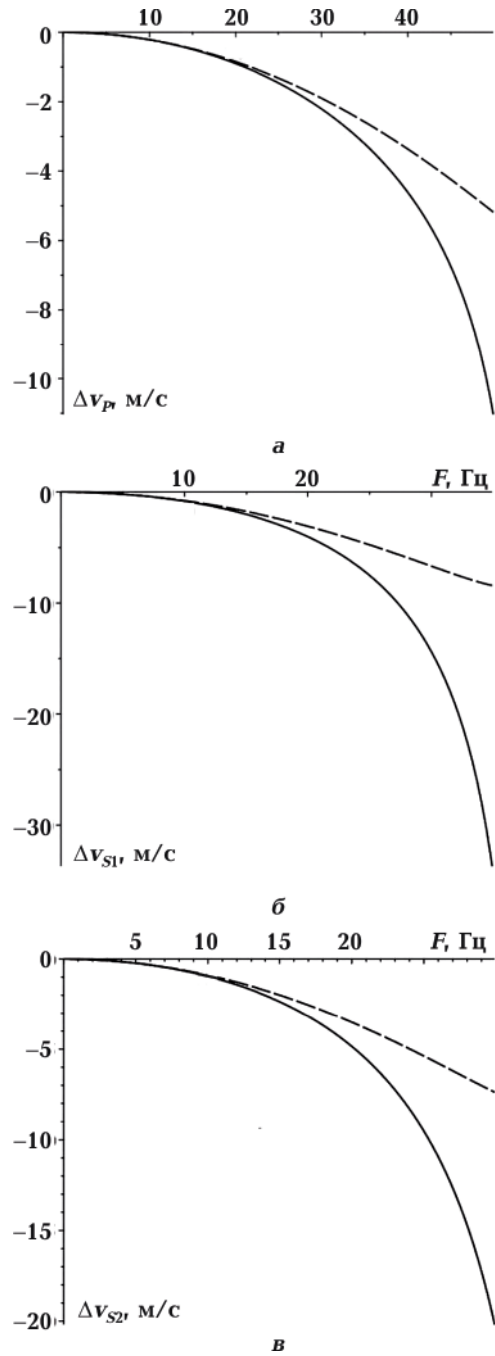


Рис. 2. Дисперсии фазовых скоростей  $\Delta v = v(\omega) - v(0)$  в первой зоне прохождения для горизонтальных медленностей  $p_1 = p_2 = 0,1$  с/км в зависимости от частоты  $F = \omega/2\pi$  для  $qP$ -волны (а),  $S_1$ -волны (б),  $S_2$ -волны (в). Сплошные линии — точные значения, пунктирные линии — аппроксимации по формуле (14).

Fig. 2. Phase velocity dispersions  $\Delta v = v(\omega) - v(0)$  in the first passband at horizontal slowness  $p_1 = p_2 = 0,1$  s/km as a function of frequency  $F = \omega/2\pi$  for  $qP$ -wave (а),  $S_1$ -wave (б),  $S_2$ -wave (в). Solid lines denote exact values, dashed lines denote approximations by the formula (14).



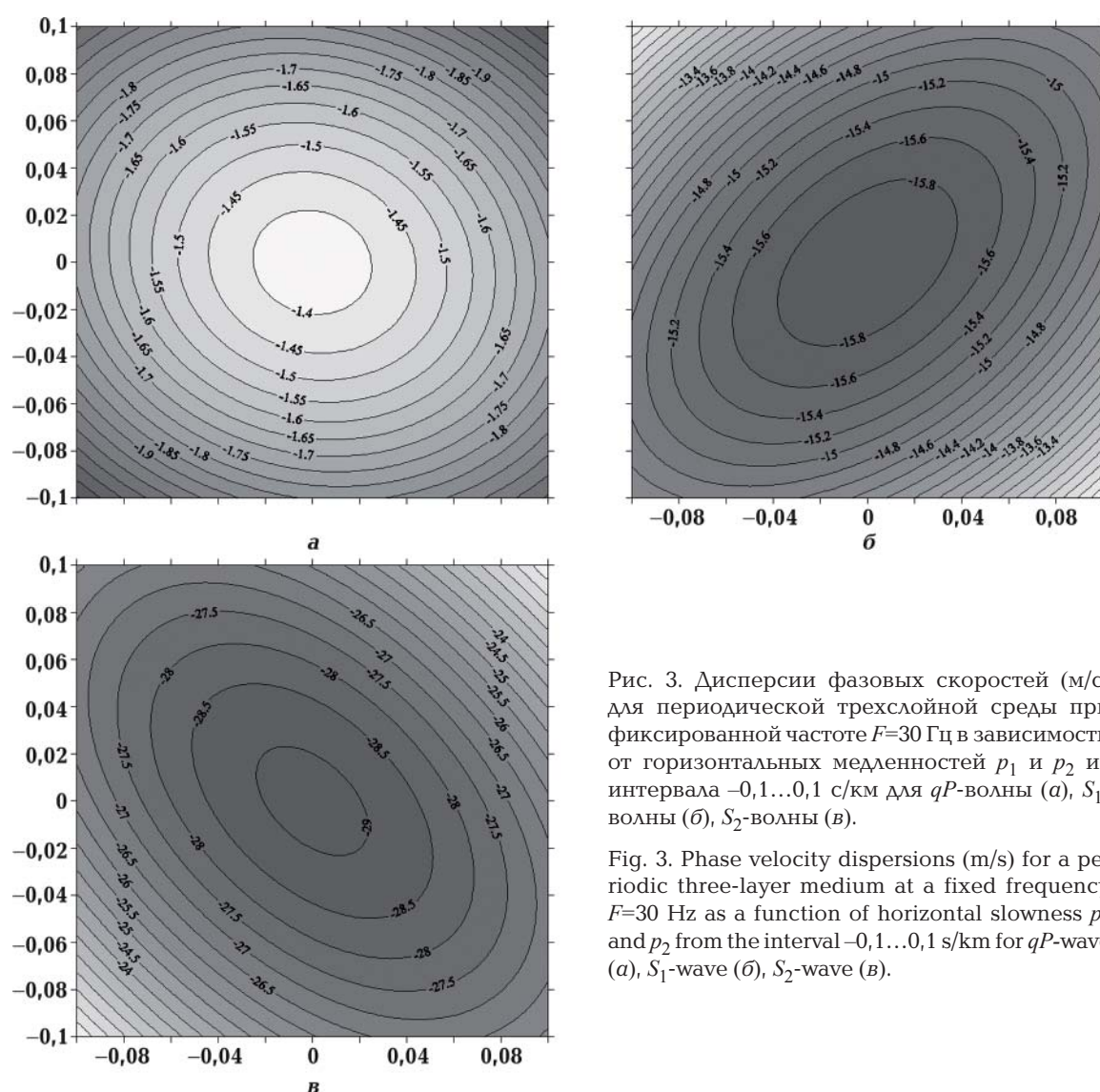


Рис. 3. Дисперсии фазовых скоростей (м/с) для периодической трехслойной среды при фиксированной частоте  $F=30$  Гц в зависимости от горизонтальных медленностей  $p_1$  и  $p_2$  из интервала  $-0,1 \dots 0,1$  с/км для  $qP$ -волны (а),  $S_1$ -волны (б),  $S_2$ -волны (в).

Fig. 3. Phase velocity dispersions (m/s) for a periodic three-layer medium at a fixed frequency  $F=30$  Hz as a function of horizontal slownesses  $p_1$  and  $p_2$  from the interval  $-0,1 \dots 0,1$  s/km for  $qP$ -wave (a),  $S_1$ -wave (б),  $S_2$ -wave (в).

Из рис. 1, 2 видно, что аппроксимация дисперсии квадратов вертикальных медленностей и фазовых скоростей волн Флоке по формулам (13), (14) достаточно точная в диапазоне малых частот и удовлетворительна в первой трети соответствующей зоны проходимости. Например, относительные погрешности вычисления дисперсии фазовых скоростей  $qP$ -,  $S_1$ -,  $S_2$ -волн для частот  $F=10$  Гц и  $F=20$  Гц составляют соответственно 1,4 %, 5,8 %, 6,9 % и 5,7 %, 23 %, 27 %.

На рис. 3 показаны дисперсии фазовых скоростей (м/с) волн Флоке, распространяющихся в трехслойной периодической среде с параметрами, описанными выше, для частоты  $F=30$  Гц в зависимости от горизонтальных медленностей  $p_1$ ,  $p_2$  из интервала  $-0,1 \dots 0,1$  с/км. Дисперсии рассчитаны по точным формулам на основе вычисления собственных чисел эффективной системной матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(2\pi F)$  из соотношения (4). Из рис. 3 видно, что дисперсия  $qP$ -волны увеличивается с увеличением углов наклона к вертикали, а дисперсии  $S_1$ - и  $S_2$ -волн, наоборот, убывают. Изолинии разного типа волн расположены вдоль кривых, похожих на эллипсы, оси которых имеют разные азимуты. Наименьшую дисперсию имеет  $qP$ -волна, а наибольшую —  $S_2$ -волна.

Интересное поведение дисперсий  $S_1$  и  $S_2$ -волн происходит в окрестности сингулярной

точки, которая для  $F=30$  Гц имеет координаты  $p_1=0,249, p_2=0,172$  с/км. Координаты сингулярной точки зависят от частоты, и эта же точка при частоте  $F=0$  (для среды Бакуса) имеет координаты  $p_1=0,269, p_2=0,168$  с/км. На рис. 4 и рис. 5 показаны соответствующие зависимости фазовых скоростей (м/с) от горизонтальных медленностей и отмечены сингулярные точки.

На рис. 4 и рис. 5 кружками отмечены соответственно сингулярные точки  $p_1=0,249, p_2=0,172$  с/км для частоты  $F=30$  Гц и  $p_1=0,269, p_2=0,168$  с/км для частоты  $F=0$  Гц.

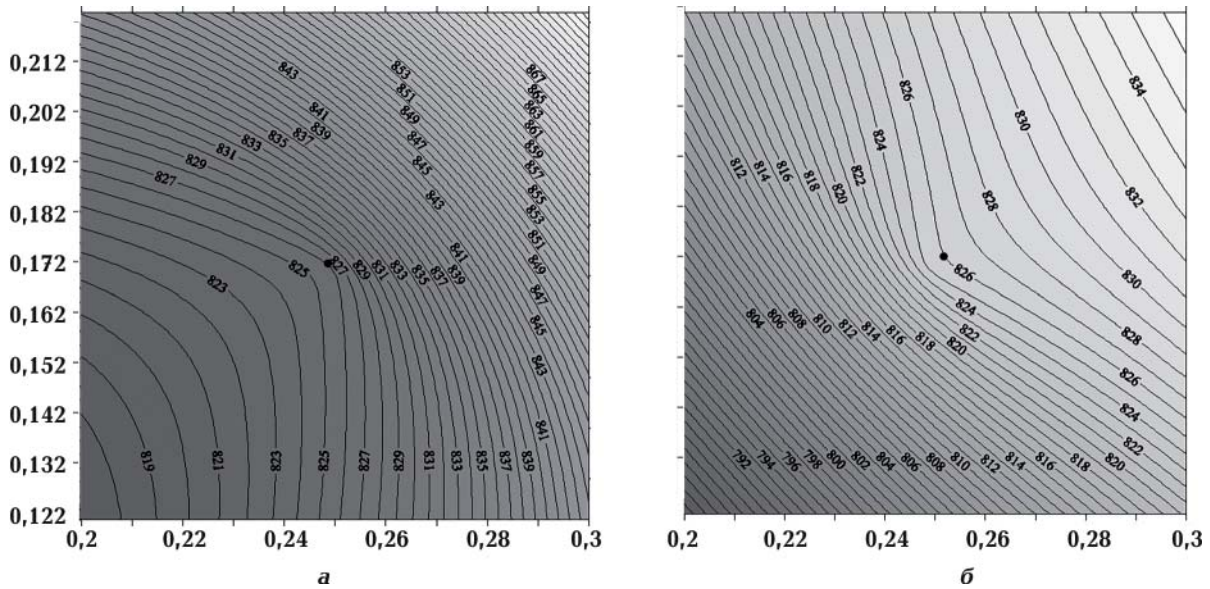


Рис. 4. Зависимости фазовых скоростей (м/с) от горизонтальных медленностей в интервале  $p_1=0,2\div0,3, p_2=0,122\div0,222$  с/км для частоты  $F=30$  Гц:  $S_1$ -волны (а),  $S_2$ -волны (б).

Fig. 4. Phase velocities (m/s) at a fixed frequency  $F=30$  Hz as a function of horizontal slowness from the interval  $p_1=0,2\div0,3, p_2=0,122\div0,222$  s/km for  $S_1$ -wave (a),  $S_2$ -wave (б).

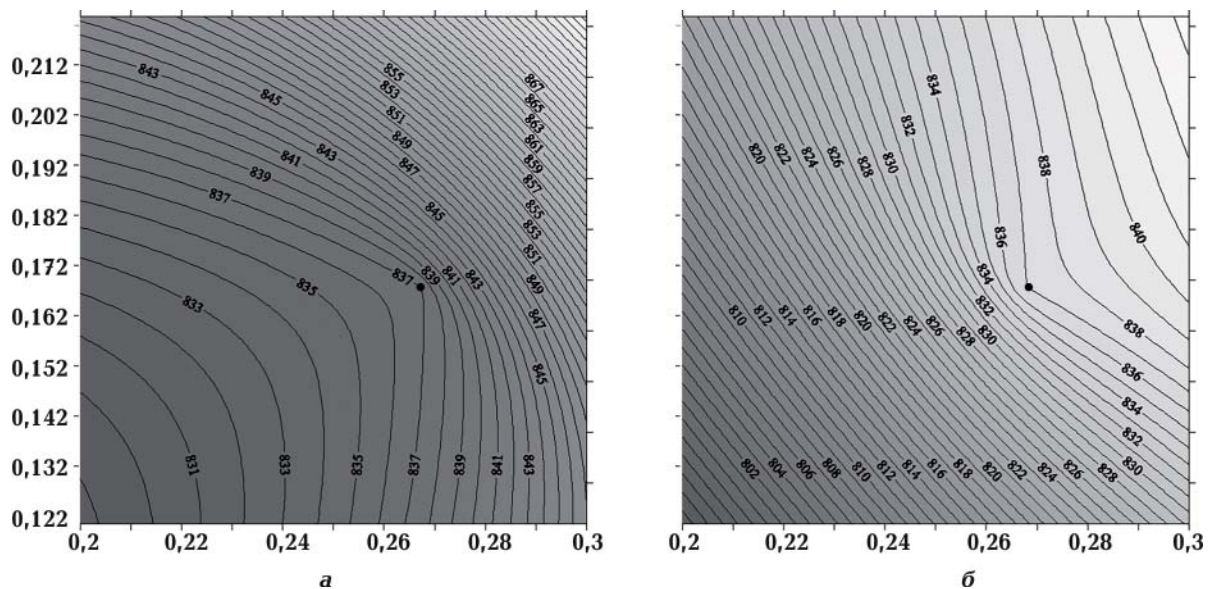


Рис. 5. Зависимости фазовых скоростей (м/с) от горизонтальных медленностей в интервале  $p_1=0,2\div0,3, p_2=0,122\div0,222$  с/км для частоты  $F=0$  Гц:  $S_1$ -волны (а),  $S_2$ -волны (б).

Fig. 5. Phase velocities (m/s) at a fixed frequency  $F=0$  Hz as a function of horizontal slowness from the interval  $p_1=0,2\div0,3, p_2=0,122\div0,222$  s/km for  $S_1$ -wave (a),  $S_2$ -wave (б).



В связи с тем, что при вычислении дисперсий вычитаются значения скоростей для заданной частоты и для частоты 0, в окрестности сингулярной точки возникает область быстрых изменений дисперсий  $S_1$  и  $S_2$ -волн (рис. 6). Несмотря на существование указанной области, аппроксимация скоростей по формуле (14) остается удовлетворительной в первой трети соответствующей зоны проходимости. В подтверждение этого сравним дисперсии скоростей разного типа волн в окрестности указанной выше сингулярной точки при частоте  $F=15$  Гц, вычисленные по точной и приближенной формулам. Из рис. 7 видно, что в этом случае максимальные различия дисперсий для  $qP$ -волны составляют 3 %, для  $S_1$ -волны — 12 % и для  $S_2$ -волны — 15 %.

**Выводы.** С использованием теории возмущений второго порядка и разложения в ряд ВСН эффективной системной матрицы выведены формулы для вычисления аппроксимации дисперсии вертикальных медленностей и фазовых скоростей волн Флоке в периодической горизонтально-слоистой среде с анизотропными слоями. Эти формулы содержат взвешенную сумму произведений различных пар приращений системных

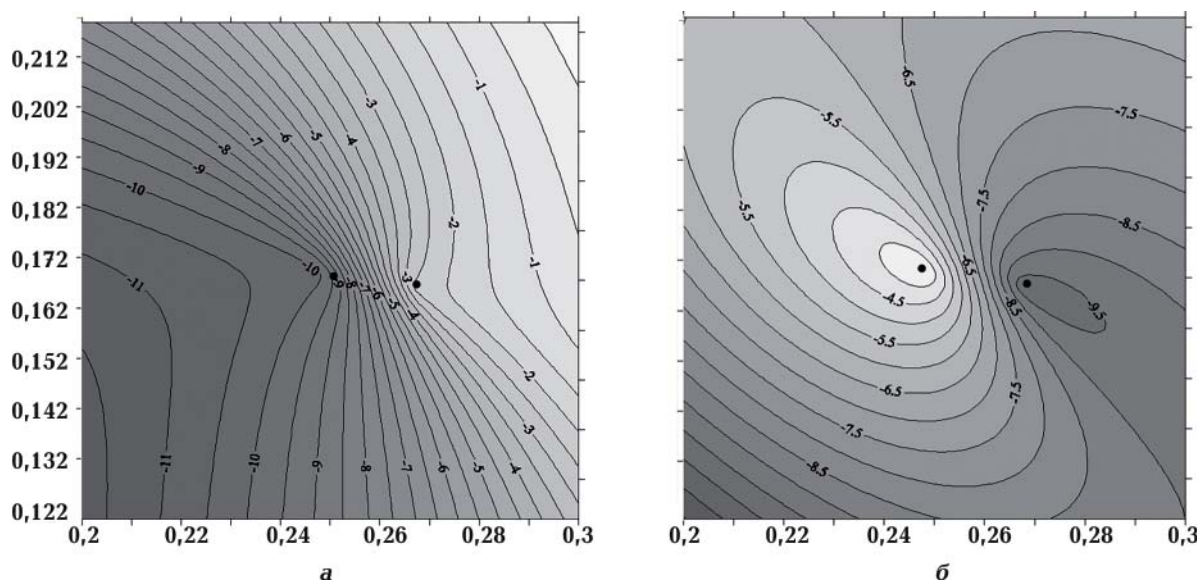


Рис. 6. Дисперсии фазовых скоростей (м/с) для периодической трехслойной среды в интервале горизонтальных медленностей  $p_1=0,2\div 0,3$ ,  $p_2=0,122\div 0,222$  с/км для частоты  $F=30$  Гц:  $S_1$ -волны (а),  $S_2$ -волны (б).

Fig. 6. Phase velocity dispersions (m/s) for a periodic three-layer medium at a fixed frequency  $F=30$  Hz as a function of horizontal slowness from the interval  $p_1=0,2\div 0,3$ ,  $p_2=0,122\div 0,222$  s/km for  $S_1$ -wave (a),  $S_2$ -wave (b).

матриц слоев относительно системной матрицы среды Бакуса и позволяют достаточно точно аппроксимировать дисперсии фазовых скоростей и вертикальных медленностей в диапазоне малых частот. Точность вычислений продемонстрирована на трехслойной периодической среде с орторомбическими слоями с разными азимутами плоскостей симметрии.

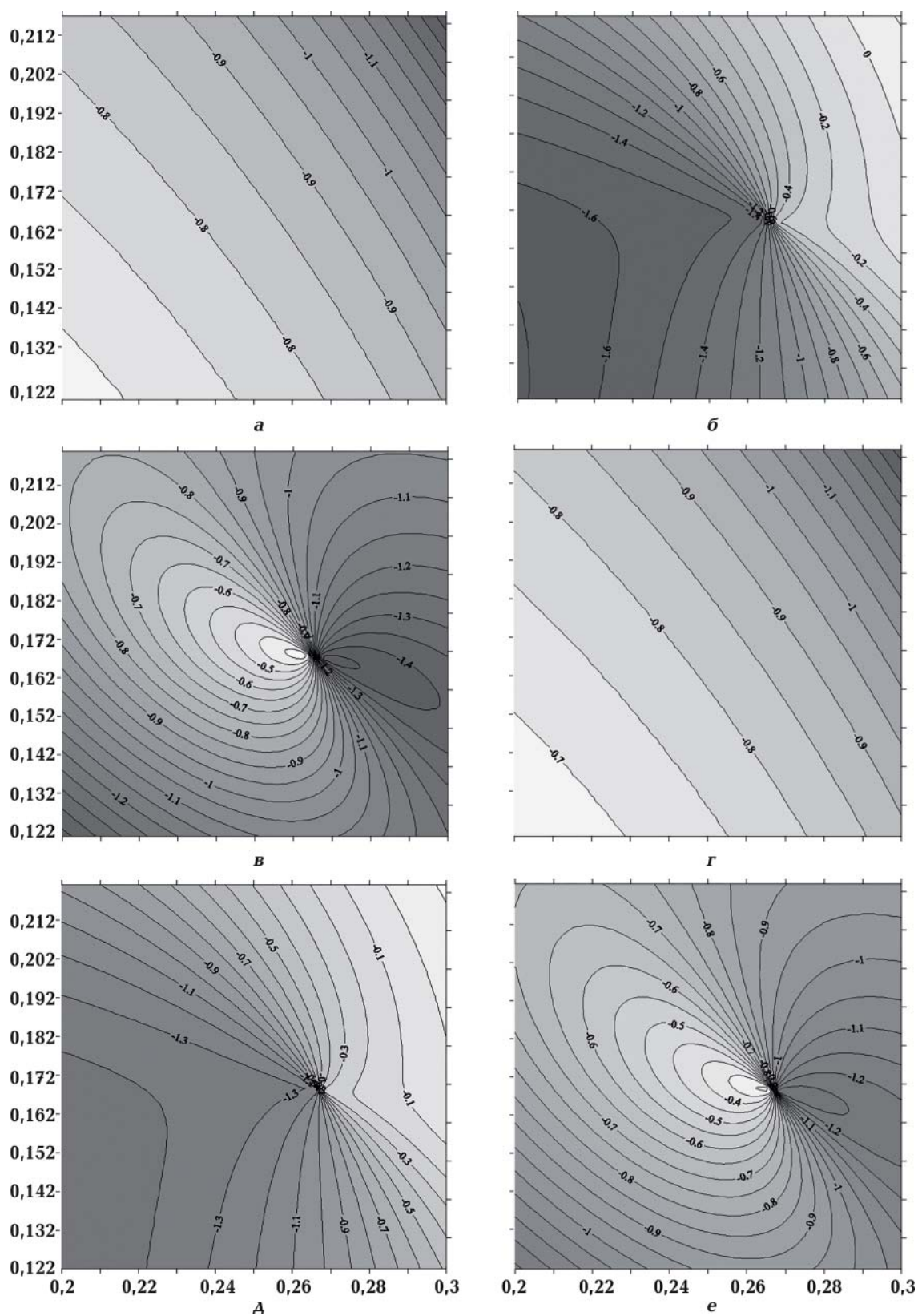


Рис. 7. Дисперсии фазовых скоростей (м/с) при частоте  $F=15$  Гц, вычисленные по точной формуле для  $qP$ -волны (а),  $S_1$ -волны (б),  $S_2$ -волны (в); а также те же дисперсии, вычисленные по приближенной формуле (14) (г—е).  
 Fig. 7. Phase velocity dispersions (m/s) at a frequency of  $F=15$  Hz, calculated by the exact formula for the  $qP$ -wave (а),  $S_1$ -wave (б),  $S_2$ -wave (в); and the same dispersions calculated by the approximate formula (14) (г—е).

## Приложение 1.

Докажем справедливость равенства (9). Из работы [Roganov, Stovas, 2012] следует, что

$$\mathbf{F}_2 = -2\mathbf{R}_1^3 + 3(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1) - 4\mathbf{R}_3 + 6 \sum_{N \geq m > n > k \geq 1} \alpha_m \alpha_n \alpha_k (\mathbf{A}_m \mathbf{A}_n \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m), \quad (17)$$

где  $\mathbf{R}_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k^j \mathbf{A}_k^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Выражение (17) является однородным многочленом третьей степени относительно некоммутативных переменных  $\mathbf{A}_m$ ,  $m=1, \dots, N$ .

Чтобы найти все одночлены, содержащие переменные  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{A}_k$ , вычислим значение  $\mathbf{F}_2$ , считая, что  $\mathbf{A}_g = 0$  при  $g \neq m$ ,  $g \neq n$ ,  $g \neq k$ . После алгебраических преобразований получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(m, n, k) = & \alpha_m^2 \alpha_n [\mathbf{A}_m, [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n]] + \alpha_n^2 \alpha_m [\mathbf{A}_n, [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_m]] + \alpha_m^2 \alpha_k [\mathbf{A}_m, [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_k]] + \\ & + \alpha_k^2 \alpha_m [\mathbf{A}_k, [\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_m]] + \alpha_n^2 \alpha_k [\mathbf{A}_n, [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_k]] + \alpha_k^2 \alpha_n [\mathbf{A}_k, [\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_n]] + \\ & + 2\alpha_m \alpha_n \alpha_k \{ [\mathbf{A}_m, [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_k]] + [\mathbf{A}_k, [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_m]] \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя формулу (18) ко всем тройкам индексов  $m > n > k$  из интервала  $1, \dots, N$ , получаем искомое равенство (9).

## Приложение 2.

Покажем, что для системных матриц  $\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n$  выполняется равенство  $\boldsymbol{\psi}_i^{(0)} [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n] \boldsymbol{\varphi}_i^{(0)} = 0$ .

Действительно, матрицы  $\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n$  являются действительными и  $\mathbf{K}$ -симметрическими, т. е.  $\mathbf{K} \mathbf{A}_m \mathbf{K} = \mathbf{A}_m^T$ ,  $\mathbf{K} \mathbf{A}_n \mathbf{K} = \mathbf{A}_n^T$ , где  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$  и  $\mathbf{I}$ -единичная  $3 \times 3$  матрица, а собственные векторы  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}$  матрицы  $\mathbf{A}_B$  связаны соотношениями  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)T} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_j^{(0)T} = \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{K}$ . Действительное число  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)} [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n] \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} = 0$ , поскольку

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{A}_m \mathbf{A}_n \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} = \left( \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{A}_m \mathbf{A}_n \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} \right)^T = \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)T} \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_m^T \boldsymbol{\psi}_j^{(0)T} = \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{K}^2 \mathbf{A}_n \mathbf{K}^2 \mathbf{A}_m \mathbf{K}^2 \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} = \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}.$$

Аналогично доказывается, что  $\boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{A}_m \mathbf{A}_n \mathbf{A}_k \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)} = \boldsymbol{\psi}_j^{(0)} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m \boldsymbol{\varphi}_j^{(0)}$ .

## Приложение 3.

Покажем, что из формулы (10) следует формула (11), если  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_B + \Delta \mathbf{A}_i$ ,  $\Delta \mathbf{A}_i \ll \mathbf{A}_i$  и правую сторону формулы (10) можно рассматривать с точностью до 2-го порядка включительно относительно произведений  $\Delta \mathbf{A}_j$ .

Формула (10) является суммой одночленов, и выражение  $\mathbf{F}_1$  содержится в некоторых одночленах, входя в них только двумя сомножителями. Поэтому разложение  $\mathbf{F}_1$  можно ограничить членами первой степени по  $\Delta \mathbf{A}_i$ , т. е. использовать приближение

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{\substack{m, n=1 \\ m > n}}^N \alpha_m \alpha_n [\mathbf{A}_B, \Delta \mathbf{A}_n - \Delta \mathbf{A}_m] = -[\mathbf{A}_B, \tilde{\mathbf{F}}_1] + o(\Delta^2 \mathbf{A}_j), \quad (19)$$

где 
$$\tilde{\mathbf{F}}_1 = \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^N \alpha_m \alpha_n (\Delta \mathbf{A}_m - \Delta \mathbf{A}_n). \quad (20)$$

Выражение  $\mathbf{F}_2$  входит в формулу (10) только как произведение  $\boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)}$ . Однако для любой матрицы  $\mathbf{M}$  выполняется соотношение

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{(0)} [\mathbf{A}_B, \mathbf{M}] \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = (q_i^{(0)} - q_j^{(0)}) \boldsymbol{\Psi}_i^{(0)} \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)}. \quad (21)$$

Поэтому,  $\boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} [\mathbf{A}_B, \mathbf{M}] \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = 0$ . Следовательно, после подстановки  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_B + \Delta \mathbf{A}_i$  в  $\mathbf{F}_2$  все слагаемые, содержащие  $\Delta \mathbf{A}_i$  в первой степени, можно не учитывать. Также можно отбросить члены вида  $[\mathbf{A}_B, [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]]$ . Остальные члены  $\mathbf{F}_2$ , вносящие ненулевой вклад в (10), представляют выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_2 = & \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^N \alpha_m \alpha_n [\alpha_m \Delta \mathbf{A}_m - \alpha_n \Delta \mathbf{A}_n, [\Delta \mathbf{A}_m - \Delta \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B]] + \\ & + 2 \sum_{\substack{m,n,k=1 \\ m>n>k}}^N \alpha_m \alpha_n \alpha_k ([\Delta \mathbf{A}_m + \Delta \mathbf{A}_k, \Delta [\Delta \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B]] - \\ & - [\Delta \mathbf{A}_m, [\Delta \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_B]] - [\Delta \mathbf{A}_k, [\Delta \mathbf{A}_m, \mathbf{A}_B]]). \end{aligned} \quad (22)$$

Используя равенство

$$\boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} [\mathbf{M}, [\mathbf{N}, \mathbf{A}_B]] \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = -\boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \mathbf{M} \mathbf{G}_j \mathbf{N} \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} - \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \mathbf{N} \mathbf{G}_j \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)}, \quad (23)$$

получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_2 \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = & \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^N \alpha_m \alpha_n \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \{ -2\alpha_m \Delta \mathbf{A}_m \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_m - 2\alpha_n \Delta \mathbf{A}_n \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_n + \\ & + (\alpha_m + \alpha_n) (\Delta \mathbf{A}_m \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}_n \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_m) \} \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} + \\ & + \sum_{\substack{m,n,k=1 \\ m>n>k}}^N \alpha_m \alpha_n \alpha_k \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \{ -2(\Delta \mathbf{A}_m + \Delta \mathbf{A}_k) \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_n - 2\Delta \mathbf{A}_n \mathbf{G}_j (\Delta \mathbf{A}_m + \Delta \mathbf{A}_k) + \\ & + 4(\Delta \mathbf{A}_m \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_k + \Delta \mathbf{A}_k \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_m) \} \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = \\ = & \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^N \alpha_m \alpha_n \{ 4\tau_{n+1,m-1} - 2(\tau_{1,n-1} + \tau_{m+1,N}) + (1 - \delta_{m,n})(\alpha_m + \alpha_n) \} \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \Delta \mathbf{A}_m \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_n \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (19), (21) следует

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\Phi}_m^{(0)} = & \sum_{\substack{p,q=1 \\ p>q}}^N \alpha_p \alpha_q \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} [\mathbf{A}_B, \Delta \mathbf{A}_q - \Delta \mathbf{A}_p] \boldsymbol{\Phi}_m^{(0)} = (q_m^{(0)} - q_j^{(0)}) \boldsymbol{\Psi}_j^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_1 \boldsymbol{\Phi}_m^{(0)} + o(\Delta^2 \mathbf{A}_j), \\ \boldsymbol{\Psi}_m^{(0)} \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = & \sum_{\substack{p,q=1 \\ p>q}}^N \alpha_p \alpha_q \boldsymbol{\Psi}_m^{(0)} [\mathbf{A}_B, \Delta \mathbf{A}_q - \Delta \mathbf{A}_p] \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} = (q_j^{(0)} - q_m^{(0)}) \boldsymbol{\Psi}_m^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_1 \boldsymbol{\Phi}_j^{(0)} + o(\Delta^2 \mathbf{A}_j). \end{aligned}$$

Учитывая, что



$$\sum_m k_m^{-1} \Phi_m^{(0)} \Psi_m^{(0)} = \mathbf{I}, \quad \sum_m q_m^{(0)} k_m^{-1} \Phi_m^{(0)} \Psi_m^{(0)} = \mathbf{A}_B, \quad (25)$$

получаем формулу

$$\sum_{m \neq j} \frac{k_j^{-1} k_m^{-1} \Psi_j^{(0)} \mathbf{F}_1 \Phi_m^{(0)} \Psi_m^{(0)} \mathbf{F}_1 \Phi_j^{(0)}}{q_j^{(0)} - q_m^{(0)}} = \sum_m \left( q_m^{(0)} - q_j^{(0)} \right) k_m^{-1} \Psi_j^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_1 \Phi_m^{(0)} \Psi_m^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_1 \Phi_j^{(0)} = k_j^{-1} \Psi_j^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{G}_j \tilde{\mathbf{F}}_1 \Phi_j^{(0)}. \quad (26)$$

Группируя члены, относящиеся к  $\Delta \mathbf{A}_p \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_q \Phi_j^{(0)}$ , нетрудно убедиться, что

$$\Psi_j^{(0)} \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{G}_j \tilde{\mathbf{F}}_1 \Phi_j^{(0)} = \sum_{p,q=1}^N \alpha_p \alpha_q (\tau_{1,p-1} - \tau_{p+1,n}) (\tau_{1,q-1} - \tau_{q+1,n}) \Psi_j^{(0)} \Delta \mathbf{A}_p \mathbf{G}_j \Delta \mathbf{A}_q \Phi_j^{(0)}. \quad (27)$$

Подставляя выражения (24), (26), (27) в формулу (10), получаем искомое выражение (11).

### Список литературы

- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах (2-е изд.). Москва: Наука, 1973. 343 с.
- Дынкин Е. Б. Вычисление коэффициентов в формуле Campbell-Hausdorffa. Доклады АН СССР. 1947. Т. 57. С. 323—326.
- Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 343 с.
- Молотков Л. А. Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред. Математические вопросы теории распространения волн. Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 89. С. 219—233.
- Молотков Л. А., Хило А. Е. Эффективные среды для периодических анизотропных систем. Математические вопросы теории распространения волн. Ч. 13. Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 128. С. 130—138.
- Рытов С. М. Упругие свойства мелкослоистой среды. Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71—83.
- Роганов Ю. В., Стовас А., Роганов В. Ю. Анализ зон прохождения и поглощения в периодической слоистой среде. Технологии сейсморазведки. 2014. № 2. С. 34—41.
- Роганов Ю. В., Роганов В. Ю. Распространение волн в периодических жидкотвердых слоистых средах. Геофиз. журн. 2016. Т. 38. № 6. С. 111—117. doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i6.2016.91877.
- Сибиряков Б. П., Максимов Л. А., Татарников М. А. Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах. Новосибирск: Наука, 1980. 72 с.
- Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Москва: Наука, 1972. 720 с.
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67(11), 4427—4440. <https://doi.org/10.1029/JZ067i011p04427>.
- Braga, A. M., & Herrmann, G. (1992). Floquet waves in anisotropic periodically layered composites. *Journal of the Acoustical Society of America*, 91(3), 1211—1227. <http://dx.doi.org/10.1121/1.402505>.
- Chicone, C. (2006). *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York: Springer, 635 p. doi: 10.1007/0-387-35794-7.

- Coppel, W. A., & Howe, A. (1965). On the stability of linear canonical systems with periodic coefficients. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 5(2), 169—195. <https://doi.org/10.1017/S1446788700026756>.
- Daley, P. F., & Hron, F. (1979). SH waves in layered transversely isotropic media — An asymptotic expansion approach. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 69, 689—711.
- Delph, T. J., Hermann, G., & Kaul, R. K. (1978). Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: antiplane Strain. *Journal of Applied Mechanics*, 45(2), 343—349. <https://doi.org/10.1115/1.3424299>.
- Floquet, G. (1883). Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 12, 47—88.
- Gilbert, F., & Backus, G. E. (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, 31, 326—332. <https://doi.org/10.1190/1.1439771>.
- Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1), 17—34.
- Helbig, K. (1984). Anisotropy and dispersion in periodically layered media. *Geophysics*, 49(4), 364—373. <https://doi.org/10.1190/1.1441672>.
- Madelung, E. (1964). *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1002/zamm.19650450221>.
- Nayfeh, A. H. (1991). The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89, 1521—1528. <https://doi.org/10.1121/1.400988>.
- Nayfeh, A. H. (1989). The propagation of horizontally polarized shear waves in multilayered anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86, 2007—2012. <https://doi.org/10.1121/1.398580>.
- Nayfeh, A. H. (1995). *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*. Amsterdam: North-Holland, 347 p.
- Norris, A. N. (1993). Waves in periodically layered media: A comparison of two theories. *Journal of Applied Mathematics*, 53, 1195—1209. <https://doi.org/10.1137/0153058>.
- Norris, A. N., & Wang, Z. (1994). Low frequency bending waves in periodic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 169, 485—502. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1030>.
- Roganov, Yu., & Stovas, A. (2012). Low-frequency wave propagation in periodically layered media. *Geophysical Prospecting*, 60(5), 825—837. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.01028.x>.
- Roganov, Yu., & Stovas, A. (2014). Low-frequency normal wave propagation in a periodically layered medium with weak contrast in elastic properties. *Geophysical Prospecting*, 62(4), 1205—1210. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12167>.
- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2019). Low-frequency layer-induced dispersion in a weak-contrast vertically heterogeneous orthorhombic. *Geophysical Prospecting*, 67, 2269—2279. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12804>.
- Schoenberg, M. (1984). Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave Motion*, 6, 303—320. doi: 10.1016/0165-2125(84) 90033-7.
- Schoenberg, M., & Muir, F. (1989). A calculus for finely layered anisotropic media. *Geophysics*, 54, 581—589. <https://doi.org/10.1190/1.1442685>.
- Stovas, A., Roganov, Y., Duffaut, K., & Carter, A. J. (2013). Low-frequency layer-induced anisotropy. *Geophysics*, 78, WC3—WC14. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0301.1>.

- Stroh, A. N. (1962). Steady state problems in anisotropic elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 41, 77—103.
- Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21(1), 89—93. <https://doi.org/10.1063/1.1699629>.
- Wang, L., & Rokhlin, S. I. (2002). Floquet wave homogenization of periodic anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112, 38—45. <https://doi.org/10.1121/1.1488942>.

## Dispersion of phase velocities in horizontally layered anisotropic slightly-contrasted periodic media

Yu. V. Roganov, A. Stovas, V. Yu. Roganov, 2020

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Kiev, Ukraine

<sup>2</sup>Norwegian University, Trondheim, Norway

<sup>3</sup>V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

In this article, authors developed a method for estimating the Floquet waves velocity dispersion in a periodic horizontally layered medium with anisotropic layers. The method is based on the calculation of the effective system matrix — the logarithm of the period propagator. In the low-frequency range, the effective system matrix is approximated by the three first terms of the BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) series. The eigenvalues of the effective system matrix are the vertical slowness of different wave modes of Floquet waves propagating up and down. To estimate the dispersion of the Floquet waves, the difference matrices are computed from the system matrices of the layers and the system matrix of the Backus averaged medium for the period — the increment matrices. By assuming that the increment matrices are small compared to the system matrix of the Backus medium, a second-order perturbation theory is applied. That allows to compute the eigenvalues of the effective system matrix. As a result, formulas for calculating the approximation of the dispersion of the vertical slowness and phase velocity of Floquet waves in a periodic horizontally layered medium with anisotropic layers are derived. These formulae are given by a weighted sum of the products of various pairs of increments of the system matrices of the layers and allow a very accurate approximation of the dispersion of phase velocities and vertical slowness in the low-frequency range. The accuracy of the calculations is demonstrated in a three-layer periodic medium with orthorhombic layers with different azimuths of symmetry planes. The obtained approximation of the dispersion of the squares of the vertical slowness and phase velocity of the Floquet waves is very accurate in the low-frequency range and gives satisfactory result in the first third of the corresponding pass band.

**Key words:** periodical medium, dispersion, phase velocity, Floquet wave, perturbation theory.

### References

- Brekhovskikh, L. M. (1973). *Waves in layered media*. Moscow: Nauka, 343 p. (in Russian).
- Dynkin, E. B. (1947). Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 57, 323—326 (in Russian).
- Lankaster, P. (1978). *Theory of matrices*. Moscow: Nauka, 343 p. (in Russian).

- Molotkov, L. A. (1979). Equivalence of periodically layered and transversally isotropic media. *Matematicheskiye voprosy teorii rasprostraneniya voln. Zapiski nauchnogo seminara LOMI*, 89, 219—233 (in Russian).
- Molotkov, L. A., & Khilo, A. E. (1983). The effective media for periodic anisotropic systems. *Matematicheskiye voprosy teorii rasprostraneniya voln. Zapiski nauchnogo seminara LOMI*, 128, 130—138 (in Russian).
- Rytov, S. M. (1956). Acoustical properties of a thinly laminated medium. *Akusticheskiy zhurnal*, 2(1), 71—83 (in Russian).
- Roganov, Yu. V., Stovas, A., & Roganov, V. Yu. (2014). Analysis of pass and stop bands in a periodically layered medium. *Tekhnologii seysmorazvedki*, (2), 34—41 (in Russian).
- Roganov, Yu. V., & Roganov, V. Yu. (2016). Wave propagation in periodic fluid-solid layered media. *Geofizicheskiy zhurnal*, 38(6), 111—117. doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i6.2016.91877 (in Russian).
- Sibiriyakov, B. P., Maksimov, L. A., & Tatarnikov, M. A. (1980). *Anisotropy and dispersion of elastic waves in layered periodic structures*. Novosibirsk: Nauka, 72 p. (in Russian).
- Yakubovich, V. A., & Starzhinskiy, V. M. (1972). *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*. Moscow: Nauka, 720 p. (in Russian).
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67(11), 4427—4440. https://doi.org/10.1029/JZ067i011p04427.
- Braga, A. M., & Herrmann, G. (1992). Floquet waves in anisotropic periodically layered composites. *Journal of the Acoustical Society of America*, 91(3), 1211—1227. http://dx.doi.org/10.1121/1.402505.
- Chicone, C. (2006). *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York: Springer, 635 p. doi: 10.1007/0-387-35794-7.
- Coppel, W. A., & Howe, A. (1965). On the stability of linear canonical systems with periodic coefficients. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 5(2), 169—195. https://doi.org/10.1017/S1446788700026756.
- Daley, P. F., & Hron, F. (1979). SH waves in layered transversely isotropic media — An asymptotic expansion approach. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 69, 689—711.
- Delph, T. J., Hermann, G., & Kaul, R. K. (1978). Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: antiplane Strain. *Journal of Applied Mechanics*, 45(2), 343—349. https://doi.org/10.1115/1.3424299.
- Floquet, G. (1883). Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 12, 47—88.
- Gilbert, F., & Backus, G. E. (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, 31, 326—332. https://doi.org/10.1190/1.1439771.
- Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1), 17—34.
- Helbig, K. (1984). Anisotropy and dispersion in periodically layered media. *Geophysics*, 49(4), 364—373. https://doi.org/10.1190/1.1441672.
- Madelung, E. (1964). *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1002/zamm.19650450221.
- Nayfeh, A. H. (1991). The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic



- media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89, 1521—1528. <https://doi.org/10.1121/1.400988>.
- Nayfeh, A. H. (1989). The propagation of horizontally polarized shear waves in multilayered anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86, 2007—2012. <https://doi.org/10.1121/1.398580>.
- Nayfeh, A. H. (1995). *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*. Amsterdam: North-Holland, 347 p.
- Norris, A. N. (1993). Waves in periodically layered media: A comparison of two theories. *Journal of Applied Mathematics*, 53, 1195—1209. <https://doi.org/10.1137/0153058>.
- Norris, A. N., & Wang, Z. (1994). Low frequency bending waves in periodic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 169, 485—502. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1030>.
- Roganov, Yu., & Stovas, A. (2012). Low-frequency wave propagation in periodically layered media. *Geophysical Prospecting*, 60(5), 825—837. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.01028.x>.
- Roganov, Yu., & Stovas, A. (2014). Low-frequency normal wave propagation in a periodically layered medium with weak contrast in elastic properties. *Geophysical Prospecting*, 62(4), 1205—1210. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12167>.
- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2019). Low-frequency layer-induced dispersion in a weak-contrast vertically heterogeneous orthorhombic. *Geophysical Prospecting*, 67, 2269—2279. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12804>.
- Schoenberg, M. (1984). Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave Motion*, 6, 303—320. doi: 10.1016/0165-2125(84)90033-7.
- Schoenberg, M., & Muir, F. (1989). A calculus for finely layered anisotropic media. *Geophysics*, 54, 581—589. <https://doi.org/10.1190/1.1442685>.
- Stovas, A., Roganov, Y., Duffaut, K., & Carter, A. J. (2013). Low-frequency layer-induced anisotropy. *Geophysics*, 78, WC3—WC14. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0301.1>.
- Stroh, A. N. (1962). Steady state problems in anisotropic elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 41, 77—103.
- Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21(1), 89—93. <https://doi.org/10.1063/1.1699629>.
- Wang, L., & Rokhlin, S. I. (2002). Floquet wave homogenization of periodic anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112, 38—45. <https://doi.org/10.1121/1.1488942>.

## Дисперсія фазових швидкостей в горизонтально-шаруватих анізотропних слабоконтрастних періодичних середовищах

Ю. В. Роганов<sup>1</sup>, А. Стовас<sup>2</sup>, В. Ю. Роганов<sup>3</sup>, 2020

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Київ, Україна

<sup>2</sup>Норвежський університет, Тронхейм, Норвегія

<sup>3</sup>Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

У статті розроблено метод оцінювання дисперсії швидкостей хвиль Флоке в періодичному горизонтально-шаруватому середовищі з анізотропними шарами. Метод заснований на обчисленні ефективної системної матриці — логарифма пропагатора періоду. В інтервалі низьких частот ефективна системна матриця апроксимована трьома початковими членами ряду BCH (Baker-Campbell-Hausdorff). Власні числа ефективної системної матриці є вертикальними повільностями хвиль Флоке різного типу, що поширюються вгору і вниз. Для оцінювання дисперсії хвиль Флоке обчислюють різниці між системними матрицями шарів і системною матрицею усередненого середовища Бакуса для періоду — матриці приростів. За припущення, що матриці приростів малі порівняно із системною матрицею середовища Бакуса, застосовано теорію збурень другого порядку, що дає змогу оцінити власні числа ефективної системної матриці. В результаті виведено формули для обчислення апроксимації дисперсії вертикальних повільностей і фазових швидкостей хвиль Флоке у періодичному горизонтально-шаруватому середовищі з анізотропними шарами. Ці формули містять зважену суму добутків різних пар приростів системних матриць шарів і дають змогу досить точно апроксимувати дисперсії фазових швидкостей і вертикальних повільностей у діапазоні малих частот. Точність обчислень показано на тришаровому періодичному середовищі з орторомбічними шарами з різними азимутами площин симетрії. Отримана апроксимація дисперсії квадратів вертикальних повільностей і фазових швидкостей хвиль Флоке є досить точною в діапазоні малих частот і задовільною у першій третині відповідної зони прохідності.

**Ключові слова:** періодичне середовище, дисперсія, фазова швидкість, хвиля Флоке, теорія збурень.