

Парето-оптимальные решения обратной задачи гравиметрии в классе трехмерных контактных поверхностей

Т.Н. Кишман-Лаванова, 2020

Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 24 июня 2020 г.

В геофизических обратных задачах существует два подхода к инверсии данных. Первый — поиск ряда неизвестных посредством минимизации функции невязки. Второй — посредством вероятностного моделирования апостериори функции плотности вероятности в рамках Байесовской трактовки обратной задачи. В большинстве случаев соотношение данные—модель нелинейно, и соответствующая минимизация или моделирование становится сложным вследствие мультимодальности функции невязки.

Рассмотрен подход, относящийся к невероятностным методам решения обратных задач геофизики. Его суть состоит в прямом моделировании параметрического пространства с дальнейшим поиском Парето-оптимальных решений на основе априорной информации. Априорная информация формализуется посредством нечетких множеств. На модельном примере продемонстрировано применение невероятностного прямого поиска и градиентного метода скорейшего спуска при решении нелинейной гравиметрической обратной задачи в классе трехмерных контактных поверхностей, а также дана оценка эффективности обоих методов.

Анализ выполненных тестов показывает, что при наличии достаточной априорной информации оба метода дают вполне однозначный точный результат. Поиск Парето-оптимальных решений может иметь более быструю сходимость по сравнению с методом градиентного спуска, хотя она определяется многими факторами — количеством точек начальной популяции, пороговым значением ϵ и требуемым уровнем соответствия данных. Алгоритм также обладает устойчивостью к попаданию в локальные минимумы, поскольку равномерно исследует параметрическое пространство.

Алгоритм позволяет получить вполне удовлетворительные решения уже на стадии поиска начального Парето-множества. Это последствие выборочного моделирования под контролем априорной информации. Последующий прямой поиск в окрестностях Парето-оптимальных точек приводит к значительному уменьшению функции невязки и к отклонению некоторых локальных минимумов.

В условиях недостатка априорной информации множество Парето-оптимальных решений может служить базисом для дальнейшего извлечения полезных данных об аномальных источниках с привлечением других геофизических методов интерпретации.

Описанный подход к решению обратной задачи может представлять интерес и при решении широкого круга других оптимизационных геофизических задач.

Ключевые слова: инверсия гравиметрических данных, априорная информация, Парето-оптимальное решение, нечеткое множество.

Введение. В геофизических обратных задачах существует два класса подходов к инверсии данных. Первый класс — это поиск ряда неизвестных посредством минимизации функции невязки, что часто комбинируется с регуляризацией решений [Тихонов, Арсенин, 1986; Parker, 1994; Zhdanov, 2015 и др.], второй — посредством вероятностного

моделирования апостериорной функции плотности вероятности в рамках Байесовского подхода [Гольцман, Калинина, 1983; Каратаев, Пашкевич, 1986; Sambridge, Mosegaard, 2002; Tarantola, 2005; Kozlovskaya et al., 2007]. Существует много примеров обоих подходов в литературе и в некоторых случаях их комбинирования.

В задачах, где соотношение данные—модель нелинейно, соответствующая оптимизация или моделирование становится чрезвычайно сложным из-за мультимодальности функции невязки. Кроме того, в детерминистской постановке обратной задачи допустимые решения априори равны, их невозможно ранжировать по плотности вероятности совпадения с точным решением [Балк, Долгалъ, 2016]. Градиентные методы оптимизации становятся неэффективными по причине попадания в локальные минимумы так же, как и вероятностные методы моделирования могут стать неэффективными в сходящихся областях параметрического пространства, где апостериорная плотность вероятности является высокой. Соответственно существует широкий круг задач, которые необходимо решать с помощью более эффективных и надежных алгоритмов инверсии. Здесь эффективность определяется как время, необходимое для сходимости алгоритма к решению, и надежность как вероятность того, что полученное решение приемлемо.

В этой статье обсудим подход, относящийся к невероятностным методам решения обратных задач, который привлекает внимание ученых последние десятилетия [Sambridge, 1999; Kozlovskaya, 2000]. Его суть состоит в прямом моделировании параметрического пространства с дальнейшим поиском оптимального решения на основе априорной информации. Также на модельном примере продемонстрируем применение невероятностного прямого поиска и градиентного метода скорейшего спуска и сравним эффективность обоих методов при решении нелинейной гравиметрической обратной задачи. Кратко остановимся на теоретическом изложении идеи. Детально подход изложен в работе [Кишман-Лаванова, 2015].

Вероятностная постановка обратной задачи. Класс обратных геофизических задач, рассматриваемый в работе, это класс, в котором функция, определяющая невязку между наблюдаемыми и теоретическими данными, является нелинейной и часто мультимодальной. В таких условиях использование градиентных методов очень ограничено, поскольку решение всецело зависит от модели начального приближения, что сужает область поиска и может привести к попаданию решения в локальный минимум. И только включение в процесс поиска широкого диапазона достоверной априорной информации может обеспечить надежное решение задачи, что на практике не всегда выполнимо.

Вероятностный подход к обратной задаче описывает априорную информацию о модели с помощью функции плотности вероятности $p(\mathbf{m})$, что не требует знания точных априорных данных, достаточно иметь их интервальные оценки. Задача заключается в поиске апостериори плотности вероятности $p(\mathbf{d})$ распределения вектора \mathbf{m} , исходя из наблюдаемых данных, теоретической взаимосвязи между модельными параметрами и наблюдаемым полем, а также априорной информации [Tarantola, Valette, 1982]:

$$p(\mathbf{d}) = k p(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}),$$

где k — соответствующая нормализующая константа, $p(\mathbf{m})$ — плотность вероятности априорного модельного распределения, $L(\mathbf{m})$ — функционал, который сравнивает соответствие между наблюдаемыми и теоретическими данными.

На практике в большинстве геофизических экспериментах считается, что обе и априорная, и апостериорная плотности распределения являются Гауссовыми:

$$p(\mathbf{m}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |C_M|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{m} - \mathbf{m}_0]^T C_M^{-1} [\mathbf{m} - \mathbf{m}_0] \right\},$$

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}} / \mathbf{m}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |C_D|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} \right]^T C_D^{-1} \left[g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} \right] \right\}, \quad (1)$$

где \mathbf{m}_0 — априорная модель, C_M и C_D — ковариационные матрицы модели и наблюдаемых данных соответственно, $|C_M|$ и $|C_D|$ — соответствующие детерминанты. Ковариационная матрица модели C_M описывает неопределенности в априорных знаниях о модельных параметрах и корреляции между ними. Ковариационная матрица данных C_D описывает неопределенности теоретических и наблюдаемых данных.

При таких допущениях максимизация (1) эквивалентна минимизации следующей целевой функции:

$$L(\mathbf{m}) = \left[g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} \right]^T C_D^{-1} \left[g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} \right] + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)^T C_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0). \quad (2)$$

Минимизация (2) может быть выполнена эффективно в случае, когда $g(\mathbf{m})$ линейная и матрицы C_M и C_D диагональные. Оптимальное решение сильно зависит от значений диагональных элементов этих матриц. Если диагональные элементы C_D больше, чем элементы C_M , тогда полученное решение слабо зависит от априорной информации, в другом случае решение сходится к априорной модели \mathbf{m}_0 .

Поскольку модельное пространство обычно многомерное, то и соответствующее априорное распределение, как правило, достаточно сложно. В таких условиях невероятностная априорная информация может быть описана способом более эффективным, чем с помощью функции плотности распределения (PDF — probability density function), а именно посредством нечетких множеств. Важное преимущество в том, что основные операции нечетких множеств обеспечивают достаточно удобное комбинирование различных четких и нечетких ограничений на модельные параметры. Однако необходимо помнить, что функция принадлежности не может быть использована вместо априорной PDF в классической формулировке обратной задачи, так как они не только выражают два разных типа неопределенной информации, но также соответствуют разным мерам неопределенности, которые должны удовлетворять разным аксиомам. Для того, чтобы комбинировать разные типы неопределенности в одной схеме инверсии, необходимо изменить формулировку обратной задачи [Kozlovskaya, 2000]. Для обратной задачи гравиметрии формулировка с использованием невероятностных мер при описании неопределенной информации приводится в работе [Кишман-Лаванова, 2015].

Преобразование традиционной одноцелевой геофизической задачи в многоцелевую задачу оптимизации. Невероятностный подход предполагает преобразование традиционной одноцелевой геофизической задачи в многоцелевую задачу оптимизации с двумя целевыми функциями:

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}) = (F_1(\mathbf{m}), F_2(\mathbf{m})), \quad (3)$$

где $F_1(\mathbf{m}) = p(\mathbf{d}_{\text{obs}} / \mathbf{m})$ показывает, насколько решение удовлетворяет наблюдаемым данным, $F_2(\mathbf{m}) = \mu_M(\mathbf{m})$ — функция принадлежности нечеткого множества возможных решений, которая показывает, насколько модель удовлетворяет априорной информации.

Важно отметить, что в случае одноцелевой оптимизационной задачи качество решения оценивается функцией невязки для каждого решения в параметрическом пространстве. В случае многоцелевой задачи каждое решение имеет $L \geq 2$ оценочных значений, по одному для каждой целевой функции. Вектор целевой функции отображает параметрическое пространство R^k в целевое пространство R^L . Решения с многоцелевыми значениями позволяет сравнить концепция недоминирования [Goldberg et al., 1992]. В

итоге для решения задачи будем использовать алгоритм глобальной оптимизации, предложенный Е. Козловской [Kozlovskaya, 2000].

Для более четкого понимания работы невероятностного подхода в инверсии гравиметрических данных рассмотрим модельный пример и сравним его результаты с результатами, которые дает градиентный метод скорейшего спуска, а также сделаем выводы относительно каждого подхода.

Решение обратной задачи гравиметрии для двух контактных поверхностей градиентным методом скорейшего спуска. Построим геологическую модель, которая состоит из трех слоев. Верхний расположен на глубине $H_1 = 1$ км от горизонтальной земной поверхности. Граница раздела горизонтальна в асимптотических частях и имеет два поднятия в центральной области, которые достигают отметок 0,6 км и 0,5 км, как показано на рис. 1, а.

Породы второго горизонта более плотные. Избыточная плотность относительно пород верхнего слоя $\sigma_1 = 0,5$ г/см³. Вторая граница раздела в ее асимптотических частях располагается на глубине $H_2 = 2$ км. Две ступени поднимают эту границу на 700 м, что соответствует отметкам рельефа 1,3 км (рис. 1, б).

Третий горизонт составляют самые плотные породы, их избыточная плотность относительно второго слоя $\sigma_2 = 0,5$ г/см³.

Для построенной модели решим прямую задачу и получим значения поля аномалии силы тяжести в заданных точках. Будем считать его исходным. Отметим следующее. В модели выделяется горизонтальный слой, расположенный на глубине $H_1 = 1$ км и $H_2 = 2$ км. Он создает аномальное поле $\Delta g = 2\pi k\sigma(H_2 - H_1)$, которое одинаково во всех точках земной поверхности и составляет часть фонового влияния.

Для решения обратной задачи исходное поле преобразуем в поле вариации относительно поля в фиксированной точке $M(x_0, y_0) = M(-2; -2)$ (рис. 2, а) и выберем в нем 70 точек ($n = 70$):

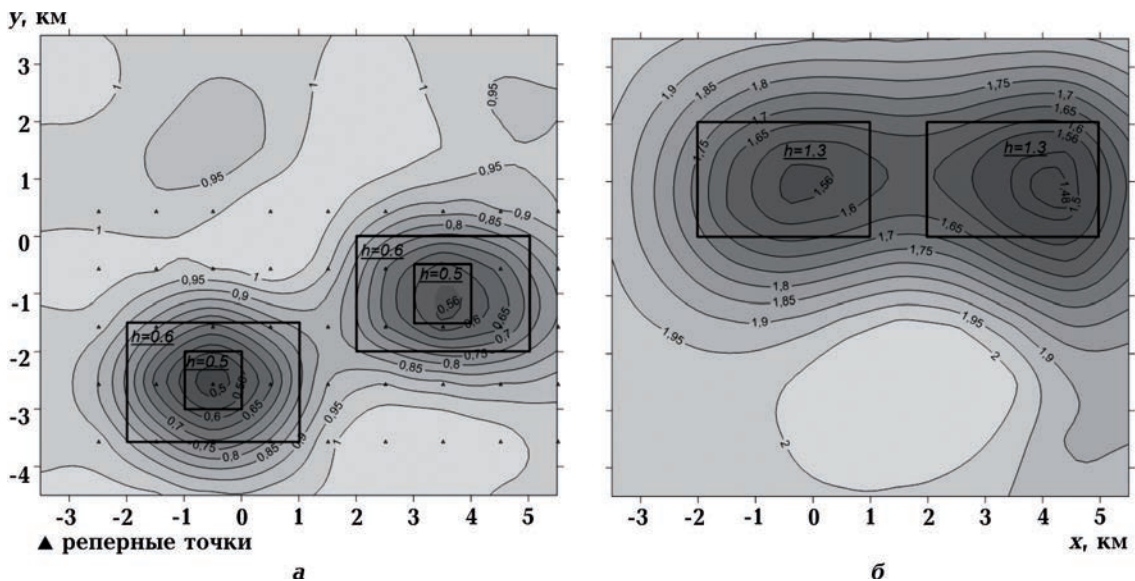


Рис. 1. Исходная модель и подобранный рельеф двух контактных поверхностей раздела: а — рельеф верхней поверхности; б — рельеф нижней поверхности.

Fig. 1. The original model and the selected relief of the two contact surfaces of the section: а — the relief of the upper surface; б — the relief of the lower surface.

$$\delta \Delta g(x_i, y_i) = \delta \Delta g(i) = \Delta g(x_i, y_i) - \Delta g(x_0, y_0), \quad i = 1, 2, \dots, 70.$$

Далее построим модель геологической среды. Детально аппроксимационная конструкция контактной поверхности приведена в работе [Булах, Кишман-Лаванова, 2006]. Поскольку модель имеет две границы раздела ($jk = 2$), то очевидно, что в такой постановке обратная задача не имеет единственного решения. Как упоминалось ранее, решение задачи в значительной мере определяется выбором модели начального приближения. Таким образом, необходимо использовать априорные данные. Предположим, что существуют данные о расположении верхней границы раздела, известны отметки рельефа в 45 реперных точках (см. рис. 1, а):

$$(x_r, y_r, H_r)_i, \quad i = \overline{1, 45}.$$

Запишем параметры, определяющие геологическую модель:

$$P = \{jk; [\sigma; H_0; \mathbf{W}_1; \mathbf{W}_2]_t; t = \overline{1, jk}\},$$

$$\mathbf{W}_1 = [\alpha; m; (\xi_0, \eta_0)_j, j = 1, 2, \dots, 56]; \quad \mathbf{W}_2 = [(Q_1; Q_2; Q_3)_j, j = 1, 2, \dots, 56]. \quad (4)$$

Здесь jk — количество контактных поверхностей; σ — избыточная плотность масс, которые размещаются ниже поверхности раздела; H_0 — горизонтальная плоскость, нулевой уровень, относительно которого ведется отсчет отметок рельефа контактной поверхности. Значения параметров $(Q_1, Q_2, Q_3)_j$ определяют конфигурацию контактной поверхности, Q_{1j} отвечает за высоту поднятия поверхности в фиксированной точке $(\xi_0, \eta_0)_j$, Q_{2j} и Q_{3j} — за степень выпуклости поверхности вдоль горизонтальных осей ξ и η соответственно.

Аномалиеобразующие массы находятся между горизонтальной плоскостью $z = H_0$ и поверхностью $H(\xi, \eta) = H_0 - Z(\xi, \eta)$, которая в каждой выбранной точке области отклоняется от горизонтальной фиксированной плоскости H_0 на величину

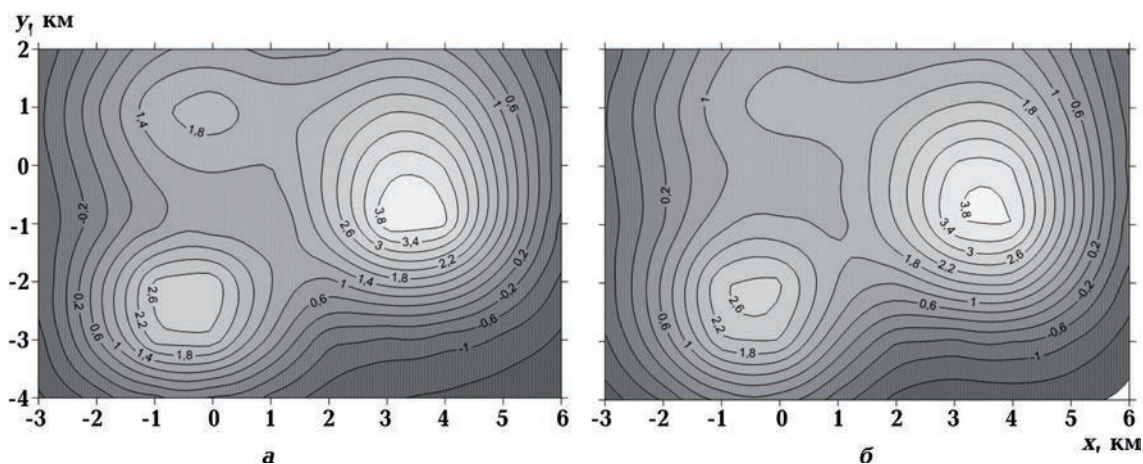


Рис. 2. Исходное поле вариации силы тяжести относительно поля в точке $M(-2; -2)$ (а); подобранное поле силы тяжести (б), $\delta_{\max} = 0,459$ мГал.

Fig. 2. The initial field of variation of gravity relative to the field at point $M(-2; -2)$ (а); the selected field of gravity (б), $\delta_{\max} = 0.459$ mGal.

$$Z = Z(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \frac{Q_{1j}}{\left[1 + Q_{2j}(\xi - \xi_{0j})^2 + Q_{3j}(\eta - \eta_{0j})^2 \right]^\alpha}.$$

Пусть далее установлены значения избыточных плотностей $\sigma_1 = 0,5 \text{ г/см}^3$, $\sigma_2 = 0,5 \text{ г/см}^3$. Определим положения асимптотических частей поверхностей раздела $H_1 = 1 \text{ км}$, $H_2 = 2 \text{ км}$. Сформируем вектор постоянных параметров модели \mathbf{W}_1 . Введем в формулу (4) параметр $\alpha = 2$. Массив m точек расположим по квадратной сетке, зафиксировав начальное, конечное значение координат и шаг по координатной сетке:

$$\xi_{\text{н}} = -2 \text{ км}; \xi_{\text{к}} = 5 \text{ км}; \Delta\xi = 1 \text{ км}; \eta_{\text{н}} = -2 \text{ км}; \eta_{\text{к}} = 4 \text{ км}; \Delta\eta = 1 \text{ км}.$$

Теперь зададим начальные значения переменных параметров модели:

$$(Q_1; Q_2; Q_3)_j, \quad j = 1, 2, \dots, 56.$$

Расчеты позволили остановиться на решении, полученном при начальных условиях $(Q_1 = 0,1 \text{ км}; Q_2 = Q_3 = 0,25 \text{ км})_j, j = 1, 2, \dots, 56$. Они одинаковы как для первой, так и для второй поверхности.

Практика решения обратных задач для сложных структур показывает, что реальная оценка гравитационного влияния контактной поверхности базируется не только на учете избыточной плотности контактной поверхности, но и на учете ее средней глубины [Гравиразведка, 1990]. При этом влияние верхней контактной поверхности оказывается наибольшим в сравнении с влиянием нижних поверхностей. Поэтому в процессе подбора необходимо учитывать это обстоятельство и выполнять поиск решения, начиная с нижней поверхности.

Подготовительный этап завершен, переходим к минимизации функции невязки. Вначале функционал быстро убывает $F_1 = 915,31 \text{ мГал}^2$, $F_2 = 419,20 \text{ мГал}^2$. Далее сходимость достаточно замедляется — проявляется несоответствие точной модели и модели решения. Непрерывной дифференцируемой функцией подбирается ступенчатая разрывная функция.

Итерационный процесс остановлен при значении функционала $F_{250} = 2,836 \text{ мГал}^2$, среднее расхождение между полями стало $\delta_c = 0,168 \text{ мГал}$. В трех точках невязка полей больше $0,4 \text{ мГал}$, а $\delta_{\text{max}} = 0,459 \text{ мГал}$. Подбранное поле силы тяжести изображено на рис. 2, б. На рис. 1 показаны рельефы подобранных поверхностей, вид которых вполне согласуется с исходными данными.

Поиск Парето-оптимальных решений рассмотренной задачи. Кратко изложим суть работы алгоритма. Предложенный алгоритм генерирует новые точки в параметрическом пространстве в соответствии с априорной информацией, сформулированной как нечеткое множество.

Сначала создаем некоторое начальное множество, из которого отбираются точки по принципу Парето-оптимальности. Далее алгоритм создает и сохраняет новые сгенерированные точки, обладающие Парето-оптимальностью, т. е. решение, которое не является Парето-оптимальным, не участвует в процессе поиска.

Для эффективного поиска в многомерном параметрическом пространстве используем подход, предложенный М. Самбриджем [Sambridge, 1999] в его алгоритме окрестностей, т. е. аппроксимацию параметрического пространства диаграммами Вороного [Voronoi, 1908].

Диаграммы Вороного обладают тем важным свойством, что они всегда существуют для любого ряда точек в R и это деление всегда единственное. Ячейки Вороного форми-

ругают локальные окрестности вокруг каждой точки, их размеры и форма автоматически адаптируются к распределению ряда точек.

М. Самбридж [Sambridge, 1999] показал, как диаграммы Вороного могут быть использованы в алгоритмах глобальной оптимизации для уменьшения количества вычислений прямой задачи и для увеличения разрешения области исследования. Вычисление прямой задачи заменяется поиском ближайшего элемента диаграммы Вороного. В алгоритме деление Вороного используется для поиска области вокруг Парето-оптимальных точек. Детально алгоритм приведен в работе [Kozlovskaya, 2000].

Перейдем непосредственно к решению задачи.

В качестве наблюдаемого гравитационного эффекта выберем поле, полученное в предыдущем примере (см. рис. 2, а), т. е. поле от совокупности призм, расположенных на двух различных уровнях. Аппроксимируем его полем от двух контактных поверхностей.

Начальной моделью выберем две плоскости, заданные равномерным распределением точек по сети с шагом 0,5 км на площади 6 × 6 км, и расположенные на двух уровнях H_{01} и H_{02} . Избыточная плотность каждого слоя постоянна и фиксирована: $\sigma_1 = 0,5 \text{ г/см}^3$, $\sigma_2 = 0,5 \text{ г/см}^3$. Искомыми параметрами есть глубина залегания двух поверхностей раздела H_{01} , H_{02} и параметры $Q_{1j(1,2)} = Q_1(\xi_0, \eta_0)_{j(1,2)}$, $j = 1, 2, \dots, 56$ для верхней и нижней поверхности соответственно. Параметры Q_{2j} и Q_{3j} для обеих поверхностей зафиксируем: $Q_{2j} = Q_{3j} = 0,25 \text{ км}$, $j = 1, 2, \dots, 56$.

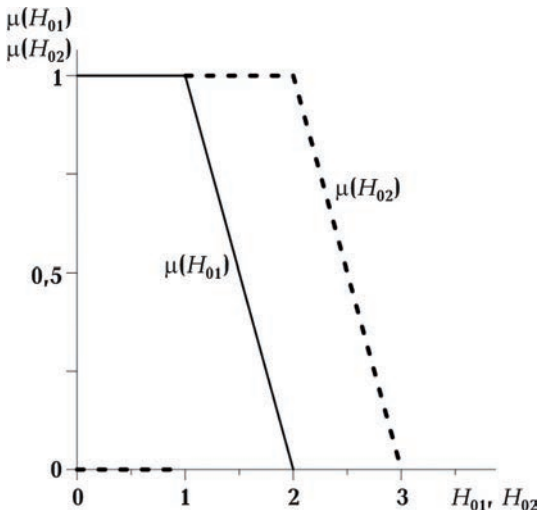
Зададим функции принадлежности для переменных параметров:

$$\mu_{Q_1}(Q_{1j(1,2)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < Q_{1j(1,2)} < 1, \\ 0, & \text{если } Q_{1j(1,2)} \leq 0 \wedge Q_{1j(1,2)} \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\mu_H(H_{01}) = \begin{cases} 1, & 0 < H_{01} < 1, \\ 2 - H_{01}, & 1 \leq H_{01} \leq 2, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mu_H(H_{02}) = \begin{cases} 0, & 0 < H_{02} < 1, \\ 1, & 1 \leq H_{02} \leq 2, \\ 3 - H_{02}, & 2 < H_{02} < 3. \end{cases} \quad (7)$$

Как видно на рис. 3, наиболее вероятные значения параметров H_{01} и H_{02} находятся в промежутках $[0, 1]$ и $[1, 2]$ соответственно. Функции принадлежности не пересекаются, но могут иметь одну общую точку, в этом случае поверхности совпадают.



Информацию о реперных точках на верхней поверхности $(x_r, y_r, H_r)_i$, $i = 1, 45$, зафиксируем в виде условия: если для любого i , $i = 1, 45$, $\xi_{0j} = x_{ri}$ и $\eta_{0j} = y_{ri}$, $j = 1, m$, то $\mu_{Q_1}(Q_{1j(1)}) = 1$, $Q_{1j(1)} = Q_1(\xi_{0j}, \eta_{0j})$. При этом целевая функция $F_1(\mathbf{m})$ принимает вид $F_1(\mathbf{m}) = F_1(\mathbf{m}) + F^\delta$, где F^δ учитывает отклонение рельефа поверхности

Рис. 3. Функции принадлежности параметров H_{01} и H_{02} .

Fig. 3. Membership functions of parameters H_{01} and H_{02} .

от реперных точек. Функцию F^δ определим следующим образом:

$$F^\delta = \sum_{j=1}^{45} [H_r(x_{rj}, y_{rj}) - H(\xi_{0j}, \eta_{0j})]^2.$$

Также необходимо вводить ограничение на геометрию искомым поверхностей, т. е. условие «разумного» соотношения параметров в соседних точках, которое, в конечном счете, формирует гладкую поверхность. «Условие гладкости» поверхности запишем следующим образом.

Для произвольных $i = \overline{1, k}$ и $j = \overline{1, k}$ должно выполняться условие $|\mathcal{Q}_1(i, j) - \mathcal{Q}_1(i+1, j)| \leq k1$ и $|\mathcal{Q}_1(i, j) - \mathcal{Q}_1(i, j+1)| \leq k1$. Коэффициент $k1$ подбирается экспериментальным путем в зависимости от шага по сети. В рассмотренном случае $k1 = 0,1$.

Начальная выборка моделей была смоделирована в параметрическом пространстве в соответствии с функциями принадлежности (5)—(7) нечетких множеств возможных решений. Далее — вычисление начального Парето-множества, которое требует оценки функции невязки и решения прямой задачи в каждой точке начальной выборки. При получении Парето-оптимального решения, включаем его в Парето-множество решений.

Среди множества модельных тестов отметим три теста, выполненных для различных начальных значений H_{01} , H_{02} , $\mathcal{Q}_{1j(1,2)}$, различного количества точек в начальной выборке и различных пороговых значений ε (таблица).

Первый тест был выполнен для относительно малого числа точек начальной выборки (60) и с максимальным расстоянием между изначально заданным положением поверхностей (0,3 км и 1,8 км). Только одна Парето-оптимальная точка была получена с начальной выборки. Потребовалось 74 итераций, чтобы достичь допустимого расхождения между полями $F_{74} = 3,84$ мГал².

Увеличение количества точек начальной выборки в 2 раза до 120 и минимальное расстояние между начальным положением поверхностей 0,9 и 1,2 км соответственно позволило получить два Парето-оптимальных решения, функции невязки которых очень близки между собой. Только одно Парето-оптимальное решение осталось после выполнения прямого поиска в окрестностях двух точек и обновления Парето-множества. Значение функции невязки конечного решения оказалось меньше, чем в предыдущем тесте — $F = 2,97$ мГал².

Параметры, используемые для формирования начальной выборки модельной задачи

Номер теста	Количество точек в начальной выборке	ε	Исходные параметры функции принадлежности нечеткого множества			
			H_{01} , км	H_{02} , км	$\mathcal{Q}_{1j(1)}$, $j = \overline{1, 56}$, км	$\mathcal{Q}_{1j(2)}$, $j = \overline{1, 56}$, км
1	60	0,8	0,3	1,8	0,4	0,1
2	120	0,7	0,9	1,2	0,3	0,1
3	80	0,9	0,5	1,5	0,05	0,05

Третий тест был выполнен для средних значений наиболее вероятных положений поверхностей 0,5 км и 1,5 км соответственно. Начальные значения параметров Q_{1j} были взяты близкими к минимальным. Для получения результата потребовалось 65 итераций. Одна Парето-оптимальная точка была получена в качестве конечного решения, $F_{65} = 3,44$ мГал².

В рассмотренных случаях наличие реперных точек достаточно быстро «ставит на место» верхнюю поверхность, поэтому все получаемые решения будут очень близки между собой, их изображение практически идентично рис. 1.

Задача становится гораздо «интереснее», когда снимаются ограничения в виде реперных точек. В процессе поиска поочередно фиксируется одна из поверхностей и подбираются параметры другой. Включаются геометрические ограничения и условие гладкости параметров, которые формируют рельеф поверхности. Таким способом удалось избежать пересечения двух поверхностей и получить приемлемые решения.

Количество точек начальной выборки было взято 60. Значения $H_{01} = 0,5$ км и $H_{02} = 1,5$ км фиксированы таким образом, чтобы при построении множества начальной выборки было исследовано максимально возможное параметрическое пространство, т. е. чтобы возможные решения находились между заданными начальными значениями верхней и нижней поверхностей. Значения $Q_{1j(1)} = 0,05$ км, $Q_{1j(2)} = 0,05$ км, $j = \overline{1,56}$, выбраны минимальными. В процессе поиска получили три точки Парето-множества (рис. 4, б—г), очевидно расположенные в окрестностях различных локальных минимумов. После выполнения прямого поиска в окрестностях этих точек с помощью деления Вороного и обновления Парето-множества осталось одно решение с функцией невязки $F = 2,815$ мГал² (рис. 5).

Подобранный рельеф поверхностей в этом случае отличается от рельефа в предыдущей задаче с использованием реперных точек, но основные моменты прослеживаются достаточно четко и дают представление о характере рельефа искомых поверхностей.

Таким образом, анализ выполненных тестов показывает, что при наличии достаточной априорной информации оба метода дают вполне однозначный точный результат. Поиск Парето-оптимальных решений может иметь более быструю сходимость по сравнению с методом градиентного спуска, хотя она определяется многими факторами — количеством точек начальной популяции, пороговым значением ϵ и требуемым уровнем соответствия данных. Также алгоритм обладает устойчивостью к попаданию в локальные минимумы, поскольку равномерно исследует параметрическое пространство. Тем не менее при недостатке априорной информации получаемые решения могут быть геологически несодержательными. Алгоритм позволяет получить вполне удовлетворительные решения уже на стадии поиска начального Парето-множества. Это — следствие выборочного моделирования под контролем априорной информации. Последующий прямой поиск в окрестности Парето-оптимальных точек приводит к значительному уменьшению функции невязки и к отклонению некоторых локальных минимумов.

Заключение. Ключевая идея работы — сравнить эффективность применения невероятностного прямого поиска и градиентного метода скорейшего спуска при решении нелинейной обратной задачи гравиметрии.

Суть невероятностного прямого поиска состоит в прямом моделировании параметрического пространства с дальнейшим поиском Парето-оптимальных решений на основе априорной информации. Априорная информация формализуется посредством нечетких множеств.

Модельные примеры выполнялись для класса трехмерных контактных поверхностей. При достаточном объеме априорных данных результаты обоих методов практически совпадают. Скорость сходимости поиска Парето-оптимальных решений определяется

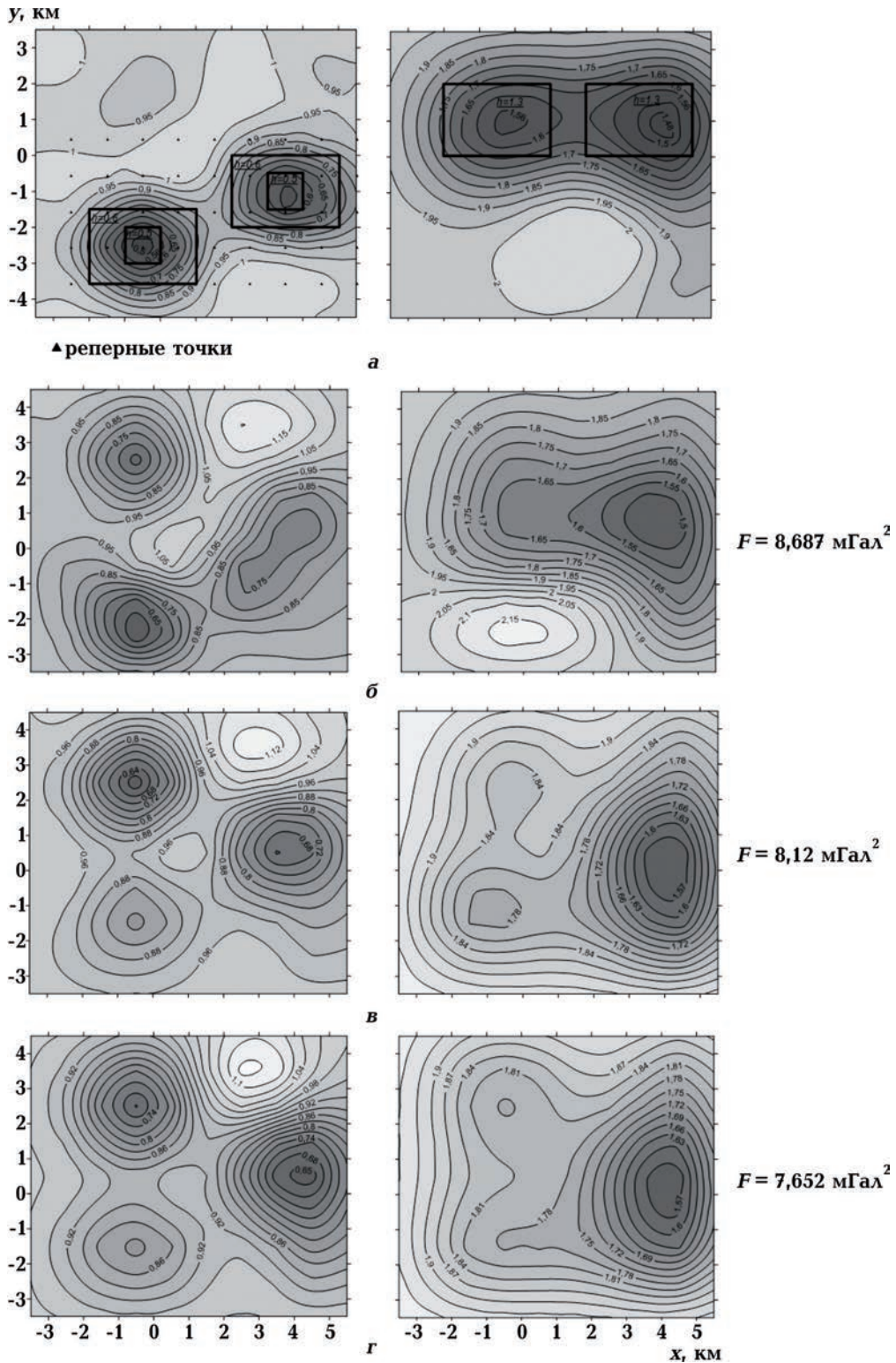


Рис. 4. Решение обратной задачи: а — решение, полученное с использованием реперных точек; б—г — Парето-оптимальные решения, полученные без использования реперных точек.

Fig. 4. The solution of the inverse problem: а — the solution obtained using the reference points; б—г — Pareto-optimal solutions obtained without using fixed points.

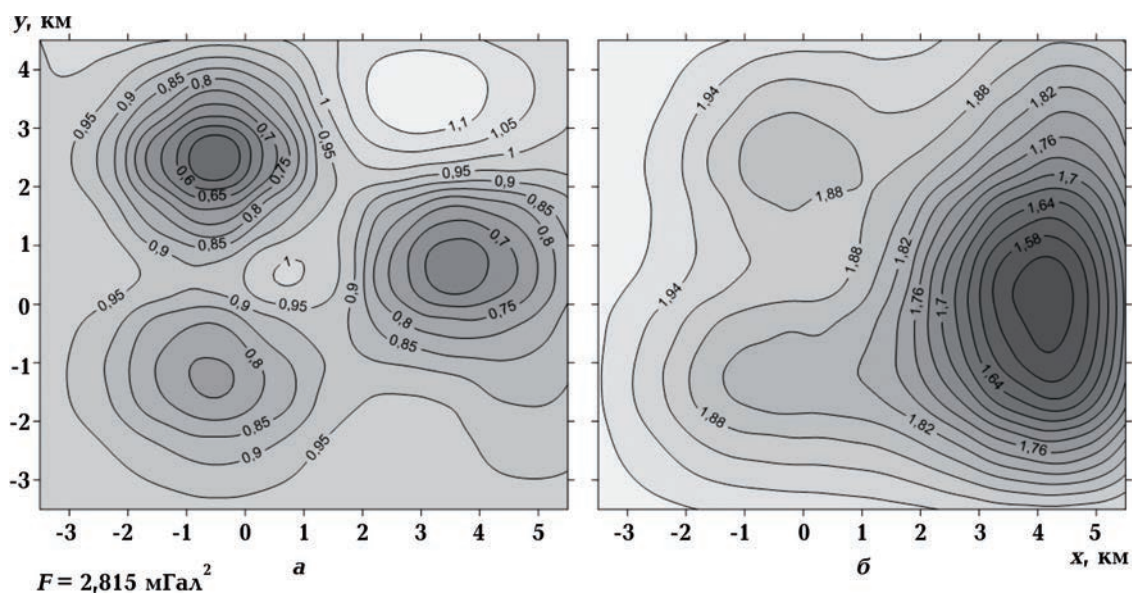


Рис. 5. Конечное решение задачи, отобранное из Парето-множества. Рельеф верхней (а) и нижней (б) поверхностей.

Fig. 5. The final solution to the problem, selected from the Pareto set. Relief of the upper (a) and lower (b) surfaces.

многими факторами и не всегда выше скорости сходимости градиентного спуска. В условиях недостатка априорной информации градиентный метод, как известно, может попадать в локальные минимумы, тогда как поиск Парето-оптимальных решений обеспечивает детальное исследование параметрического пространства под контролем априорной информации (даже выраженной интервальными оценками) и дает надежный результат решения обратной задачи.

Невзирая на то, что конечный результат инверсии гравиметрических данных ожидается в виде вполне конкретной числовой модели, автор придерживается концепции П.И. Балка [Балк, 1980], согласно которой единичные оценки параметров модели не являются единственно возможной математической формой представления результатов. Исходя из этого, в условиях недостатка априорной информации множество Парето-оптимальных решений может служить базисом для дальнейшего извлечения полезных данных об аномальных источниках с привлечением других геофизических методов интерпретации.

Отметим также, что описанный подход к решению обратной задачи может иметь интерес и при решении широкого круга других оптимизационных геофизических задач.

Список литературы

- Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий. *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1980. № 6. С. 65—83.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Метод минимизации риска для решения обратных задач гравиразведки при слабых предположениях о свойствах геологических помех. *Геофиз. журн.* 2016. Т. 38. № 5. С. 108—118. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i5.2016.107825>.
- Булах Е.Г., Кишман-Лаванова Т.Н. Еще один аппроксимационный подход к решению об-

- ратных задач гравиметрии в классе трехмерных контактных поверхностей. *Геофиз. журн.* 2006. Т. 28. № 2. С. 54—62.
- Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Ленинград: Недра, 1983. 248 с.
- Гравиразведка. Справочник геофизика. Под ред Е.А. Мудрецовоу. Москва: Недра, 1990. 607 с.
- Каратаев Г.И., Пашкевич И.К. Геолого-математический анализ комплекса геофизических полей. Киев: Наук. думка, 1986. 168 с.
- Кишман-Лаванова Т.Н. Парето-оптимальные решения обратной задачи гравиметрии с неопределенной априорной информацией. *Геофиз. журн.* 2015. Т. 37. № 5. С. 93—103. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i5.2015.111148>.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1986. 288 с.
- Goldberg, D.E., Deb, K., Clark, J.H. (1992). Genetics algorithm, noise and the sizing of population. *Complex Systems*, 6, 333—362.
- Kozlovskaya, E. (2000). An algorithm of geophysical data inversion based on non-probalistic presentation of a priori information and definition of Pareto-optimality. *Inverse Problems*, 16, 839—861.
- Kozlovskaya, E., Vecsey, L., Plomerová, J., & Raita, T. (2007). Joint inversion of multiple data types with the use of multiobjective optimization: problem formulation and application to the seismic anisotropy investigations. *Geophysical Journal International*, 171(2), 761—779. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03540.x>.
- Parker, R.L. (1994). *Geophysical Inverse Theory*. Princeton University Press. 386 p.
- Sambridge, M. (1999). Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm — I. Searching a parameter space. *Geophysical Journal International*, 138(2), 479—494. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1999.00876.x>.
- Sambridge, M., & Mosegaard, K. (2002). Monte Carlo methods in geophysical inverse problems. *Reviews of Geophysics*, 40(3), 301—329. <https://doi.org/10.1029/2000RG000089>.
- Tarantola, A., & Valette, B. (1982). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20(2), 219—232. <https://doi.org/10.1029/RG020i002p00219>.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 341 p.
- Voronoi, M.G. (1908). Nouvelles applications des parameters continues a la theorie des formes quadratiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 134, 198—287.
- Zhdanov, M. (2015). *Inverse Theory and Applications in Geophysics*. Elsevier Science, 730 p.

Pareto-optimal solutions of the inverse gravimetric problem in the class of three-dimensional contact surfaces

T.N. Kyshman-Lavanova, 2020

S. I. Subbotin Institute of Geophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

In geophysical inverse problems, there are two approaches to data inversion. The first is the search for a number of unknowns by minimizing the residual function. The second is through probabilistic modeling of the posteriori of the probability density function in the framework of the Bayesian interpretation of the inverse problem. In most cases, the data—model relationship is non-linear, and the corresponding minimization or modeling becomes difficult due to the multimodality of the residual function.

This article discusses an approach related to improbability methods for solving inverse problems of geophysics. Its essence consists in direct modeling of a parametric space with a further search for Pareto-optimal solutions based on a priori information. A priori information is formalized through fuzzy sets. The model example demonstrates the use of the improbable direct search and the gradient method of speedy descent in solving the nonlinear gravimetric inverse problem in the class of three-dimensional contact surfaces, and also evaluates the effectiveness of both methods.

An analysis of the performed tests shows that if there is sufficient a priori information, both methods give a completely unambiguous accurate result. The search for Pareto-optimal solutions can have a faster convergence compared to the gradient descent method, although it is determined by many factors — the number of points of the initial population, the threshold value ε , and the required level of data correspondence. Also, the algorithm is resistant to falling into local minima, since it uniformly explores the parametric space.

The algorithm allows us to obtain completely satisfactory solutions already at the stage of searching for the initial Pareto set. This is a consequence of selective modeling under the control of a priori information. A subsequent direct search in the vicinity of the Pareto-optimal points leads to a significant decrease in the residual function and to the deviation of some local minima.

In conditions of a lack of a priori information, a set of Pareto-optimal solutions can serve as a basis for further extraction of useful data on anomalous sources using other geophysical interpretation methods.

We also note that the described approach to solving the inverse problem may be of interest in solving a wide range of other optimization geophysical problems.

Key words: inversion of gravimetric data, a priori information, Pareto-optimal solution, fuzzy set.

References

- Balk, P.I. (1980). On the reliability of the results of quantitative interpretation of gravity anomalies. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Fizika Zemli*, (6), 65—83 (in Russian).
- Balk, P.I., & Dolgal, A.S. (2016). Minimization risk technique for solving gravity inverse problems in weak assumptions about geological noise properties. *Geofizicheskiy zhurnal*, 38(5), 108—118. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i5.2016.107825> (in Russian).
- Bulakh, E.G., & Kyshman-Lavanova, T.N. (2006). Another approximation approach to solving inverse problems of gravimetry in the class of three-dimensional contact surfaces. *Geofizicheskiy zhurnal*, 28(2), 54—62 (in Russian).

- Goltsman, F.M., & Kalinina, T.B. (1983). *Statistical interpretation of magnetic and gravity anomalies*. Leningrad: Nedra, 248 p. (in Russian).
- Mudretsova, E.A. (Ed.). (1990). *Gravity prospecting. Geophysics Handbook*. Moscow: Nedra, 607 p. (in Russian).
- Karataev, G.I., & Pashkevich, I.K. (1986). *Geological and mathematical analysis of a complex of geophysical fields*. Kiev: Naukova Dumka, 168 p. (in Russian).
- Kyshman-Lavanova, T.N. (2015). Pareto-optimal solutions of the inverse problem of gravimetry with indeterminate a priori information. *Geofizicheskiy zhurnal*, 37(5), 93—103. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i5.2015.111148> (in Russian).
- Tikhonov, A.N., & Arsenin, V.Ya. (1986). *Methods for solving ill-posed problems*. Moscow: Nauka, 288 p. (in Russian).
- Goldberg, D.E., Deb, K., Clark, J.H. (1992). Genetics algorithm, noise and the sizing of population. *Complex Systems*, 6, 333—362.
- Kozlovskaya, E. (2000). An algorithm of geophysical data inversion based on non-probabilistic presentation of a priori information and definition of Pareto-optimality. *Inverse Problems*, 16, 839—861.
- Kozlovskaya, E., Vecsey, L., Plomerová, J., & Raita, T. (2007). Joint inversion of multiple data types with the use of multiobjective optimization: problem formulation and application to the seismic anisotropy investigations. *Geophysical Journal International*, 171(2), 761—779. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03540.x>.
- Parker, R.L. (1994). *Geophysical Inverse Theory*. Princeton University Press. 386 p.
- Sambridge, M. (1999). Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm — I. Searching a parameter space. *Geophysical Journal International*, 138(2), 479—494. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1999.00876.x>.
- Sambridge, M., & Mosegaard, K. (2002). Monte Carlo methods in geophysical inverse problems. *Reviews of Geophysics*, 40(3), 301—329. <https://doi.org/10.1029/2000RG000089>.
- Tarantola, A., & Valette, B. (1982). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20(2), 219—232. <https://doi.org/10.1029/RG020i002p00219>.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 341 p.
- Voronoi, M.G. (1908). Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 134, 198—287.
- Zhdanov, M. (2015). *Inverse Theory and Applications in Geophysics*. Elsevier Science, 730 p.

Парето-оптимальні розв'язки оберненої задачі гравіметрії в класі тривимірних контактних поверхонь

Т.М. Кишман-Лаванова, 2020

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

У геофізичних обернених задачах існує два підходи до інверсії даних. Перший — пошук ряду невідомих за допомогою мінімізації функції нев'язки. Другий — за допомогою імовірнісного моделювання апостеріорі функції густини ймовірності в рамках Байєсівського трактування оберненої задачі. У більшості випадків співвідношення дані—модель є нелінійним, і відповідна мінімізація або моделювання стають складними через мультимодальність функції нев'язки.

Розглядається підхід, що стосується неймовірнісних методів розв'язування обернених задач геофізики. Його суть полягає у прямому моделюванні параметричного простору з подальшим пошуком Парето-оптимальних розв'язків на основі апріорної інформації. Апріорно інформація формалізується за допомогою нечітких множин. На модельному прикладі продемонстровано застосування неймовірнісного прямого пошуку та градієнтного методу найшвидшого спуску при розв'язанні нелінійної гравіметричної оберненої задачі в класі тривимірних контактних поверхонь, а також оцінено ефективність обох методів.

Аналіз виконаних тестів показує, що за наявності достатньої апріорної інформації обидва методи дають цілком однозначний точний результат. Пошук Парето-оптимальних розв'язків може мати більш швидку збіжність порівняно з методом градієнтного спуску, хоча вона визначається багатьма факторами — кількістю точок початкової популяції, граничним значенням ε і необхідним рівнем відповідності даних. Алгоритм також має стійкість до потрапляння в локальні мінімуми, оскільки рівномірно досліджує параметричний простір.

Алгоритм дає змогу отримати цілком задовільні розв'язки вже на стадії пошуку початкової Парето-множини. Це наслідок вибіркового моделювання під контролем апріорної інформації. Подальший прямиий пошук в околі Парето-оптимальних точок призводить до значного зменшення функції нев'язки і до відхилення деяких локальних мінімумів.

В умовах недостатньої апріорної інформації множина Парето-оптимальних розв'язків може бути базисом для подальшого вилучення корисних даних щодо аномальних джерел із залученням інших геофізичних методів інтерпретації.

Описаний підхід до розв'язання оберненої задачі може становити інтерес і при розв'язанні широкого кола інших оптимізаційних геофізичних задач.

Ключові слова: інверсія гравіметричних даних, апріорна інформація, Парето-оптимальний розв'язок, нечітка множина.