

## Математичне моделювання пружних і акустичних властивостей піроксен-магнетитових кристалосланців

*І. М. Безродна, Д. А. Безродний, В. В. Свистов, 2021*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
ННІ «Інститут геології», Київ, Україна  
Надійшла 27 травня 2021 р.

Наведено аналіз результатів математичного моделювання впливу формату, концентрації мінералів і тріщинуватості метаморфічних кристалосланців Піщанської залізородної структури.

Мета роботи — аналіз впливу мінерального складу, типів, орієнтації та концентрації мінеральних включень і мікротріщин на акустичні та пружні властивості групи зразків кварц-магнетит-піроксенових кристалосланців Піщанської залізородної структури. Із застосуванням методу умовних моментів здійснено математичне моделювання впливу формату, орієнтації та вмісту зерен мінералів, а також концентрації та формату тріщинуватості на акустичні та пружні властивості порід зазначеної структури. Згідно з отриманими даними доведено слабкий вплив зміни вмісту породоутворювальних мінералів та суттєвий вплив різних типів тріщинуватості на величину пружної та акустичної анізотропії (10—40 %). Розраховано пружні постійні моделі з шаруватою та хаотичною орієнтацією структурно-текстурних елементів. Установлено, що більшість моделей, як і базові зразки, мають ромбічний тип акустичної симетрії. При порівнянні стереопроєкцій параметрів анізотропії реальних зразків з отриманими при моделюванні стереопроєкціями встановлено, що більшості зразків властива подвійна система тріщинуватості: хаотична та напрямлена у площині сланцюватості.

Відповідно до результатів математичного моделювання, для моделей з упорядкованою орієнтацією тріщин зміна формату та концентрації пустот є визначальною характеристикою. Для моделей з хаотичним розташуванням структурних елементів такий вплив істотно менший. Доведено, що моделі з комбінованим (шаруваті та хаотично орієнтовані) типом тріщинуватості найбільш наближені до реальних зразків. Показано, що дана методика дає змогу створювати моделі, близькі до реального геологічного середовища, та оперувати їми.

**Ключові слова:** математичне моделювання, анізотропія, акустичні, пружні властивості, кристалосланці, магнетит, кварц, піроксен.

**Вступ.** Деформаційні процеси у гірських породах, історію їх утворення можна вивчати за результатами математичного моделювання ефективних пружних і акустичних властивостей порід. Такі розрахунки можливі лише в разі застосування надійного програмного забезпечення та досконалих моделей, які б правильно відображали властивості та структуру модельованих порід і геологічні та фізичні процеси, що в них відбувалися.

*Постановка проблеми.* Існуючі дослідження стосовно теоретичного розрахунку

властивостей гірських порід ґрунтуються на застосуванні двох математичних підходів:

➤ методів осереднення, які дають можливість знайти верхню та нижню межі пружних властивостей порід без будь-яких припущень щодо геометрії пустот і мінеральних зерен;

➤ методів, що враховують форми включень у породах і засновані на розв'язанні задач для складного середовища з урахуванням заданої геометрії їх складових.

Класичними методами математичного моделювання пружних параметрів є методи осереднення пружних постійних або піддатливостей за макрооб'ємом; вони відомі як методи осереднення Фойгта та Реуса, за якими визначають верхню та нижню межі ефективних пружних постійних. У цьому випадку оцінювання є приблизним, оскільки не враховується взаємодія між структурними елементами та мова йде про відносну інтегральну міру пружної анізотропії [Александров, Продайвода, 2000]. Хілл узагальнив схеми Фойгта та Реуса для багатофазних агрегатів. На підставі варіаційних принципів у разі деяких неоднорідних деформацій і напружень отримують вузькі межі [Hashin, Shtrikman, 1962, 1963]. Проте при розрахунку пружних постійних порід, що містять пустоти, цей метод застосувати не можна, тому що нижні значення пружних постійних дорівнюватимуть нулю, навіть за невеликих включень пустот. Якщо частка включень незначна, то ними можна знехтувати. Якщо об'ємну частку не можна розглядати як малу величину, то виникає потреба у модифікації такого розв'язання. На основі методу самоузгодження Л. Валпол [Walpole, 1969] отримав аналітичні вирази для ефективних пружних постійних у випадку включень дискової форми. Надалі він оцінив довільну сингулярність у сферичному ізотропному включенні з ізотропною матрицею [Walpole, 2001]. Такі результати узгоджуються з нижніми і верхніми межами Хашина—Штрикмана. О'Конел та Будянський [O'Connell, Budiansky, 1974] отримали аналітичні формули для наближених розв'язків рівнянь за методом самоузгодження для включень у вигляді дископодібних пустот, заповнених газом і рідиною.

Метод визначення ефективних пружних постійних стохастичних середовищ, запропонований Хорошун [Хорошун, 1972], дає змогу звести задачу до розв'язання нескінченної системи взаємопов'язаних рівнянь відносно умовних моментів різних типів, але першого порядку. У двоточковому наближенні, що відповідає умові од-

норідності випадкових полів деформацій в межах компонентів, задача зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти яких враховують двоточкову взаємодію між структурними елементами. Це дає можливість враховувати анізотропію, зумовлену формою та орієнтацією включень, без накладання обмежень на об'ємну концентрацію та симетрію тензорів пружних властивостей компонентів. Даний метод застосовують для вивчення ефективних пружних постійних багатокомпонентних композитних матеріалів [Хорошун, 2017] та їх значень в умовах різного типу контактів між компонентами.

З геологічної та геофізичної позицій для моделювання порід різного типу дієвість методу умовних моментів показано в публікації [Александров, Продайвода, 2000]. Ефективність і результативність його застосування для моделювання ефективних пружних параметрів та оцінювання анізотропії сильнометаморфізованих кристалічних порід з високим вмістом магнетиту, кварцу, а також складною структурно-текстурною характеристикою доведено в публікаціях [Безродний, 2008; Продайвода та ін., 2011].

Застосування математичного моделювання при дослідженнях складнопобудованих, ущільнених порід-колекторів та нових методологічних підходів описано у статтях [Безродна та ін., 2016; Безродная и др., 2018, 2019]. Автори довели, що за допомогою запропонованої методики можна моделювати ефективні пружні параметри та оцінювати акустичну і пружну анізотропію в умовах багатокомпонентного середовища без обмежень на типи включень. Математичне моделювання пружних параметрів при дослідженнях колекторських властивостей порід описано у публікаціях [Boerset et al., 2009; Баяк и др., 2012]. Крім того, подібні підходи застосовують і при аналізі та моделюванні сейсмічних полів. Так, у статті [Александров, Кризский, 2018] описано моделювання шарувато-анізотропних та довільно-анізотропних середовищ, отримані результати порівняно з реальними даними.

Отже, при математичному моделюванні пружних і акустичних властивостей найліпше застосовувати математичні методи, що враховують анізотропність гірських порід, зокрема, геометрію мінеральних зерен і пустот.

**Мета** статті — аналіз впливу мінерального складу, типів, орієнтації та концентрації мінеральних включень і мікротріщин на акустичні та пружні властивості групи зразків кварц-магнетит-піроксенових кристалосланців Піщанської залізорудної структури.

**Методологія.** В основу методики математичного моделювання покладено багатокомпонентну матричну модель, яка максимально наближена до будови реальних порід. Матриця моделі (мінералогічна основа) розчленована різними за формою, розмірами та орієнтацією мікротріщинами та мінералами з різною кристалографічною орієнтацією зерен певної форми з різними концентраціями їхніх включень. Основним методом для розв'язання поставленого завдання є метод умовних моментних функцій із застосуванням розрахункової схеми Морі—Танака [Продайвода та ін., 2011]. Обернена задача при моделюванні зводиться до визначення пружних постійних та здійснюється відомим методом найменших квадратів (МНК) з використанням методів нелінійної оптимізації. Зазвичай для обґрунтування математичних моделей застосовують апріорні результати, зокрема, петрографічний опис зразків досліджуваних порід. Основою моделей є пружні постійні та густини мінералів, що складають модель породи [Безродний, 2008].

Загалом алгоритм методики математичного моделювання запишемо у такому вигляді:

1) вибір базових зразків, петрографічні характеристики яких необхідні для створення моделей;

2) розробка математичних моделей порід з урахуванням їх мінерального складу, орієнтації і форми зерен мінералів, типів й орієнтації пустот;

3) розрахунок акустичних і пружних параметрів: акустичного тензора, коефіцієн-

тів лінійності та сланцюватості, коефіцієнтів диференціальної акустичної анізотропії, тензора матриць пружних постійних;

4) розрахунок параметрів азимутальної пружної анізотропії пружних хвиль, що зображені стереопроєкціями ізоліній вказівних поверхонь;

5) аналіз отриманих даних та порівняння з результатами обробки петрофізичних досліджень.

Для здійснення моделювання та аналізу отриманих параметрів застосовано розроблений колективом ННІ «Інституту геології» комплекс оригінальних програм [Безродна та ін., 2016].

**Результати досліджень.** При математичному моделюванні акустичних і пружних особливостей кварц-магнетит-піроксенових кристалосланців Піщанської залізорудної структури проведено аналіз впливу мінерального складу, типів, орієнтації та концентрації мінеральних включень і мікротріщин на математичні параметри, які їх характеризують, з повним урахуванням анізотропності пружних властивостей порід.

За попередніми комплексними петрографо-петрофізичними дослідженнями [Bezrodnyi et al., 2019], серед порід Піщанської залізорудної структури авторами виділено три петрографічні групи: магнетит-піроксенові кристалічні сланці; кварц-магнетит-піроксенові кристалічні сланці; біотит-амфіболові плагіокристалосланці.

На основі виділення петрографічних груп порід і з урахуванням їх складної будови автори створили декілька груп моделей.

*Перша група «магнетит-піроксенові кристалосланці»* представлена наборами Mod I та Mod II (по 10 моделей у кожній). За мінералогічну основу групи моделей I взято зразок PS-33 та відповідний шліф породи 140/2 (рис. 1, а). Ця порода за мікропетрографічним аналізом характеризується таким мінеральним складом: піроксен (96 %); магнетит 4 %; вміст інших мінералів низький. Для моделювання групи моделей II взято зразок PS-34 та відповідний шліф 141 (рис. 1, б). Згадана порода мінералогічно характеризується піроксеновою матри-

цею (60 %), найбільшим вмістом магнетиту в групі порід (40 %) та низьким вмістом інших мінералів. Досліджувані зразки мають найменший та найбільший вміст магнетиту в цій групі.

В обох випадках моделі кожного набору розділені на два блоки, перший — чітка орієнтація зерен і мікротріщин у площині  $X_1X_2$  (Mod I.1—4 і Mod II.1—4). Решта 12 моделей (Mod I.5—I.10) та Mod II.5—II.10) мають хаотичну орієнтацію структурно-текстурних елементів (табл. 1). Змінювали формат зерен і концентрацію мікротріщин. Формат мікротріщин залишався сталим ( $\alpha=0,005$ ).

Згідно з результатами математичного моделювання, зміна формату зерен практично не вплинула на диференціальний коефіцієнт анізотропії та на характер розподілу ізоліній. Суттєві відмінності спостерігали за змінами концентрації тріщинуватості (табл. 1).

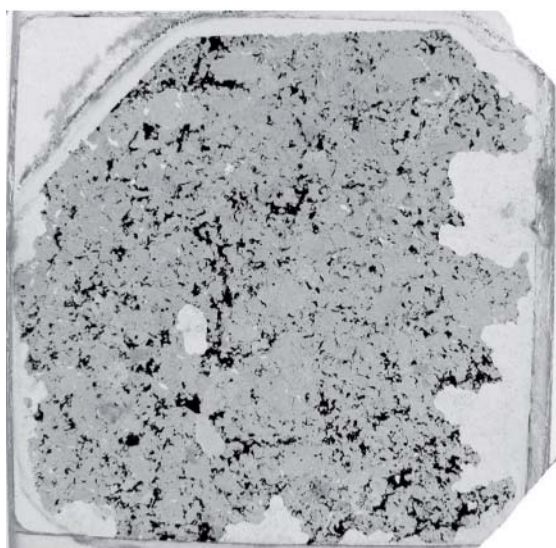
Згідно з даними табл. 1, незначна зміна концентрації мікротріщин суттєво впливає на коефіцієнт анізотропії. Для моделей з упорядкованою орієнтацією елементів його величина змінюється на 7 %, від 31 до 24 %, за концентрації мікротріщин 0,009 та 0,005 відповідно. В разі хаотичної орієн-

тації ця зміна дещо менша і дорівнює 4 %, від 23 до 19 %, за концентрації 0,009 та 0,005 відповідно.

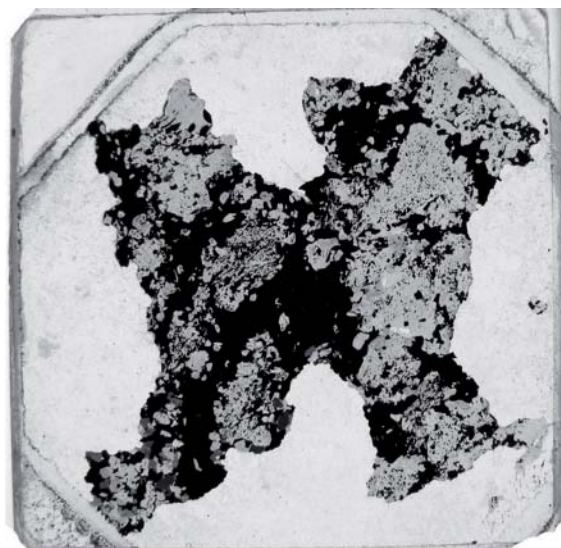
З урахуванням отриманих результатів, а також з огляду на петрографічний опис можна дійти висновку, що шліф 140/2, на

**Т а б л и ц я 1.** Залежність диференціального коефіцієнта анізотропії ( $A_d$ ) від концентрації мікротріщин і формату зерен  $\alpha$  набору моделей Mod I

Коефіцієнт анізотропії, $A_d$ , %	Концентрація мікротріщин		
	0,009	0,005	0,002
<i>Формат зерен, <math>\alpha=0,3</math></i>			
16			Мод 9
19		Мод 5	
23	Мод 7		
24		Мод 1	
31	Мод 2		
<i>Формат зерен, <math>\alpha=0,5</math></i>			
16			Мод 10
19		Мод 6	
23	Мод 8		
24		Мод 3	
31	Мод 4		



*a*



*b*

Рис. 1. Магнетит-піроксеновий кристалічний сланець: *a* — шліф 140/2, зразок PS-33; *b* — шліф 141, зразок PS-33. Ширина шліфа 25 мм.

Fig. 1. Magnetite-pyroxene crystalline shale: *a* — sections 40/2, sample PS-33; *b* — sections 141, sample PS-33. The width of the section is 25 mm.

основі аналізу якого було створено моделі, зроблений в площині сланцюватості. Він має суттєві відмінності від зразка PS-33 як за вмістом породоутворювальних мінералів, так і за їх текстурно-структурними особливостями і не відображає повної петрографічної картини.

Щодо кількісних характеристик набору Mod I середня густина моделей порід становила  $3360 \text{ кг/м}^3$ . Це суттєво нижче значення для базового зразка PS-33 ( $3690 \text{ кг/м}^3$ ), що також засвідчує недосконалу характеристику породи за мікропетрографічними показниками, а математичне моделювання ілюструє інтегральні характеристики досліджуваних порід.

Подібна картина властива і результатам математичного моделювання пружних та акустичних параметрів набору моделей Mod II.

Вихідні параметри моделей Mod II.1—8 аналогічні відповідним параметрам моделей набору Mod I, за винятком вмісту магнетиту. Як і в попередній групі, формат зерен не вніс суттєвих відмінностей у властивості моделей — не більш як 0,5 % (табл. 2). Подібними залишаються форма і характер розподілу ізоліній на стереопроєкціях.

**Т а б л и ц я 2. Залежність диференціального коефіцієнта анізотропії від концентрації мікротріщин та формату зерен набору моделей Mod II**

Коефіцієнт анізотропії, $A_d$ , %	Концентрація мікротріщин			
	0,009	0,005	0,002	0,001
	<i>Формат зерен, <math>\alpha=0,3</math></i>			
10,5				Мод 10
11,5			Мод 9	
13,5		Мод 5		
16,5	Мод 7			
19,0		Мод 1		
24,0	Мод 2			
	<i>Формат зерен, <math>\alpha=0,5</math></i>			
13,0		Мод 6		
16,0	Мод 8			
19,0		Мод 3		
24,0	Мод 4			

Окремо слід зауважити, що хоча стереопроєкції Mod II.9 та Mod II.10 (рис. 2, а, б) візуально подібні до проєкції базового зразка PS-34, проте конфігурація мінімумів і максимумів різна. Зона низьких значень диференціального коефіцієнта анізотропії  $A_d$  проходить зверху вниз через центральну вісь, тоді як для зразка PS-34 виділено дві зони знижених значень у периферійних ділянках проєкції.

Аналіз отриманих значень диференціального коефіцієнта анізотропії дає змогу зробити висновки, що збільшення концентрації магнетиту суттєво зменшило загальні значення цього параметра: 10—24 % проти 19—31 %, оскільки відбулась компенсація значної різниці в акустичних і пружних властивостях піроксену та магнетиту. Збільшилась і середня густина моделей Mod II, яка становила  $4030 \text{ кг/м}^3$ , що вище за значення базового зразка PS-34 ( $3830 \text{ кг/м}^3$ ).

За співвідношеннями головних компонентів матриць пружних постійних розрахованих моделей встановлено, що більшість їх мають ромбічний тип пружної симетрії. Проте Mod I.5, Mod I.7, Mod II.5 та Mod II.7 можна умовно віднести до поперечно-ізотропного типу ( $C_{11}^* \approx C_{22}^* < C_{33}^*$ ;  $C_{44}^* = C_{55}^* > C_{66}^*$ ). Для вказаних моделей характерне хаотичне розташування структурних елементів, формат зерен  $\alpha=0,3$ .

Друга група «кварц-магнетит-піроксеніві кристалосланці» складена з наборів моделей Mod. III та Mod. IV (всього 18 моделей). Ці набори моделей (табл. 3) розроблені з метою дослідження впливу тріщинуватості (орієнтованої, хаотичної та комбінованої), а також вивчення збільшеної кількості породоутворювальних мінералів у складі модельованої породи, які також орієнтовані хаотично (Mod. III.5—10 і Mod. IV.5—8) і в площині  $X_1X_2$  (Mod. III.1—4 та Mod. IV.1—4). Набори мінералогічно ґрунтуються на основі зразків PS-9 та PS-5, що мають відповідно найменший (11 %) і найбільший (30 %) серед цієї петрографічної групи вміст кварцу, а також середній вміст магнетиту (10—12 %). Формат зерен сталий для всіх моделей ( $\alpha=0,69$ ), концен-

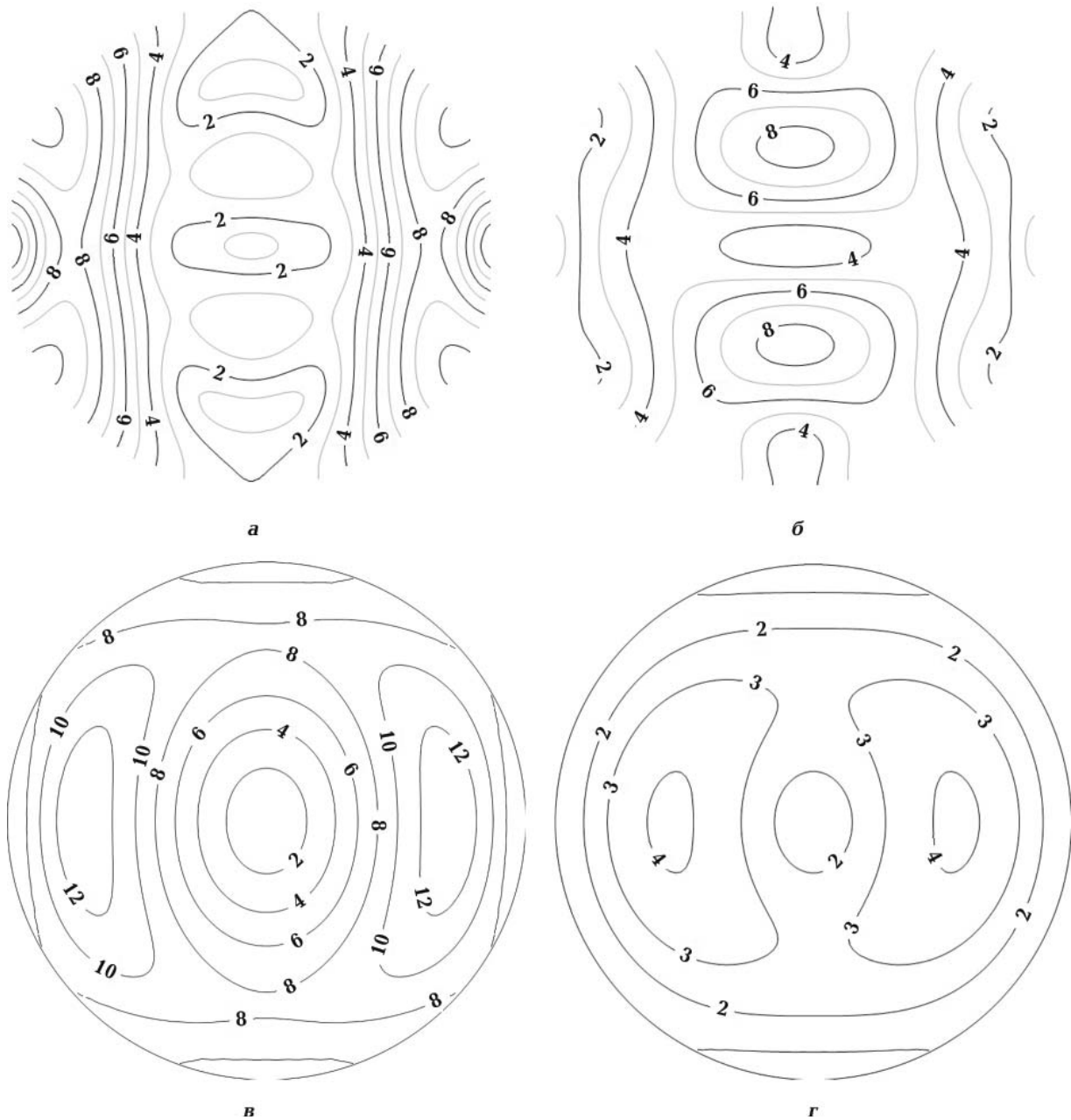


Рис. 2. Стереопроєкції вказівних поверхонь значень диференціального коефіцієнта анізотропії: а — Mod. II.10; б — PS-34; в — Mod. III.9, г — PS-9.

Fig. 2. Stereoprojections of index surfaces of values of differential anisotropy coefficient: а — Mod. II.10; б — PS-34; в — Mod. III.9, г — PS-9.

трацію обрано орієнтованою — за віссю  $X_3$  — 2 %,  $X_1$  та  $X_2$  — однаково (Mod. III.1—4 і Mod. IV.1—4) рівномірною (решта моделей).

Згідно з результатами математичного моделювання, для моделей Mod. III та Mod. IV із упорядкованою орієнтацією тріщин зміна формату та концентрації пустот

є визначальною характеристикою. Так, для Mod. III.1—4 збільшення формату тріщинуватості  $\alpha$  від 0,007 до 0,003 за низької концентрації тріщин ( $\zeta=0,002$ ) зумовлює збільшення диференціального коефіцієнта анізотропії  $A_d$  від 17 до 23 %, а за високої концентрації ( $\zeta=0,009$ ) — від 28 до 38 %. Відповідні їм моделі набору Mod. IV.1—4 по-

**Т а б л и ц я 3. Характеристики наборів моделей Mod. III і Mod. IV**

Назва моделі	Вміст породоутворювальних мінералів, %	Тріщини		
		Формат зерен, $\alpha$	Концентрація	Орієнтація
Mod. III.1—4	Кварц — 11, піроксен — 79, магнетит — 10	0,003, 0,007	$\zeta=0,002, 0,009$	У площині $X_1X_2$
Mod. IV.1—4	Кварц — 30, піроксен — 58, магнетит — 12	0,005, 0,007	$\zeta=0,002, 0,009$	Те саме
Mod. III.5—8	Кварц — 11, піроксен — 79, магнетит — 10	0,003—0,007	$\zeta=0,002, 0,009$	Хаотично
Mod. IV.5—8	Кварц — 30, піроксен — 58, магнетит — 12	0,003—0,007	$\zeta=0,003, 0,007$	»
Mod. III.9	Кварц — 11, піроксен — 79, магнетит — 10	0,005	$\zeta=0,007$ по $X_3, X_1$ та $X_2$ — однаково; $\zeta=0,001$ по $X_3$ — 2 %, по $X_1$ та $X_2$ — однаково	Комбінована (хаотично та в площині $X_1X_2$ )
Mod. III.10	Кварц — 11, піроксен — 79, магнетит — 10	0,005	$\zeta=0,002$ по $X_3, X_1$ та $X_2$ — однаково; $\zeta=0,001$ по $X_3$ — 2 %, по $X_1$ та $X_2$ — однаково	Комбінована (хаотично та в площині $X_1X_2$ )

казали подібні результати. Навіть в разі меншої зміни формату ( $\alpha=0,007\dots0,005$ ) за низької концентрації мікротріщин ( $\zeta=0,002$ ) відбувся приріст диференціального коефіцієнта анізотропії від 22 до 24 %, за їх високої концентрації ( $\zeta=0,009$ ) — від 36 до 40 %.

Для моделей з хаотичним розташуванням структурних елементів такий вплив істотно менший. Зокрема, зі збільшенням формату зерен слаботріщинуватих моделей порід (Mod. III.5 та Mod. III.7) величина анізотропії залишилась незмінною ( $A_d=11$  %), проте густина знизилась на  $20 \text{ кг/м}^3$ . У випадку з Mod. IV.5 та Mod. IV.7, що мають аналогічні зі згаданими вище моделями структурно-текстурні параметри, зміни коефіцієнта анізотропії також не відбулось, він дорівнює 12,5 %.

Для моделей з більшою тріщинуватістю зростання формату порот спрочинило несуттєву зміну величини  $A_d$  (на 0,5 % для моделей обох груп порід).

Загалом, усі моделі Mod. III та Mod. IV можна віднести до високоанізотропних порід, оскільки коефіцієнт  $A_d$  для всіх мо-

делей коливається в межах 10—40 %. Це підтверджується і значним розходженням у значеннях ефективних пружних постійних  $C_{11}^*, C_{22}^*, C_{33}^*$ . Аналіз співвідношень головних компонентів матриць пружних постійних показав, що більшість моделей мають ромбічний тип пружної симетрії. Окремо встановлено, що у обох випадках (вміст кварцу 10 та 30 %) за високої концентрації орієнтованих в площині  $X_1X_2$  мікротріщин формату  $\alpha=0,003\dots0,005$  пружна симетрія є поперечно-ізотропною. В моделях I та II груп подібну симетрію спостерігали у частині моделей з хаотичним розташуванням структурно-текстурних елементів.

При порівнянні отриманих стереопроєкцій набору Mod. III з базовим зразком PS-9 встановлено, що характер розподілу ізоліній в моделях наближений до реального (рис. 2, в, г). Однак слід зазначити, що в результаті моделювання коефіцієнт диференціальної пружної анізотропії  $A_d$  змінюється від 10 до 38 %, тоді як ця величина є суттєво меншою в зразку (для зразка PS-9  $A_d=4,2$  %). Найближчими за значеннями до

реального зразка виявились Mod. III.9 та Mod. III.10. Ці моделі мають комбіновану тріщинуватість.

Зіставивши стереопроєкції інших зразків з отриманими при моделюванні стереопроєкціями, автори встановили, що для більшості зразків система тріщинуватості є подвійною.

**Висновки.** За результатами математичного моделювання кристалосланців Піщанської залізородної структури встановлено вплив різних типів тріщинуватості на акустичні та пружні властивості цих порід. Показано вплив зміни формату, концентрації та орієнтації мікротріщин на пружні параметри моделей. Зокрема, показано, що зміна формату та концентрації тріщин є основним фактором впливу на величину та характеристику анізотропії пружних властивостей порід досліджуваної структури. Доведено, що подібні породи можна

вважати високоанізотропними, оскільки їх коефіцієнт диференціальної пружної анізотропії варіює в межах 10—40 %.

При порівнянні стереопроєкцій параметрів анізотропії реальних зразків з отриманими при моделюванні стереопроєкціями автори встановили, що більшість зразків мають подвійну систему тріщинуватості: хаотичну та напрямлену в площині сланцюватості.

Автори показали, що використана методика дає змогу створювати моделі, близькі до реального геологічного середовища, та оперувати ними.

В перспективі результати математичного моделювання будуть накладені на результати практичних досліджень колекції зразків кристалосланців Піщанської залізородної структури для детальнішого аналізу геологічної обстановки об'єкта досліджень.

### Список літератури

- Александров К. С., Продайвода Г. Т. (2000). Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 354 с.
- Александров П. Н., Кризский В. Н. (2018). Математическое моделирование эффективных упругих параметров. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. Т. 11. № 2. С. 5—13. <https://doi.org/10.14529/mmp180201>.
- Баюк И. О., Постников О. В., Рыжков В. И., & Иванов, И. С. (2012). Математическое моделирование анизотропных эффективных упругих свойств карбонатных коллекторов сложного строения. *Технологии сейсморазведки*. № 3. С. 42—55.
- Безродна І., Безродний Д., & Голяка Р. Математичне моделювання впливу мінерального складу та пористості на параметри пружної анізотропії складнобудованих теригенних порід Волино-Поділля. *Вісник Київського національного університету. Геологія*. 2016. № 2(73). С. 27—32.
- Безродная И. Н., Безродный Д. А., Козионова О.А. Математическое моделирование акустической и упругой анизотропии сланцевых пород-коллекторов Днепровско-Донецкой впадины. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Геологія. Географія. Екологія*. 2019. № 50. С. 42—53. <https://doi.org/10.26565/2410-7360-2019-50-03>.
- Безродная И. Н., Безродный Д. А., Продайвода Г. Т. Математическое моделирование упругой анизотропии пород-коллекторов. Lambert Academic Publishing, 2018. 193 с.
- Безродний Д. А. Пружна анізотропія метаморфічних порід Кривбасу і її використання для вирішення задач тектонофаціального аналізу: Дис. ... канд. геол. наук. Київ, 2008. 250 с.
- Продайвода Г. Т., Вижва С. А., Безродний Д. А., & Безродна І. М. Акустичний текстурний аналіз тектонофацій метаморфічних порід Криворіжжя. Київ: Видавничо-поліграфічний цент «Київський університет», 2011. 368 с.
- Хорошун Л. П. Упругие свойства материалов, армированных однонаправленными короткими волокнами. *Прикладная механика*. 1972. Т. VIII. Вып. 12. С. 86—92.
- Хорошун Л. П. Эффективные упругие свойства зернистых стохастических композит-



- ных материалов с дефектами на границе раздела компонентов. *Прикладная механика*. 2017. Т. 3. № 5. С. 108—121.
- Bezrodnyi, D., Svystov, V., & Bezrodna, I. (2019). Comparative analysis of results of an acoustic anisotropy investigations of rock samples of Pishchans'ka iron-ore structure. Conference Proceedings, *Monitoring 2019, Nov. 2019* (Vol. 2019, pp. 1—5). <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201903207>.
- Boerset, K., Berland, H., Nordahl, K., & Rustad, A. (2009). *Multiscale Modelling of Elastic Parameters*. Amsterdam: European Association of Geoscientists & Engineers. doi:doi.org/10.3997/2214-4609.201400553.
- Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1962). On some variational principles in anisotropic and non homogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(4), 335—342. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(62\)90004-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(62)90004-2).
- Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2), 127—140. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
- Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4), 213—222. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4).
- O'Connell, R., & Budiansky, B. (1974). Seismic velocities in dry and saturated cracked solids. *Journal of Geophysical Research*, 79(35), 5412—5426. <https://doi.org/10.1029/JB079i035p05412>.
- Reuss, A. (1929). Berechnung Der Fließgrenze Von Mischkristallen auf Grundder Plastizität Bedingung für Einkristalle. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 9(1), 49—58. <https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104>.
- Voight, W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Berlin: Berlin Teubern.
- Walpole, L. (2001). An elastic singularity in a bounded region: volume change and related effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(3), 551—569. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(00\)00044-2](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(00)00044-2).
- Walpole, L. (1969). On the overall elastic moduli of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(4), 235—251. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(69\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(69)90014-3).

## Mathematical modeling of pyroxene-magnetite crystalline shales elastic and acoustic properties

I. Bezrodna, D. Bezrodny, V. Svystov, 2021

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Geology, Kyiv, Ukrainian

The analysis of the results of mathematical modeling of the influence of the format, mineral concentration and fracture of metamorphic crystalline shales of the Pishcha iron ore structure is presented.

The aim of this work is to analyze the influence of mineral composition, types, orientation and concentration of mineral inclusions and microcracks on the acoustic and elastic properties of a group of samples of "quartz-magnetite-pyroxene" crystalline shales of Pishchans'ka iron ore structure.

Based on the method of conditional moments, mathematical modeling of the influence of the format, orientation and content of mineral grains, as well as the concentration and format of cracking on the acoustic and elastic properties of rocks of the Pishchans'ka iron ore structure was performed. According to the obtained data, a weak effect of changes in the content of rock-forming minerals and a significant effect of different types of fractures on the value of elastic and acoustic anisotropy (10-40%) was proved.

Elastic constants of models with layered and chaotic orientation of structural-textural elements are calculated. It is established that most models, as well as basic samples have a rhombic type of acoustic symmetry. When comparing the stereoprojections of the an-

isotropy parameters of real samples with the stereoprojections obtained during modeling, the authors found that in most samples there is a double system of cracking: chaotic and directed in the area of shale.

The results of mathematical modeling showed that for models with ordered crack orientation, the change in the format and concentration of voids is a defining characteristic. This effect is significantly smaller for models with a chaotic arrangement of structural elements.

It is proved that models with a combined (layered and chaotically oriented) type of fracture are the closest to real samples. The authors show that this technique allows you to create and operate models close to the real geological environment.

**Key words:** mathematical modeling, anisotropy, acoustic, elastic properties, crystalline shales, magnetite, quartz, pyroxene.

### References

- Aleksandrov, K. S., Prodayvoda, G. T. (2000). *Anisotropy of elastic properties of minerals and rocks*. Novosibirsk: Publishing house of the SB RAS, 354 p. (in Russian).
- Aleksandrov, P. N., & Krizsky, V. N. (2018). Mathematical modeling of effective elastic parameters. *Vestnik YUUrGU. Seriya «Matematicheskoye modelirovaniye i programirovaniye»*, 11(2), 5—13. <https://doi.org/10.14529/mmp180201> (in Russian).
- Bayuk, I. O., Postnikov, O. V., Ryzhkov, V. I., & Ivanov, I. S. (2012). Modelling anisotropic effective elastic properties of carbonate reservoir rocks of a complex structure. *Tekhnologii seysmorazvedki*, (3), 42—55 (in Russian).
- Bezrodna, I., Bezrodnyi, D., & Holiaka, R. (2016). Mathematical modeling of influence of the mineral composition and porosity on elastic anisotropic parameters of complex sedimentary rocks of Volyn-Podillya area. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Heolohiya*, (2), 27—32 (in Ukrainian).
- Bezrodnaya, I. N., Bezrodny, D. A., & Kozionova, O. A. (2019). Mathematical modeling of acoustic and elastic anisotropy of shale reservoir rocks of the Dnieper-Donetsk depression. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya: Heolohiya. Heohrafiya. Ekolohiya*, (50), 42—53. <https://doi.org/10.26565/2410-7360-2019-50-03> (in Russian).
- Bezrodnaya, I. N., Bezrodny, D. A., & Prodayvoda, G. T. (2018). *Mathematical modeling of elastic anisotropy of reservoir rocks*. Lambert Academic Publishing, 193 p. (in Russian).
- Bezrodny, D. A. (2008). Elastic anisotropy of metamorphic rocks of Kryvbas and its use for solving problems of tectonofacial analysis. *Doctor's thesis*. Kyiv, 250 p. (in Ukrainian).
- Prodayvoda, G. T., Vyzhva, S. A., Bezrodny, D. A., & Bezrodna, I. M. (2011). *Acoustic texture analysis of tectonofacies of metamorphic rocks of Kryvyi Rih*. Kyiv: Kyiv University Publishing and Printing Center, 368 p. (in Ukrainian).
- Khoroshun, L. P. (1972). Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers. *Prikladnaya matematika*, VIII(12), 86—92 (in Russian).
- Khoroshun, L.P. (2017). Effective elastic properties of granular stochastic composite materials with defects at the interface between the components. *Prikladnaya matematika*, 3(5), 108—121 (in Russian).
- Bezrodnyi, D., Svystov, V., & Bezrodna, I. (2019). Comparative analysis of results of an acoustic anisotropy investigations of rock samples of Pishchanska iron-ore structure. *Conference Proceedings, Monitoring 2019, Nov. 2019* (Vol. 2019, pp. 1—5). <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201903207>.
- Boerset, K., Berland, H., Nordahl, K., & Rustad, A. (2009). *Multiscale Modelling of Elastic Parameters*. Amsterdam: European Association of Geoscientists & Engineers. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201400553>.
- Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1962). On some variational principles in anisotropic and non homogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(4), 335—342. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(62\)90004-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(62)90004-2).
- Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behavior

- of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2), 127—140. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
- Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4), 213—222. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4).
- O'Connell, R., & Budiansky, B. (1974). Seismic velocities in dry and saturated cracked solids. *Journal of Geophysical Research*, 79(35), 5412—5426. <https://doi.org/10.1029/JB079i035p05412>.
- Reuss, A. (1929). Berechnung Der Fließgrenze Von Mischkristallen auf Grund der Plastizität Bedingung für Einkristalle. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 9(1), 49—58. <https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104>.
- Voight, W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Berlin: Berlin Teubner.
- Walpole, L. (2001). An elastic singularity in a bounded region: volume change and related effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(3), 551—569. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(00\)00044-2](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(00)00044-2).
- Walpole, L. (1969). On the overall elastic moduli of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(4), 235—251. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(69\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(69)90014-3).

## Математическое моделирование упругих и акустических свойств пироксен-магнетитовых кристаллосланцев

И. Н. Безродная, Д. А. Безродный, В. В. Свиствова, 2021

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,  
УНИ «Институт геологии», Киев, Украина

Представлен анализ результатов математического моделирования влияния формата, концентрации минералов и трещиноватости метаморфических кристаллосланцев Песчанской железорудной структуры.

Цель работы — анализ влияния минерального состава, типов, ориентации и концентрации минеральных включений и микротрещин на акустические и упругие свойства группы образцов кварц-магнетит-пироксеновых кристаллосланцев Песчанской железорудной структуры. На основе метода условных моментов осуществлено математическое моделирование влияния формата, ориентации и содержания зерен минералов, а также концентрации и формата трещиноватости на акустические и упругие свойства пород указанной структуры. Согласно полученным данным доказано слабое влияние изменения содержания породообразующих минералов и существенное влияние различных типов трещиноватости на величину упругой и акустической анизотропии (10—40 %). Рассчитаны упругие постоянные моделей слоистой и хаотичной ориентации структурно-текстурных элементов. Установлено, что большинство моделей, как и базовые образцы, имеют ромбический тип акустической симметрии. При сравнении стереопроекций параметров анизотропии реальных образцов с полученными при моделировании стереопроекциями установлено, что большинство образцов имеют двойную систему трещиноватости: хаотичную и направленную в плоскости сланцеватости.

Согласно результатам математического моделирования, для моделей с упорядоченной ориентацией трещин изменение формата и концентрации пустот является определяющей характеристикой. Для моделей с хаотичным расположением структурных элементов такое влияние существенно меньше. Доказано, что модели с комбинированным (слоистые и хаотично ориентированные) типом трещиноватости наиболее приближены к реальным образцам. Данная методика позволяет создавать модели, близкие к реальной геологической среде, и оперировать ими.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, анизотропия, акустические, упругие свойства, кристаллосланцы, магнетит, кварц, пироксен.