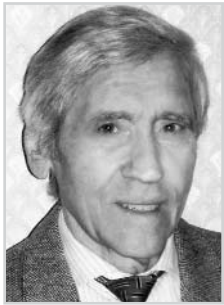




УДК 627.132 : 502.63



РЯБЕНКО О. А.



СЕЛЕЗОВ І. Т.

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ОПИСАННЯ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ БІЛЯКРИТИЧНИХ ГІДРАВЛІЧНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ ГЕС, ГАЕС, НС

(доповідь на VI Міжнародній конференції
"Світові тенденції та перспективи розвитку гідроенергетики України"
(14–15 березня 2013 р., Україна, м. Рівне)

Наводяться приклади виникнення білякритичних течій гідравлічних режимів роботи ГЕС, ГАЕС, НС. Дається аналіз існуючих диференціальних рівнянь, використовуваних при описанні таких режимів. Для практичного застосування рекомендується узагальнене диференціальне рівняння хвилеподібних білякритичних течій, яке враховує можливе відхилення від гідростатики у початковому перерізі розглянутих явищ.

Вступ. В межах різноманітних гідроенергетичних об'єктів — гідроелектричних, гідроакумуючих електричних та насосних станцій за певних умов утворюються так звані білякритичні гідравлічні режими. Особливість цих режимів полягає в тому, що вільна поверхня потоку не описується рівняннями повільно- та плавномірного руху з монотонною кривою вільної поверхні, а має хвиле- або вальцеподібний характер. Такі режими формуються в нижньому б'єфі водоскидів і низьконапірних ГЕС, в гідротехнічних тунелях і трубах, у відкритих каналах при пуску та зупинці агрегатів ГЕС, ГАЕС, НС. Виникнення білякритичних течій зафіксовано у нижньому б'єфі Ризької, Кегумської, Воткінської ГЕС, в безнапірних тунелях і галереях будівельних водоскидів Інгурської і Колимської ГЕС, у дериваційному каналі ГЕС Орезон, в Каршинському і Ферганському каналах та в межах інших гідроенергетичних об'єктів [1–4].

Характерною особливістю таких білякритичних режимів з утворенням хвилеподібної поверхні є те, що максимальна глибина під вершинами хвиль перевищує середню глибину потоку, внаслідок чого може відбутися перелив води через верх бокових дамб каналів. У безнапірних тунелях ця обставина може призвести до переходу від проектного безнапірного режиму до непроєктних — напірного чи напівнапірного режимів із виникненням додаткових гідродинамічних навантажень на обробку тунелів та відповідною зміною пропускної здатності тунелів.

Руйнування залізобетонного кріплення та розмиви ложа відбулися на Каршинському і Аму—Бухарському каналах внаслідок дії біляк-

РЯБЕНКО О. А., докт. техн. наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне;
СЕЛЕЗОВ І. Т., докт. фіз-мат. наук, професор, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ

ритичних хвиль переміщення, що утворювалися при зупинці та пуску агрегатів насосних станцій, причому на Каршинському каналі спостерігалось затоплення берм такими хвилями на довжині 3,6–3,9 км [3]. Висота хвиль переміщення зазначеного типу може бути досить великою. Так наприклад, у дериваційному каналі ГЕС Орезон при відключеній витраті 200 м³/с висота хвиль досягала 1,4 м [2].

Зазначені особливості гідравлічних режимів вимагають розробки надійних методик описання профілю вільної поверхні потоку.

1. Аналіз останніх досліджень. Теорія хвиль на воді є одним з розділів класичної механіки рідини. Описання таких хвиль — це надзвичайно складна задача, внаслідок чого у загальному випадку вона не розв'язана. Проте існує велика кількість методів побудови наближених розв'язків, серед яких важливе місце займають асимптотичні. Розклад процесу за певним параметром та врахування членів розкладу до певного порядку малості призводить до отримання відносно простих моделей з їх наступним аналізом та побудовою можливих розв'язок. При цьому важливе значення мають диференціальні рівняння з солітонними розв'язками, що виникають на основі балансу нелінійних та дисперсійних ефектів.

Вивченням хвиль на воді займалися Ж. Буссінеск, Д.Ж. Кортевег—де Фріс, Д.С. Рассел, Г. Ламб, Х. Фавр, Д.Х. Келеган, Д.В. Паттерсон, Д.Д. Стокер, В.В. Сміслов, Ф. Серр, І. Іваса, А.А. Турсунов, В.Г. Вереземський, Г. Хольторф, П. Бхатнагар, Д.Х. Перегрін, Т. Гордон, В.М. Андерсен, В.Х. Хагер, К. Хуттер та інші вчені. Існуючі розв'язки деяких диференціальних рівнянь, що описують білякритичні хвилі на поверхні води (усамітнена хвиля, кноїдальні хвилі та ін.), мають істотний не-



долік. Цей недолік полягає в тому, що профіль вільної поверхні розглядуваних явищ у згаданих розв'язках виражається через максимальну глибину, яка апіорі є невідомою, а визначення цієї глибини є однією з найважливіших задач практичних розрахунків.

2. Методика досліджень. Питання про граничні умови в початковому перерізі білякритичних течій рідини виявляється недостатньо вивченим. Досить часто апіорі вважається, що в початковому перерізі багатьох типів розглядуваних явищ потік є паралельно струминним з гідростатичним розподілом тиску. При цьому можливість існування нахилу і кривизни елементарних струминок у цьому перерізі взагалі не розглядається. Тут доречно підкреслити, що експериментальне вивчення ступеня нахилу і кривизни не тільки елементарних струминок, а й навіть кривої вільної поверхні шляхом безпосередніх вимірювань цих параметрів, при нинішньому рівні розвитку вимірювальної техніки, є малоперспективним внаслідок відсутності надійної методики вимірювань та необхідної апаратури.

Використана в роботі методика оцінки ступеня нахилу і кривизни не тільки елементарних струминок, а й навіть кривої вільної поверхні шляхом безпосередніх вимірювань цих параметрів при нинішньому рівні розвитку вимірювальної техніки є малоперспективним внаслідок відсутності надійної методики вимірювань та необхідної апаратури.

Використана в роботі методика оцінки ступеня нахилу і кривизни елементарних струминок та ступеня відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині у вибраних перерізах потоку ґрунтується на використанні показів донних п'єзометрів. При цьому необхідні характеристики у розглядуваних перерізах потоку знаходяться за допомогою коефіцієнтів негідростатичності s , потенціальної енергії β та гідродинамічного тиску k . Для параболічного закону розподілу гідродинамічного тиску по глибині зазначені коефіцієнти пов'язані між собою такими залежностями [4]:

$$\beta = (1 + 2s)/3, \quad k = (4s - 1)/3, \quad \beta = (1 + k)/2. \quad (1)$$

Знаючи п'єзометричний тиск (виражений у висоті водяного стовпа) у двох точках розглядуваного вертикального перерізу потоку з глибиною h (на поверхні $h_{\text{п.п.}} = 0$ та на дні $h_{\text{п.д.}} = sh$) і враховуючи наявність параболічного закону розподілу гідродинамічного тиску по глибині, за допомогою коефіцієнтів s , k , β можна визначити всі необхідні характеристики потоку у вибраному перерізі.

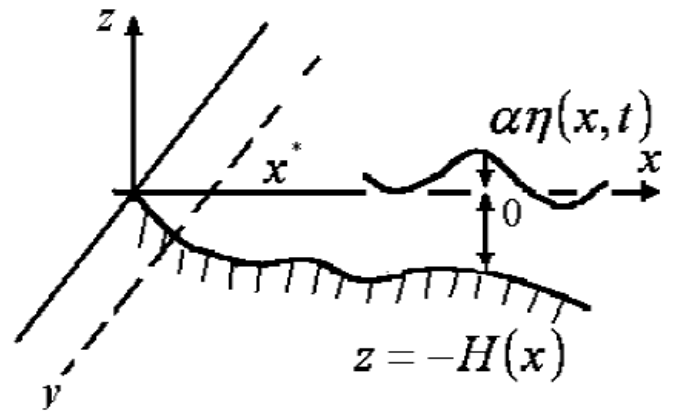


Рис. 1. Геометрія задачі

Зазначимо, що описану методику досить легко застосувати як в теоретичних схемах, так і в експериментальних дослідженнях.

3. Постановка завдання. Метою роботи є аналіз існуючих диференціальних рівнянь, використовуваних для описання профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних режимів; встановлення зв'язків між цими рівняннями; виявлення можливостей застосування виведеного узагальненого диференціального рівняння білякритичних течій, яке у явному вигляді враховує можливі нахил і кривизну елементарних струминок у початковому перерізі розглядуваних явищ.

4. Загальна модель нелінійних хвиль на воді. У більшості випадків вивчається задача руху поверхневих гравітаційних хвиль, яка добре описується моделлю ідеальної нестисливої рідини з потенціальним рухом [5]. При цьому визначення векторного поля зводиться до скалярної задачі для потенціалу швидкостей ϕ та відхилення вільної поверхні η . Розглядається плоска задача (фронтальний підхід хвиль) у прямокутній декартовій системі координат x, y, z . Вісь Oz направлена вгору від незбуреної вільної поверхні $z = 0$ (Рис. 1). Вільна збурена поверхня позначається виразом $z = \eta(x, t)$, а поверхня дна в рідині із змінною глибиною характеризується рівнянням $z = -H(x)$. Задача визначається дією двох основних характеристик — параметром нелінійності α та параметром дисперсії β .

При розгляді хвиль на воді рух води може бути усталеним в часі з нерухомими в просторі хвилями, що займають незмінне положення, або неусталеним з утворенням хвиль переміщення. Розглядаючи неусталені хвилі переміщення, дослідники виділяють так звані перманентні періоди існування цих хвиль, що рухаються у просторі з постійною швидкістю та незмінним профілем вільної поверхні. Такі перманентні хвилі переміщення звичайно розглядають у рухомій системі координат, яка рухається із швидкістю поширення хвиль і в тому ж напрямку, що і хвилі



переміщення. У такій рухомій системі координат явище виглядає як усталене, внаслідок чого з аналізу виключається фактор часу.

5. Короткий аналіз використовуваних рівнянь. Серед великої кількості диференціальних рівнянь, що описують хвилі на воді, в окрему групу виділимо рівняння Селезова, Кортевега—де Фріса, Буссінеска. Всі ці рівняння описують нелінійно-дисперсійні ефекти при русі поверхневих гравітаційних хвиль у воді. Це — еволюційні рівняння і вони описують поширення локалізованих хвиль — відокремлених хвиль типу солітонів [6]. Проте, якщо враховувати ефекти вищого порядку, як це робиться в деяких моделях, то можливо деяка видозміна солітонів на відміну від класичного профілю, описуваного рівнянням Кортевега—де Фріса.

Рівняння Селезова мають такий вигляд [7]:

$$\eta_t + (hu)_x = 0, \quad (2)$$

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x = \beta \left[\frac{H^3}{3} u_{xx} + HH_x u_{xt} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t \right] + \alpha \beta \left[(\eta h)_x u_{xt} + HH_x uu_{xx} + \frac{2}{3} \eta Hu_{xt} + \frac{H^2}{3} uu_{xx} - \frac{H^2}{3} u_x u_{xx} + \frac{H}{2} H_{xx} u_t + \frac{3}{2} HH_{xx} uu_x + \frac{H}{2} H_{xxx} u^2 + \right. \quad (3)$$

$$\left. + \eta_x H_x u_t \right] + O_1(\alpha^2 \beta, \alpha^3 \beta, \alpha^4 \beta) + O(\beta^2),$$

де $\alpha = a_{\max}/H$ — параметр нелінійності, $\beta = (P/l)$ — параметр дисперсії, a_{\max} — максимальна амплітуда, H — глибина, l — горизонтальний масштаб. Нижні індекси при використаних величинах означають похідну по вказаній у індексі характеристиці.

Унікальністю диференціальних рівнянь Селезова (2), (3) є те, що вони описують дуже загальний випадок руху гравітаційних хвиль на поверхні води за наявності нелінійно-дисперсійних ефектів. Модель Селезова не накладає обмежень на параметр нелінійності α , але параметр дисперсії β передбачається малим, тобто $\beta \ll 1$. При накладанні певних умов із рівнянь Селезова (2), (3) виводяться, як частинні випадки, відомі рівняння Кортевега—де Фріса, Буссінеска, Перегріна, нелінійні рівняння мілкої води та похідні від цих рівнянь.

Рівняння Кортевега—де Фріса

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (4)$$

має універсальний характер і описує багато різноманітних явищ та процесів різної фізичної природи — хвилі на воді, в плазмі, атмосфері, галактиках, надпровідниках, лініях зв'язку і т.п. [6]. Це рівняння є одним з основних рівнянь солітоніки.

Для випадку хвиль на воді рівняння Кортевега—де Фріса можна вивести із рівнянь Селезова (2), (3), якщо параметри нелінійності α та дисперсії β є досить малими, а значення цих параметрів α та β є одного порядку малості.

При розгляді хвиль на воді для випадку усталеного руху (нерухомі в просторі хвилі в нерухомій системі координат) та неусталеного перманентного руху (хвилі переміщення в рухомій системі координат), коли фактор часу виключається із аналізу, розв'язки рівняння Кортевега — де Фріса істотно спрощується. При цьому їх можна представити у такому вигляді:

а) кноїдальні хвилі

$$h = h_1 + (h_g - h_1) \text{cn}^2 \left(\frac{x}{\Delta}, k \right), \quad (5)$$

б) усамітнена хвиля

$$h = h_1 + (h_g - h_1) \text{sch}^2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{3g}{q^2} (h_g - h_1)} \right], \quad (6)$$

де h_g і h_1 — максимальна і мінімальна глибини відповідно, Δ і k — параметри хвиль.

Рівняння Буссінеска

$$\eta_t + ((H + \alpha \eta)u)_x = 0, \quad (7)$$

$$u_t + \eta_x + \alpha uu_x = \beta \frac{H^3}{3} u_{xxx}, \quad (8)$$

описують хвилі, що поширюються одночасно в двох протилежних напрямках — вліво та вправо. Ці рівняння можна отримати із диференціальних рівнянь Селезова (2), (3) для випадку постійної глибини. Необхідно зауважити, що розв'язок (6) рівняння Кортевега — де Фріса, який описує усамітнену хвилю, що рухається вправо, також задовольняє і рівнянням Буссінеска (7), (8).

Рівняння Перегріна

$$\eta_t + ((H + \alpha \eta)u)_x = 0, \quad (9)$$

$$u_t + \eta_x + \alpha uu_x = \beta \frac{H^3}{3} u_{xxx}, \quad (10)$$

описують переміщення гравітаційних хвиль на поверхні води із змінною глибиною. Ці рівняння можна отримати із узагальнених диференціальних рівнянь Селезова (2), (3) для випадку змінної глибини.

Рівняння мілкої води гіперболічного типу

$$\eta_t + ((H + \alpha \eta)u)_x = 0, \quad (11)$$

$$u_t + \eta_x + \alpha uu_x = 0, \quad (12)$$

можна вивести із диференціальних рівнянь Селезова (4), (5) у випадку $\beta \ll \alpha$. При параметрі



нелінійності $\alpha \ll 1$ з рівнянь (11), (12) впливають лінеаризовані рівняння

$$u_t = -\eta x, \quad (13)$$

$$\eta_t = -(hu)_x. \quad (14)$$

З урахуванням позначення $u = \partial\phi / \partial x$, вони зводяться до відомого хвильового рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Рівняння сіп–Гордона в координатах простір–час записують у такому вигляді

$$\phi_u - \phi_{xx} + \sin \phi = 0. \quad (16)$$

Це гіперболічне рівняння і для різних умов має ряд розв'язок, серед яких можна виділити розв'язки усамітненої хвилі підвищення та пониження, кінка та антикінка.

Рівняння Серра [8] використовуються для описання профілю вільної поверхні білякритичних течій з усталеним та перманентним рухом. При виконанні теоретичних і практичних розрахунків широко використовуються два рівняння Серра – одне, виражене через питому енергію E ,

$$h'^2 = \frac{6g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + Eh^2 + C_1 h + \frac{q^2}{2g} \right) \quad (17)$$

та друге, виражене через момент M (функцію імпульсу),

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + C_2 h^2 - Mh + \frac{q^2}{2g} \right). \quad (18)$$

Рівняння Сміслова

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{2}{3} h^3 + Eh^2 - \frac{q^2}{g} \ln h + C_3 \right). \quad (19)$$

виведено практично для тих же умов, що і рівняння Серра (17). Проте воно, на відміну від рівняння Серра, яке враховує нахил і кривизну елементарних струминок в розрахункових перерізах потоку, бере до уваги лише кривизну цих струминок. Внаслідок цього рівняння Серра виявляється точнішим за рівняння Сміслова.

Рівняння Андерсена

$$h'^2 = -2h^3 + 3Eh^2 - 3 \ln h + C_4 \quad (20)$$

записане для значення критичної глибини $h_k = \sqrt[3]{q^2 / g} = 1$. Рівняння Сміслова (19) та Андерсена (20) отримані на основі схожих вихідних умов і при критичній глибині, рівній одиниці, є тотожними. Відповідно з цим рівняння Андерсена (20) має ті ж недоліки, що і рівняння Сміслова (19).

Зазначимо, що у залежностях (17) – (20) коефіцієнти C_1, C_2, C_3, C_4 являють собою константи інтегрування.

Рівняння Хагера–Хуттера [9]

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left[-h^3 + \left(2h_{0+} \frac{q^2}{gh_0^2} - \frac{q^2}{3g} \frac{h_0'^2}{h_0^2} \right) h^2 - \left(h_0^2 + \frac{2q^2}{gh_0} - \frac{2q^2}{3g} \frac{h_0'^2}{h_0} \right) h + \frac{q^2}{g} \right]. \quad (21)$$

записане для характерного перерізу розглядуваних явищ, в якому друга похідна $h'' = 0$.

Рівняння Хагера [10] також записане для характерного перерізу з другою похідною $h'' = 0$ і має такий вигляд:

$$h'^2 = \frac{h_0'^2}{h_0 \Phi} + 3 \left(1 - \frac{h}{h_0 \Phi} \right) \ln \frac{q^2}{2gh_0^3} + 6 \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right) - 6 \left(2 + \frac{h}{h_0 \Phi} \right) lh \frac{h}{h_0} - 3 \left(1 - \frac{h}{h_0 \Phi} \right) \ln \left(\Phi - \frac{h}{n_0} \right), \quad (22)$$

де відношення $\Phi = E_0/h_0$ відповідає енергії E_0 підрахованій для вищезазначеного перерізу за формулою

$$E_0 = h_0 + \frac{q^2}{2gh_0^2} \exp \left(-\frac{h_0'^2}{3} \right). \quad (23)$$

де h_0 – глибина у вказаному перерізі.

Недоліком диференціальних рівнянь (21) і (22) є складність коректної оцінки значень першої похідної у вказаному перерізі. Необхідно підкреслити, що диференціальні рівняння Сміслова (19), Андерсена (20) та Хагера (23), які містять члени з натуральним логарифмом, позбавлені можливості отримати точні аналітичні розв'язки з використанням функцій $sch(x)$ та $cn(z,k)$.

Загальним недоліком диференціальних рівнянь (2)–(4), (7)–(22), використовуваних для описання профілю вільної поверхні білякритичних течій рідини, є невизначеність у явному вигляді граничних умов у їх початковому перерізі, пов'язаних з наявністю чи відсутністю гідростатичного закону розподілу тиску по глибині. З метою усунення цього недоліку в роботі [4] побудована принципово нова математична модель хвилеподібних білякритичних течій, яка враховує можливу наявність нахилу та кривизни елементарних струминок (тобто ступінь відхилення від гідростатики) у початковому перерізі розглядуваних явищ за допомогою коефіцієнтів s_1, k_1, β_1 . В роботі [4] було виведено узагальнене дифе-



ренціальне рівняння профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій, записане у розмірній (24) та безрозмірній (25) формах:

$$h'^2 = \frac{3g}{q^2} \left\{ -h^3 + \left(2\beta_1 h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2} \right) h^2 - \left[(2\beta_1 - 1)h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1} \right] h + \frac{q_2}{g} \right\}, \quad (24)$$

$$h'^2 = \frac{3}{Fr_1} \left[-\eta^3 + (2\beta_1 + Fr_1)\eta^2 - (2\beta_1 - 1 + 2Fr_1)\eta + Fr_1 \right], \quad (25)$$

де $\eta = h/h_1$ – біжуча безрозмірна глибина;

$$Fr_1 = \frac{q^2}{gh_1^3} - \text{число Фруда у перерізі } 1-1.$$

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (24), (25), що описує кноїдальні хвилі, виражається у вигляді наступної системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{h}{h_1} = 1 + (\eta_6 - 1) \operatorname{cn}^2 \left(\frac{x}{\Delta}, k \right), \\ \Delta &= 2h_1 \sqrt{\frac{\eta_6 Fr_1}{3(\eta_6^2 - Fr_1)}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\eta_6(\eta_6 - 1)}{\eta_6^2 - Fr_1}}, \\ \eta_6 &= \frac{1}{2} \left[\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 \right)^2 - 4Fr_1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

де $\eta_6 = h_6/h_1$ – відношення максимальної глибини до мінімальної.

Залежності (24)–(26) враховують можливу наявність нахилу і кривизни елементарних струминок у початковому перерізі білякритичних течій за допомогою коефіцієнтів s_1, k_1, β_1 . У випадку відсутності згаданих нахилу і кривизни елементарних струминок, тобто за наявності гідростатичного розподілу тиску у початковому перерізі розглядуваних явищ, загальний розв'язок (26) зводиться до відомого розв'язку (6) усамітненої хвилі.

Співставлення результатів розрахунків за системою рівнянь (26) з експериментальними даними, виконане для одиничної хвилі, кноїдальних хвиль, усамітненої хвилі, хвилястого стрибка при числах Фруда близьких до одиниці (коли втрати енергії по довжині потоку є незначними), показало їх хорошу збіжність [11, 12].

Висновки.

1. В межах різних типів гідроенергетичних об'єктів за певних умов утворюються білякритичні гідравлічні режими.

2. Диференціальні рівняння (2)–(4), (7)–(22) не враховують можливе відхилення від гідростатичного розподілу тиску по глибині у початковому перерізі білякритичних течій.

3. Для використання в практичних і теоретичних розрахунках рекомендується узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні білякритичних течій (24), (25), яке враховує можливе відхилення від гідростатики у початковому перерізі розглядуваних явищ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рябенко А.А. Типы, особенности и условия существования околоскритических течений // Гидротехническое строительство. – 1992. – № 5. – С. 9 – 13.
2. Riquois R., Ract–Madoux X. Intumescences observe'es sur le canal d'amene'e de la chute d'Oraison lors des rapides de charge. – XI Congress IAHR, V.III. – Leningrad. – 1965. – № 3.53. – 15 p.
3. Заиров Х.И., Листровой П.П. Волны перемещения в Каршинском магистральном канале и способ их гашения // Доклады ВАСХНИЛ. – М.: Колос, 1979. – № 2. – С. 39 – 41.
4. Рябенко О.А. Теоретичні основи і методи розрахунків білякритичних течій рідини з вільною поверхнею. – Дисертація... докт техн. наук: 05.23.16: Рівне, 2003. – 393 с.
5. Селезов И.Т., Рябенко А.А. Поверхностные волны на воде при наличии неоднородностей // Прикладная гидромеханика. – 2012. – 14, № 1. – С. 72–77.
6. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
7. Селезов И.Т. Волновые процессы в гидродинамических и упругих средах // Прикладная гидромеханика. – 2000. – № 4, т. 2 (74). – С. 99–118.
8. Serre F. Contribution a l'ytude des йconlements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche. – 1953. – № 3. – Р. 374 – 388, № 6. – Р. 830 – 872.
9. Hager W.H., Hutter K. On pseudo- uniform flow in open channel hydraulics. Acta Mechanica. – 1984. – Vol. 53. – № 3–4, – Р. 183–200.
10. Hager W.H. Equations for plane, moderately curved open channel flows // Journal of Hydraulic Engineering, ASCE. – 1985. – Vol. 111. – № 3, – Р. 541–546.
11. Рябенко О.А. Профіль вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій та солітонні розв'язки деяких диференціальних рівнянь / Прикладна гідромеханіка. – 1999. – Т. 1. (73), – № 4, – С. 26 – 41.
12. Рябенко О.А. Проблеми і парадокси білякритичних течій рідини // Прикладна гідромеханіка, – 2011. – т. 13 (85). – № 4, – С. 37–51.