

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РОЗРАХУНКУ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ХВИЛЯСТОГО СТИБКА З ВРАХУВАННЯМ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ ТА ЗАТУХАННЯ ХВИЛЬ ПО ДОВЖИНІ

В роботі представлено алгоритми розрахунку профілю вільної поверхні хвилястого стрибка з врахуванням втрат енергії та затухання хвиль по довжині. Результати розрахунків, проведених за наведеними математичними моделями, порівняно з експериментальними даними.

**Ключові слова:** хвилястий стрибок, профіль вільної поверхні, математичні моделі, затухання хвиль, втрати енергії.

Накопичений досвід роботи з безнапірними потоками води, теоретичні і експериментальні дослідження вказують на те, що серед потоків рідини з вільною поверхнею існує досить обширна область білякритичних течій [1, 2]. Характерні прояви білякритичних течій були виявлені при експериментальному і теоретичному вивченні руху води на водозливі з широким порогом, в безнапірних тунелях, галереях, трубах, в нижніх б'єфах низьконапірних водозливних гребель та водоскидів, при управлінні геометричними формами бурхливих потоків та в інших випадках.

Дослідженнями різних вчених було виявлено, що в області білякритичних течій можливе існування ряду особливих явищ, які мають виключно хвилеподібну поверхню. Найбільш поширеним з яких є хвилястий стрибок [2, 3].

Наявність хвилястого стрибка під час роботи гідротехнічних споруд вимагає врахування їх особливостей при проектуванні та експлуатації цих споруд. Особливості хвилястого стрибка у конкретних умовах реальних водогосподарських об'єктів за певних обставин викликають ряд позитивних і негативних наслідків. Спроби уникнути утворення наведеного явища при роботі ГТС не завжди виявляються вдалим, вимагають суттєвих додаткових коштів, а іноді уникнути формування цих режимів взагалі неможливо. Так, тяжкі руйнування водобою спостерігалися на водозливній греблі Вако, був підмитий флютбет гребель Крішна і Сарда, через що остання була зруйнована повністю. Істотні руйнування кріплення нижнього б'єфу та розмиви відвідного русла спостерігалися за регулюючими спорудами осушувальних систем річок Ірпінь,

Здвиж, Остер, Іква [1]. В таких випадках для забезпечення надійного комплексу розв'язку технічних проблем доводиться використовувати гідравлічне і математичне моделювання режимів роботи споруд.

Під час такого моделювання основною проблемою постає побудова профілю вільної поверхні. Для "класичного" опису профілю вільної поверхні хвилястого стрибка використовується поєднання профілів вільної поверхні усамітненої та кноїдальних хвиль (Рис. 1). Ці розв'язки мають ряд недоліків, головним з яких є неврахування втрат енергії та затухання хвиль по довжині розглядуваного явища. Врахування цього фактору потребує дуже складних математичних розрахунків [4].

В роботі наведені математичні алгоритми розрахунку профілю вільної поверхні хвилястого стрибка, що дозволяє врахувати втрати енергії та затухання хвиль по довжині, у всьому діапазоні існування наведеного явища.

Першим способом побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка є метод оснований на диференціальному рівнянні вимушених затухаючих коливань (1) та його часткового розв'язку (2):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (1)$$

$$y = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

де  $y$  – відхилення від нульового рівноважного положення;  $t$  – час;  $b$  – амплітуда відхилення;  $m$  – маса;  $k$  – величина протилежна вектору швидкості,  $A_0 e^{-\beta t}$  – експоненційна затухаюча амплітуда коливань;  $A_0$  – стала, що має сенс початкової амплітуди коливань при  $t = 0$ ;  $\beta = b/(2m)$  – параметр, що характеризує затухання коливань;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклічна частота затухаючих коливань, відмінна від частоти  $\omega_0$  відповідних вільних коливань;  $\varphi_0$  – деяке зрушення фази.

В результаті спрощень та перетворень була отримана наступна математична модель побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка, застосування якої можливе при існуванні негідро-

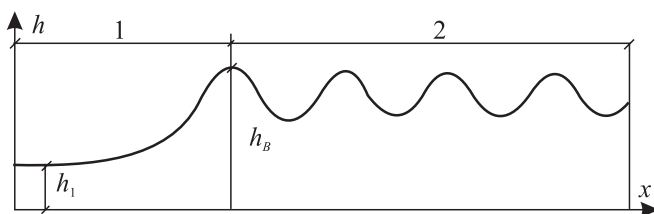


Рис. 1. Схема до побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка: 1 – усамітнена хвиля; 2 – кноїдальні хвилі.



статики в більшості характерних перерізах. Як правило, це справедливо при числах Фруда в початковому перерізі  $Fr_1 \leq 1,8$ .

В межах від початкового перерізу до перерізу, що відповідає глибині під першим гребнем розглядуваного явища, профіль вільної поверхні хвилястого стрибка будується за рівнянням усамітненої хвилі (3):

$$h = h_1 + (h_B - h_1) \operatorname{sch} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3g}{q^2} (h_B - h_1)} \right], \quad (3)$$

де  $h_1$  – глибина в початковому перерізі;  $h_B$  – глибини під гребнем першої хвилі;  $x$  – біжуча абсциса;  $q$  – питома витрата.

Далі за течією профіль вільної поверхні розглядуваного явища розраховується за залежністю, що базується на рівняннях (1–2) та рівнянні профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль:

$$h = h_2 + \left\{ (h_B - h_1) e^{-zx} \operatorname{cn} \left[ 4K(k) \left( \frac{x}{\lambda} \right), k \right] \right\}, \quad (4)$$

де  $h_2$  – друга спряжена глибина;  $\lambda$  – довжина хвилі;  $k$  – модуль еліптичної функції Якобі амплітуди косинуса;  $K(k)$  – повний еліптичний інтеграл першого порядку з модулем  $k$ ;  $z$  – степінь затухання.

Глибина під вершиною гребеня першої хвилі  $h_B$  знаходиться за формулою (5):

$$h_B = \frac{1}{2} h_1 k_{\text{пр}} \left[ \frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \sqrt{\left( \frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 \right)^2 - 4Fr_1} \right] \quad (5)$$

де  $k_{\text{пр}} = 1,05$  – коефіцієнт просторовості;  $s_1$  – коефіцієнт негідростатичності в початковому перерізі.

Згідно [1] другу спряжену глибину  $h_2$  можна розрахувати за залежністю (6):

$$h_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} h_1 \sqrt{\frac{4s_1 - 1}{3} + 2Fr_1} \times \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3\sqrt{3}\alpha_{02} Fr_1}{\sqrt{\left( \frac{4s_1 - 1}{3} + 2Fr_1 \right)^3}} \right] \right\} \quad (6)$$

де  $\alpha_{02}$  – коефіцієнт кількості руху (Буссінеска) в перерізі із другою спряженою глибиною.

Значення довжини хвилі  $\lambda$  можна знайти за наближеною формулою Кеннеді (7):

$$\lambda = 2\pi Fr_1 h_1. \quad (7)$$

В роботі [1] наводиться формула, що дозволяє визначити модуль еліптичної функції Якобі амплітуди косинуса  $k$  (8):

$$k = \sqrt{\eta_B (\eta_B - 1) / (\eta_B^2 - Fr_1)}. \quad (8)$$

Дж. Фентон в статті [5] рекомендує визначити повний еліптичний інтеграл першого порядку  $K(k)$  за залежністю (9):

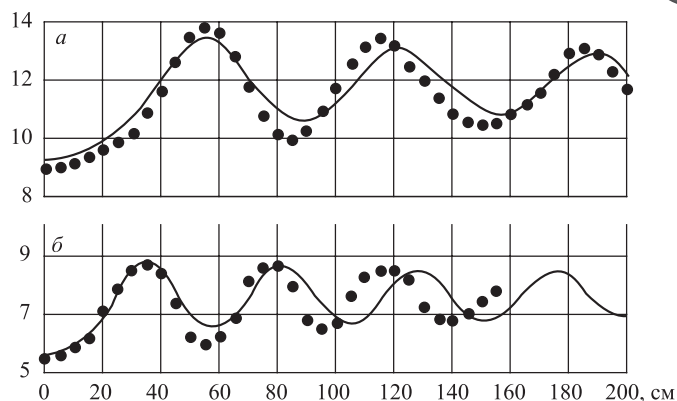


Рис. 2. Порівняння теоретичних даних з експериментальними:  
а)  $Q = 0,092 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $Fr_1 = 1,183$ ,  $h_1 = 0,09 \text{ м}$ ,  $s_1 = 1,045$ ;  
б)  $Q = 0,047 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $Fr_1 = 1,35$ ,  $h_1 = 0,055 \text{ м}$ ,  $s_1 = 1,045$

$$K(k) = \frac{2}{(1+k^{1/4})^2} \ln \frac{2(1+k^{1/4})}{(1-k^{1/4})}. \quad (9)$$

В межах даної роботи ступінь затухання  $z$  буде прийнятий аналогічним, як і в випадку побудови профілю вільних кноїдальних хвиль, що наведений в роботі [6].

Порівняння експериментальних і теоретичних даних (Рис. 2), при існуванні негідростатичного розподілу тиску в більшості характерних перерізах ( $Fr_1 \leq 1,8$ ), показали їх відносно високу збіжність. Невелика розбіжність значень довжини хвилі пояснюється використанням наближеної формули Кеннеді (7).

У випадку гідростатичного розподілу тиску в характерних перерізах хвилястого стрибка ( $Fr_1 > 1,8$ ) доцільно використовувати математичну модель, що враховує параметри затухання  $\zeta_j$  та  $\zeta'_j$ . Профіль усамітненої хвилі можна побудувати за рівнянням (10) від початкового перерізу хвилястого стрибка до гребеня першої хвилі

$$\eta = 1 + (\eta_B - 1) \operatorname{cn}^2(x / \Delta, k), \quad (10)$$

де  $\eta_B = h_B / h_1$  – безрозмірне значення глибини під вершиною гребеня першої хвилі;  $k$  і  $\Delta$  – параметри кноїдальних хвиль.

Безрозмірне значення глибини під вершиною гребеня першої хвилі  $\eta_B$  знаходиться за формулою (11):

$$\eta_B = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{E_1}{h_1} - \frac{h_w}{h_1} \right) + \sqrt{4 \left( \frac{E_1}{h_1} - \frac{h_w}{h_1} \right)^2 - 3 \left( 2 \frac{E_1}{h_1} + Fr_1 - 1 \right)} \right] \quad (11)$$

$E_1$  – питома енергія в початковому перерізі,  $h_w$  – значення втрат енергії в початковому перерізі хвилястого стрибка [7]:

Після першої хвилі в рівнянні (10) проходить зміна вихідних параметрів кноїдальних хвиль та будують їх профіль від гребеня першої хвилі до точки зміни кривизни потоку другої хвилі. Враховуючи параметри затухання хвиль, порохованих за залежностями (12)–(15) перераховують рівняння (10) та будують профіль другої кноїдальної хвилі. Розраху-

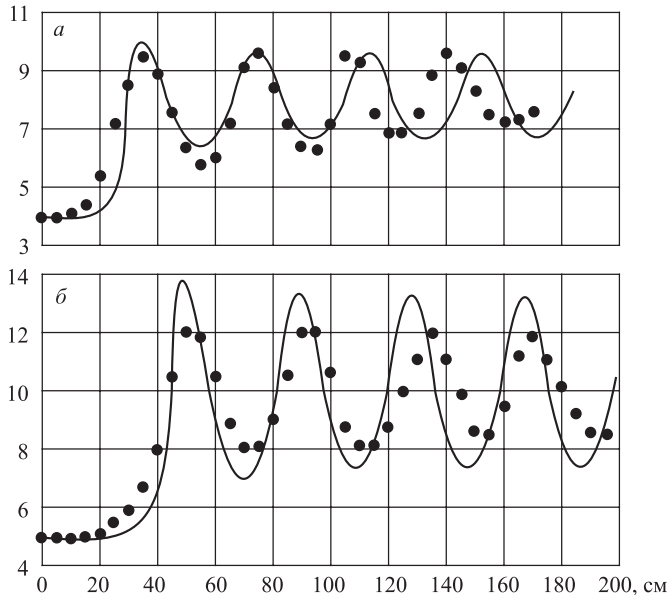


Рис. 3. Порівняння теоретичних даних з експериментальними:  
 а)  $Q = 0,042 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $Fr_1 = 3,28$ ,  $h_1 = 0,038 \text{ м}$ ;  
 б)  $Q = 0,057 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $Fr_1 = 2,99$ ,  $h_1 = 0,048 \text{ м}$

нок продовжують до повного затухання хвиль.

Згідно [8] параметри затухання хвиль  $\zeta_j$  та  $\zeta'_j$  можна визначити за формулами:

$$\zeta_j = \zeta_0 \exp [2(j - 1) \ln \sqrt{Fr_2}],$$

$$\zeta'_j = \zeta'_0 \exp [2(j - 1) \ln \sqrt{Fr_2}], \quad (12)$$

де  $j = 0, 1, 2, \dots$  – порядковий номер наступних гребенів та підшови хвиль.  $\zeta_0$  – відстань від вершини першого гребеня до другої спряженої глибини:

$$\zeta_0 = h_B - h_2, \quad (14)$$

$\zeta'_0$  – відстань від другої спряженої глибини до підшови хвилі:

$$\zeta'_0 = h_2 - h_{II}, \quad (15)$$

де  $h_{II}$  – глибина під підшовою першої хвилі.

Порівняння експериментальних і теоретичних даних (Рис. 3), при існуванні гідростатичного розподілу тиску в більшості характерних перерізах ( $Fr_1 > 1,8$ ), показали їх відносно високу збіжність, хоча є невелике відхилення значення теоретичної довжини хвилі від експериментальних значень.

### Висновки

1. Наявність хвилястого стрибка в межах гідротехнічних та гідроенергетичних споруд призводить до ряду позитивних і негативних наслідків. Тому питання про знаходження основних параметрів цього явища, в тому числі і профілю вільної поверхні, є надзвичайно актуальним.

2. Наведені математичні алгоритми дозволяють побудувати профіль вільної поверхні хвилястого стрибка, що враховують втрати енергії та затухання хвиль по довжині, у всьому діапазоні існування наведеного явища.

Порівняння експериментальних та теоретичних профілів вільної поверхні хвилястого стрибка показали їх відносно високу збіжність. Це свідчить, що наведені математичні моделі є вірними.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Рябенко О.А. Форми вільної поверхні та умови існування гідродинамічного солітону, самотньої, одиночної і кноїдальних хвиль// Прикладна гідромеханіка. – 2007. – Том 9. – С. 66–80.
2. Castro-Orgaz O., Roldan Canas J., Dolz Ripolles J. Resalto Hidraulico Ondulatorio. Ingenier?adel Agua, 19.2, 2015. – P. 63–64.
3. Riabenko A.A., Chernyuk V.V., Klyuha O.A., Halych O.A., Poplavskiy D.M. Mathematical and hydraulic modelling of undular jump. Czasopismo In?ynierii?dowej, ?rodowiska i architektury. Journal of civil engineering, environment and architecture, t. XXXII, z. 62 (3/II/15), lipiec-wrzesie? 2015. – S. 379–391.
4. Рябенко А.А., Галич О.А., Поплавський Д.М. Использование дифференциальных уравнений для расчетов профиля свободной поверхности волнистого прыжка// Гидроинженерия. Грузия, Тбилиси: издательский дом "Технический Университет". – №1-2(15–16). – 2013. – 36–45.
5. Fenton J.D. The Cnoidal Theory of Water Waves// Developments in off shore engineering. Wave Phenomena and Offshore Topics. Ed. J.B. Herbich, Gulf: Houston. – 1998. – S. 55–98.
6. Рябенко О.А., Клюха О.О., Галич О.О., Поплавський Д.М. Використання диференціального рівняння затухаючих вимушених коливань при побудові профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль// Гідроенергетика України, – К.; – 2016. №1–2. – С. 55–58.
7. Турсунов А.А. Околокритическое состояние безнапорных потоков воды/ Изв. ВНИИГ. – 1969. – Т. 90. – С. 201–224.
8. Гидравлические расчеты конструкций, управляющих бурными потоками. Рекомендации для проектирования. Под общей редакцией Ф.Г. Гунько. "Энергия" Ленинградское отд. – 1974. – 110 с.

© Рябенко О.А., Клюха О.О., Галич О.О., Поплавський Д.М., 2018

