

## ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ТРУБОПРОВОДУ С УДАРАМИ ОБ ОБЕ СТЕНКИ

Розглянуто двомірну задачу про періодичний рух в потоці газу вздовж горизонтального каналу часток з обертанням, що стикаються по черзі з обома його стінками. Розглянуто удар з просковзуванням та без просковзування. На площині параметрів "коефіцієнт відновлення при ударі - коефіцієнт тертя" одержано зони існування різних періодичних режимів. Лл. 7. Бібліогр.: 9 найм.

Значительный интерес к пневмотранспортным системам обусловил проведение многочисленных исследований двухфазных потоков «газ - твердые частицы» в горизонтальных трубопроводах, одной из главных задач которых является выявление закономерностей движения частиц дисперсной фазы. Результаты ряда авторов [ 1, 4, 9 ] показывают, что в зависимости от соотношений между параметрами компонент потока возможны различные режимы движения частиц, в частности, их движение с последовательными ударами о нижнюю и верхнюю стенки трубопровода. В [ 4 ] рассмотрен вариант приближенного описания периодического режима указанного вида, основным параметром взято время между ударами и предложено, однако без достаточного обоснования, выражение для этого параметра.

В данной работе на основе приближенного интегрирования дифференциальных уравнений движения вращающихся частиц между стенками, приведения их, а также условий переключения совместно с условиями периодичности к системе нелинейных алгебраических уравнений получено решение задачи о периодических режимах движения частиц в потоке газа по горизонтальному каналу.

1. Исходные соотношения.

При пневмотранспортировании для основной длины канала объемная концентрация частиц  $\alpha_2 < 0,05$  [ 7, 8, 9 ], поэтому пренебрегаем

столкновениями частиц между собой. Полагаем скорость ( $u$ ) и плотность ( $\rho_1$ ) газа постоянной по высоте ( $H$ ) и длине канала в пределах периода движения. Рассмотрим в рамках плоской задачи движение со скоростью  $v$  сферической частицы радиуса  $a$  из материала плотностью  $\rho_2$  в горизонтальном потоке газа под действием аэродинамической силы  $F_a = C_\mu \pi a^2 \rho_1 [(u - v)^2] / 2$  [2] (при пневмотранспортировании  $Re > 10^3$  и  $C_\mu = 0,5$ ), силы тяжести  $mg$  и силы Магнуса - Жуковского  $F_{М.ж} = 8 \pi a^2 \rho_1 \omega (u - v) / 3$  [6] (влиянием  $v_y = \dot{y}$  на  $F_a$  и  $F_{М.ж}$  пренебрегаем), где  $\omega$  - угловая скорость,  $m = 4\pi a^3 \rho_2 / 3$  - масса частицы. В соответствии с выражениями для  $F_a$ ,  $F_{М.ж}$  и рис. 1а уравнения движения частицы между стенками имеют вид:

$$\begin{aligned} dv_x / dt &= 3 C_\mu \rho_1 [(u - v_x)^2] / 8a \rho_2; \\ dv_y / dt &= d^2 y / dt^2 = -g - 2 \rho_1 \omega (u - v_x) / \rho_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Процессы при ударе частицы о стенки канала описываются следующими соотношениями [3, 5]

$$v_x^+ = v_x^- + S_x / m; \quad v_y^+ = v_y^- + S_y / m; \quad \omega^+ = \omega^- + M_C(S_x) / m \rho_c^2; \quad (1.2)$$

$$S_x^+ = R S_x^- \quad (\text{гипотеза Ньютона}); \quad S_y^+ = S_y^- + S_y^*; \quad S_y^- = -m v_y^-; \quad (1.3)$$

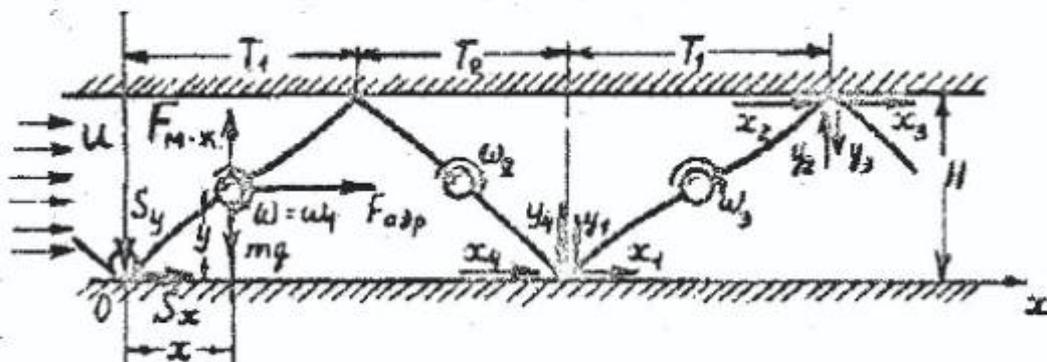


Рис. 1а.

$$S_x^* = -f | S_y | \text{sign } V_x^- \quad (\text{закон Кулона}) - \text{удар с проскальзыванием}; \quad (1.4)$$

$$V_x^+ = 0 - \text{удар без проскальзывания}; \quad (1.5)$$

$$V_x^- = v_x^- - a \omega^- \text{sign } v_y^-; \quad V_x^+ = v_x^+ - a \omega^+ \text{sign } v_y^+; \quad (1.6)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $S_x$ ,  $S_y$  - проекции скорости центра масс частицы и ударного импульса на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ;  $M_C(S_x) = -S_x a \text{sign } v_y^-$  - момент ударного импульса относительно центра масс;  $\rho_c = a \sqrt{2/5}$  - радиус инерции частицы;  $V_x$  - касательная составляющая скорости точки контакта на частице; индексы «+», «-» при  $v$ ,  $V_x$ ,  $\omega$ ,  $S_y$  обозначают до- и

послеударные значения скоростей и импульсов;  $R$  - коэффициент восстановления при ударе;  $f$  - коэффициент ударного трения;  $g$  - ускорение силы тяжести. Далее полагаем между стенками  $\omega = \text{const}$ , а поскольку при этом частица разгоняется, то  $v_x^- > a|\omega^-|$  и при любых сочетаниях знаков  $\omega^-, v_y^-$  справедливо соотношение

$$V_x^- = v_x^- - a\omega^- \text{sign } v_y^- > 0. \quad (1.7)$$

Из (1.3) и второй формулы (1.2) находим

$$S_y = -(1+R)mv_y^-; v_y^+ = -Rv_y^-. \quad (1.8)$$

Исключая  $S_y, V_x^-, V_x^+$  из выражений (1.2), (1.8), (1.6) и (1.4) или (1.5) с учетом (1.7), находим горизонтальный импульс и условия переключения для удара с проскальзыванием

$$S_x = -f(1+R)m|v_y^-|; \quad (1.9)$$

$$v_x^+ = v_x^- = -f(1+R)|v_y^-|; \quad \omega^+ = \omega^- + 5f(1+R)v_y^-/2a \quad (1.10)$$

и аналогично для удара без проскальзывания

$$S_x = -2m(v_x^- - a\omega^- \text{sign } v_y^-)/7 = -2mV_x^-/7; \quad (1.11)$$

$$v_x^+ = (5v_x^- + 2a\omega^- \text{sign } v_y^-)/7; \quad \omega^+ = (2\omega^- + 5v_x^- \text{sign } v_y^-/a)/7. \quad (1.12)$$

Условия переключения (1.10), (1.12) позволяют сделать некоторые общие заключения. Из (1.10) записываем для проскальзывания

$$\Delta v_x / v_x^- = -0,4a|\Delta\omega| / v_x^- = -f(1+R)/k_\alpha. \quad (1.13)$$

Из (1.12) для непроскальзывания находим

$$\Delta v_x / v_x^- = -0,4a|\Delta\omega| / v_x^- = -2(1+a|\omega^-|/v_x^-)/7 \quad (1.14)$$

где  $\Delta v_x = v_x^+ - v_x^-$ ;  $\Delta\omega = \omega^+ - \omega^-$ ;  $k_\alpha = v_x^- / |v_y^-| = \text{tg } \alpha$ ,  $\alpha$  - угол между  $\vec{v}^-$  и нормалью к стенке канала. Из (1.14) следует для непроскальзывания

$$2/7 \leq |\Delta v_x| / v_x^- < 4/7; \quad 5/7 \leq a|\Delta\omega| / v_x^- < 10/7, \quad (1.15)$$

где нижний предел соответствует начальному этапу движения частиц без вращения ( $\omega^- = 0$ ), а верхний - очень короткому промежутку времени между ударами ( $a|\omega^-| \approx v_x^-$ ). Из (1.15), (1.13) и рис. 1б следует, что относительные потери горизонтальной компоненты  $v_x$  скорости частиц имеют наибольшее значение при ударах без проскальзывания и резко убывают в случае проскальзывания при возрастании  $\alpha$ , т.е. при



$$v_{y, i+1}(0) = -R v_{y, i}(T_i), \quad (2.3)$$

где  $t = 0$  соответствует началу  $i$ -го этапа, а  $t = T_i$  - концу его.

Условия периодичности имеют вид

$$v_{x, i+2}(0) = v_{x, i}(0) \equiv v_{x0}; \quad v_{y, i+2}(0) = v_{y, i}(0) \equiv v_{y0}; \quad \omega_{i+2} = \omega_i. \quad (2.4)$$

Уравнения (1.1) в безразмерном виде записываются так

$$d\tilde{v}_x / d\tilde{t} = \varepsilon (1 - \tilde{v}_x)^2; \quad (2.5)$$

$$d\tilde{v}_y / d\tilde{t} = d^2\tilde{y} / d\tilde{t}^2 = -g - \tilde{\omega} (1 - \tilde{v}_x), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x = v_x / u; \quad \tilde{v}_y = v_y / u; \quad \tilde{\omega} = 2H\rho_1\omega / u\rho_2; \quad \tilde{t} = ut / H; \\ \tilde{y} = y / H; \quad \varepsilon = 3C_\mu H\rho_1 / 8a\rho_2 \sim 10^{-2}; \quad \tilde{g} = Hg / u^2 = Fr^{-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнения полета частицы (2.5), (2.6) легко интегрируются, однако результирующие выражения содержат  $\ln$ , что при совместном рассмотрении их с условиями (2.1) - (2.4) приводит к системе трансцендентных уравнений. Исходя из необходимости решить данную задачу в замкнутой форме, выполним приближенное интегрирование системы (2.5), (2.6). Поскольку полученная после интегрирования (2.5) зависимость  $\tilde{v}_x = 1 - (1 - \tilde{v}_{x0}) / [\varepsilon (1 - \tilde{v}_{x0}) \tilde{t} + 1]$  при значениях параметров соответствующих процессу пневмотранспортирования весьма близка к линейной, то для  $i$ -го этапа аппроксимируем ее выражением

$$\tilde{v}_{xi} = [\tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) - \tilde{v}_{xi}(0)] \tilde{t} / \tilde{T}_i + \tilde{v}_{xi}(0) \quad (2.8)$$

и потребуем, чтобы уравнения (2.5), (2.6) удовлетворялись интегрально за время  $\tilde{T}_1$  и  $\tilde{T}_2$ . Подставляя (2.8) в (2.5), умножаем обе части на  $d\tilde{t}$  и интегрируя в пределах от 0 до  $\tilde{T}_i$  для  $\tilde{t}$  и от  $\tilde{v}_{xi}(0)$  до  $\tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i)$  для  $\tilde{v}_x$ , записываем

$$\begin{aligned} [\tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) - \tilde{v}_{xi}(0)] / \varepsilon \tilde{T}_i = 1 - \tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) - \tilde{v}_{xi}(0) + \\ + \tilde{v}_{xi}(0) \tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) + [(\tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) - \tilde{v}_{xi}(0))^2] / 3 \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогично из уравнения (2.6) после первого, а затем второго интегрирования в пределах от 0 до  $\tilde{T}_i$  для  $\tilde{t}$ , от  $\tilde{v}_{yi}(0)$  до  $\tilde{v}_{yi}(\tilde{T}_i)$  для  $\tilde{v}_y$  и от 0 до 1 для  $\tilde{y}$  соответственно получаем

$$\begin{aligned} [\tilde{v}_{yi}(\tilde{T}_i) - \tilde{v}_{yi}(0)] / \tilde{T}_i = -\tilde{g} - \tilde{\omega}_i + \\ + 0,5 \tilde{\omega}_i [\tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) + \tilde{v}_{xi}(0)]; \\ (-1)^{i+1} = \tilde{v}_{yi}(0) \tilde{T}_i - 0,5 \tilde{T}_i^2 \{ \tilde{g} + \tilde{\omega}_i [1 - (2 \tilde{v}_{xi}(0) + \end{aligned}$$

$$+ \tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i) / 3 ] \} \quad (i=1, 2). \quad (2.10)$$

Далее вводятся обозначения

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &\equiv \tilde{v}_{xi}(0); & x_{2i} &\equiv \tilde{v}_{xi}(\tilde{T}_i); \\ y_{2i-1} &\equiv \tilde{v}_{yi}(0); & y_{2i} &\equiv \tilde{v}_{yi}(\tilde{T}_i); \end{aligned} \quad (2.11)$$

при использовании которых уравнения (2.9), (2.10) приводятся к виду

$$\begin{aligned} (x_{2i} - x_{2i-1}) / \varepsilon_i \tilde{T}_i &= 1 - (x_{2i} + x_{2i-1}) + x_{2i} x_{2i-1} + [(x_{2i} - x_{2i-1})^2] / 3; \\ (y_{2i} - y_{2i-1}) / \tilde{T}_i &= -\tilde{g} - \tilde{\omega}_i [1 - (x_{2i} + x_{2i-1}) / 2]; \\ (-1)^{i+1} / T_i &= (y_{2i} + y_{2i-1}) / 2 + (x_{2i} - x_{2i-1}) (y_{2i} - \\ - y_{2i-1}) \tilde{\omega}_i / 12 [\tilde{g} + \tilde{\omega}_i (1 - (x_{2i} + x_{2i-1}) / 2)] \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и далее индексы  $x$  и  $y$  обозначают номер компоненты скорости до и после удара в порядке движения (см. рис. 1а). Условия переключения (2.1) - (2.3) с учетом условий периодичности (2.4) и обозначений (2.7), (2.11) принимают вид: для вертикальной компоненты скорости

$$y_3 = -R y_2; \quad y_1 = -R y_4; \quad (2.13)$$

для остальных параметров движения при проскальзывании -

$$x_3 = x_2 - k y_2; \quad x_1 = x_4 + k y_4; \quad (2.14)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1 + \Lambda y_2; \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 + \Lambda y_4; \quad (2.15)$$

и при непроскальзывании -

$$x_3 = (5 x_2 + \tilde{\omega}_1 / M) / 7; \quad x_1 = (5 x_4 - \tilde{\omega}_2 / M) / 7; \quad (2.16)$$

$$\tilde{\omega}_2 = (2 \tilde{\omega}_1 + 10 M x_2) / 7; \quad \tilde{\omega}_1 = (2 \tilde{\omega}_2 - 10 M x_4) / 7; \quad (2.17)$$

где

$$k = f(1 + R); \quad M = H \rho_1 / a \rho_2; \quad \Lambda = 5 k M. \quad (2.18)$$

Рассмотрим движение при ударах с проскальзыванием. Исключая из (2.12), (2.13) - (2.15) переменные  $y_1, y_3, y_4$  и вводя обозначения

$$z_1 \equiv (x_1 + x_2) / 2; \quad z_2 \equiv (x_2 - x_1) / 2 \quad (0 < z_1, z_2 < 1) \quad (2.19)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 2 z_2 / \varepsilon \tilde{T}_1 &= (1 - z_1)^2 + z_2^2 / 3; \\ \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1 &= \Lambda y_2; \\ 2 (k y_2 - z_2) / \varepsilon \tilde{T}_2 &= (1 - z_1)^2 + [(k y_2 - z_2)^2] / 3; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} (1-R)y_2 / \tilde{T}_1 &= -\tilde{g} - \tilde{\omega}_1(1-z_1); \\ (1-R)y_2 / \tilde{T}_2 &= \tilde{g} + \tilde{\omega}_2(1-z_1); \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} 1 / \tilde{T}_1 &= \{1+R+(1-R)z_2 \tilde{\omega}_1 / 3 [\tilde{g} + \tilde{\omega}_1(1-z_1)]\} y_2 / 2; \\ 1 / \tilde{T}_2 &= \{1+R+(1-R)(ky_2-z_2) \tilde{\omega}_2 / 3 [\tilde{g} + \tilde{\omega}_2(1-z_1)]\} y_2 / 2; \end{aligned} \quad (2.22)$$

Исключая из ( 2.20 ), ( 2.21 ) переменные  $\tilde{T}_1$ ,  $\tilde{T}_2$ ,  $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_2$ , опуская тривиальное решение  $y_2 = 0$  и вводя обозначения

$$p \equiv z_2 / y_2 > 0; \quad q \equiv (1-z_1) / y_2 > 0, \quad (2.23)$$

находим первое определяющее уравнение

$$q^2 - 160 p(k-p)q / 3(1-R) + p(k-p) / 3 = 0. \quad (2.24)$$

Исключая те же переменные из ( 2.20 ), ( 2.22 ) при использовании ( 2.21 ) и ( 2.23 ), получаем второе определяющее уравнение.

$$\begin{aligned} q = 3(1-R) \{ 2\Lambda^2 p(k-p)(k^2 - 3kp + 3p^2) + (1- \\ - R)^2 k[\Lambda p(k-p) - \varepsilon(1+R + \varepsilon k/3)((k- \\ - 2p)^2) / 2] \} / \{ 12\Lambda^2 p(k-p)(k^2 - 3kp + 3p^2) - \\ - \varepsilon(1-R)^2 k[2\varepsilon k(k-2p)^2 + 3(1+R)((k-p)^2 + p^2)] \}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Рассмотрим движение при ударах без проскальзывания. Исключая из ( 2.12 ), ( 2.13 ), ( 2.16 ), ( 2.17 ) переменные  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_2$ ,  $\tilde{T}_1$ ,  $\tilde{T}_2$  при использовании обозначений ( 2.19 ) и  $z_3 \equiv 4z_1 / 7 - z_2$  получаем систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned} 9M [(1-z_1)^2 + z_2^2 / 3] / 1024 z_2 + z_2^2(z_2-z_1) / 3[(1-z_1)^2 + z_2^2 / 3] + \\ + \{ (1+R^2) [\tilde{g} / 2M + (z_2-z_1)(1-z_1)] z_2 / [(1-z_1)^2 + z_2^2 / 3] - \\ - 2[\tilde{g} / 2M + (z_1-z_3)(1-z_1)] z_3 / [(1-z_1)^2 + z_3^2 / 3] \} / (1-R^2) = 0; \\ 9M [(1-z_1)^2 + z_3^2 / 3] / 1024 z_3 + z_3^2(z_3-z_1) / 3[(1-z_1)^2 + z_3^2 / 3] + \\ + \{ 2R [\tilde{g} / 2M + (z_2-z_1)(1-z_1)] z_2 / [(1-z_1)^2 + z_2^2 / 3] - \\ - (1+R^2) [\tilde{g} / 2M + (z_1-z_3)(1-z_1)] z_3 / [(1-z_1)^2 + \\ + z_3^2 / 3] \} / (1-R^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Рассмотрим смешанный периодический режим движения. Поскольку за счет силы тяжести вертикальная компонента

ударного импульса на нижней стенке всегда больше, чем на верхней, то выход вектора ударного импульса за пределы конуса трения и следовательно появление проскальзывания при ударе возможно в первую очередь на верхней стенке канала. Рассматривая совместно ( 2.12 ), ( 2.13 ), левые формулы в ( 2.14 ) и ( 2.15 ) ( верх - скольжение), правые формулы в ( 2.16 и ( 2.17 ) ( низ - без проскальзывания) при использовании ( 2.19 ), после исключения переменных  $x_3, x_4, y_1, y_3, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  получаем систему определяющих уравнений смешанного режима:

$$\begin{aligned} (y_2 - R y_4) / \tilde{T}_1 + 2 M z_2 (z_1 - z_2) / 3 - 2 / \tilde{T}_1^2 = 0; \\ (R y_2 - y_4) / \tilde{T}_2 - 2 / \tilde{T}_2^2 + M (k y_2 - z_2) [ 5 k y_2 - 2 (z_1 - z_2) ] / 3 = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} 1 / \tilde{T}_1 = 3 M [(1 - z_1)^2 + z_2^2 / 3] / 32 z_2; \quad y_2 = 1 / \tilde{T}_1 + [ 2 M (z_1 - z_2) (1 - \\ - z_1 - z_2 / 3) - \tilde{g} ] \tilde{T}_1 / 2; \quad 1 / \tilde{T}_2 = 3 M [(1 - z_1)^2 + ((k y_2 - \\ - z_2)^2) / 3] / 32 (k y_2 - z_2); \\ y_4 = \{ M [ 2 (z_1 - z_2) - 5 k y_2 ] (1 - z_1) - \tilde{g} \} \tilde{T}_2 - R y_2. \end{aligned}$$

3. Решение определяющих уравнений. Области существования различных режимов движения.

Исключая из первых уравнений ( 2.20 ) - ( 2.22 ) переменные  $\tilde{T}_1, \tilde{\omega}_1$  при использовании ( 2.23 ) записываем

$$y_2 = [ 2 \tilde{g} p / 3 \epsilon q \{ 3 \epsilon ( q^2 / p + p / 3 ) - [ 3 ( 1 + R ) + ( 1 - R ) p / q ] \} ( q^2 / p + p / 3 ) ]^{1/2}. \quad (3.1)$$

Действительное значение  $y_2$  существует, если в ( 3.1 )  $\{ \dots \} > 0$  или когда

$$p^2 + 3 ( 1 + R ) q p / ( 1 - R - \epsilon q ) - 3 \epsilon q^3 / ( 1 - R - \epsilon q ) < 0. \quad (3.2)$$

Определяя корни  $p_{\pm}$  квадратного трехчлена в левой части ( 3.2 ), учитываем при разложении радикала в ряд, что  $\epsilon$  - малый параметр, отбрасывая  $p < 0$ , приводим ( 3.2 ) к условию  $p < p_+ = \epsilon q^2 / ( 1 + R )$ , из сравнения которого с  $\{ \dots \} > 0$  в ( 3.1 ) убеждаемся, что это возможно при

$$p \ll q. \quad (3.3)$$

С учетом ( 3.3 ) выражение ( 3.1 ) приближенно записывается в виде

$$y_2 = \sqrt{2\tilde{g}p^3 / 9 \epsilon q^3 [\epsilon q^2 - (1+R)p]}. \quad (3.4)$$

Введением переменной

$$\bar{p} = (k/2 - p)^2 / k^2 \quad (> 0) \quad (3.5)$$

приводим уравнение ( 2.24 ) к виду

$$q^2 - 160 k^2 (1/4 - \bar{p}) q / 3 (1-R) + k^2 (1/4 - \bar{p}) / 3 = 0 \quad (3.6)$$

или

$$\bar{p} = 1/4 - 3 q^2 (1-R) / k^2 (160 q - 1 + R) \quad (3.7)$$

(см. кривая  $q_1$  на рис. 2 б )

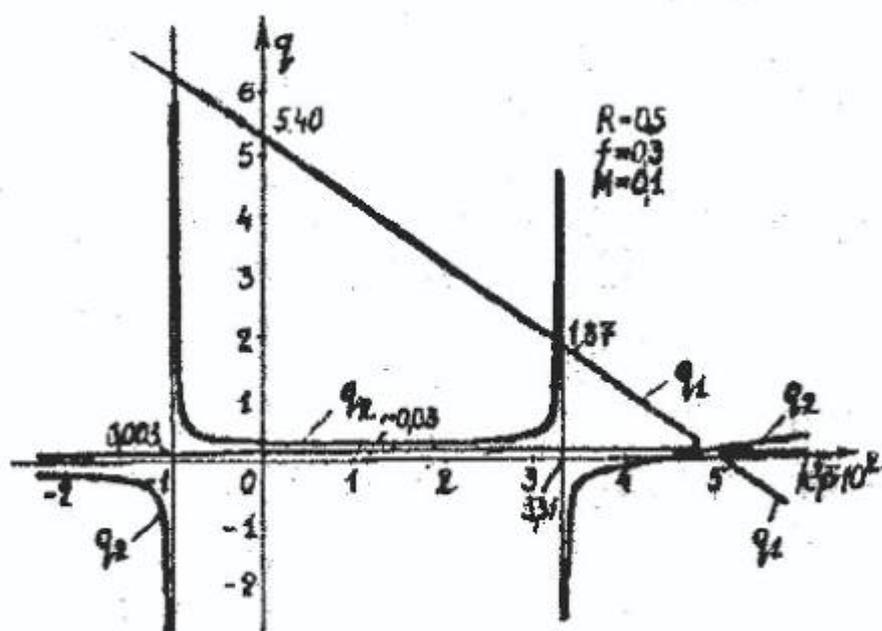


Рис. 2 б

Пренебрегая  $-1 + R$  по сравнению с  $160 q$  в ( 3.7 ) из совместного рассмотрения ( 3.7 ), ( 3.3 ), ( 3.5 ), убеждаемся, что

$$\bar{p} \ll 1/4. \quad (3.8)$$

Решая относительно  $q$  (приближенно с разложением радикала в ряд при учете ( 3.8 )) уравнение ( 3.6) получаем

$$q^- = (1-R)/160; \quad q^+ = 160 k^2 (1/4 - p) / 3(1-R) \quad (\equiv q_1) \quad (3.9)$$

Из ( 3.5 ) находим

$$p = k(1/2 \pm \sqrt{\bar{p}}) \quad (3.10)$$

и, учитывая ( 3.8 ), записываем  $p_{cp} \approx k / 2 = f (1 + R) / 2$ . Как видно  $q^-$  и  $p_{cp}$  не удовлетворяют условию ( 3.3 ), поэтому далее как результат упрощения первого определяющего уравнения ( 2.24 ) используется  $q_1 = q^+$ . С помощью ( 3.5 ) и при пренебрежении  $f M / 4$  по сравнению с единицей после преобразований записываем ( 2.25 ) в виде (см.  $q_2$  на рис. 2 б)

$$q = (1 - R) [3 + (80f + 3)L(1/4 - \bar{p}) / (\bar{p} - \bar{p}_+) (\bar{p} - \bar{p}_-)] / 480 \quad (\equiv q_2) \quad (3.11)$$

где 
$$L = [(1 - R) / (1 + R)]^2 / 800 M f^3; \quad (3.12)$$

$$\bar{p}_{\pm} = [1/6 - L \pm \sqrt{(1/6 - L)^2 + 1/12 - L}] / 2. \quad (3.13)$$

Величина  $\bar{p}_{\pm}$  в ( 3.13 ) действительна, если  $(1/6 - L)^2 + 1/12 - L \geq 0$ , т.е.

$$0 < L \leq L_- = (2 - \sqrt{3}) / 3 = 0,0893 \quad (3.14)$$

( $L \geq L_+ = (2 + \sqrt{3}) / 3$  соответствует  $\bar{p}_{\pm} < 0$ , что как следует из ( 3.5 ) невозможно). В диапазоне  $0 < \bar{p} < 1/4$  ( он определяется условием  $q = q_1 > 0$  из ( 3.9 ) и ( 3.5 )), кроме точек разрыва  $q_2(\bar{p})$ , переменные имеют следующий порядок:  $q_1 \sim 10$ ,  $q_2 \sim 10^{-2}$  и, следовательно, правые части уравнений ( 3.9 ) для  $q_1$  и ( 3.11 ) могут быть равны лишь в малой окрестности точек разрыва  $q_2(\bar{p})$  при значениях  $\bar{p} \approx \bar{p}_{\pm}$ , которые и будут корнями системы ( 3.9 ) для  $q_1$  и ( 3.11 ) (см.рис. 2б). Из ( 3.10 ) и ( 3.13 ) находим (см.рис. 2а)

$$\bar{p}_{\pm\pm} \equiv p/k = [1 \pm \sqrt{2} \sqrt{1/6 - L \pm \sqrt{(1/6 - L)^2 + 1/12 - L}}] / 2 \quad (3.15)$$

Подставляя ( 3.5 ) в  $q_1$  из ( 3.9 ) и учитывая обозначение в левой части ( 3.15 ), получаем

$$q = 160 k^2 \bar{p} (1 - \bar{p}) / 3 (1 - R). \quad (3.16)$$

С учетом ( 3.16 ) выражение ( 3.4 ) записывается в виде

$$y_2 = S_1 \sqrt{15 (1 - R) \bar{g} / f (1 + R)^3} / 40. \quad (3.17)$$

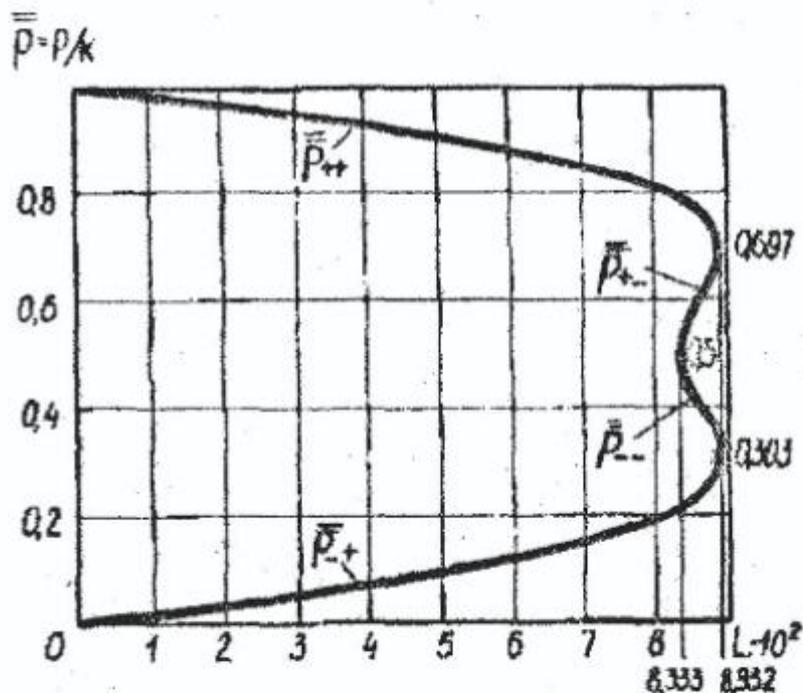


Рис. 2а

где  $S_1 = S_1(L) = L / \sqrt{\bar{p} (1 - \bar{p})^3 [\bar{p} (1 - \bar{p})^2 - 1,5 L]}$ . Используя для  $S_1(L)$  в диапазоне  $0,05 < L < 0,0893$  аппроксимацию по методу наименьших квадратов зависимостью  $S_1(L) = a_1 L^{-3/2}$ , где  $a_1 = 0,0758$ , (отклонение 5%) с учетом (3.12), (2.18),

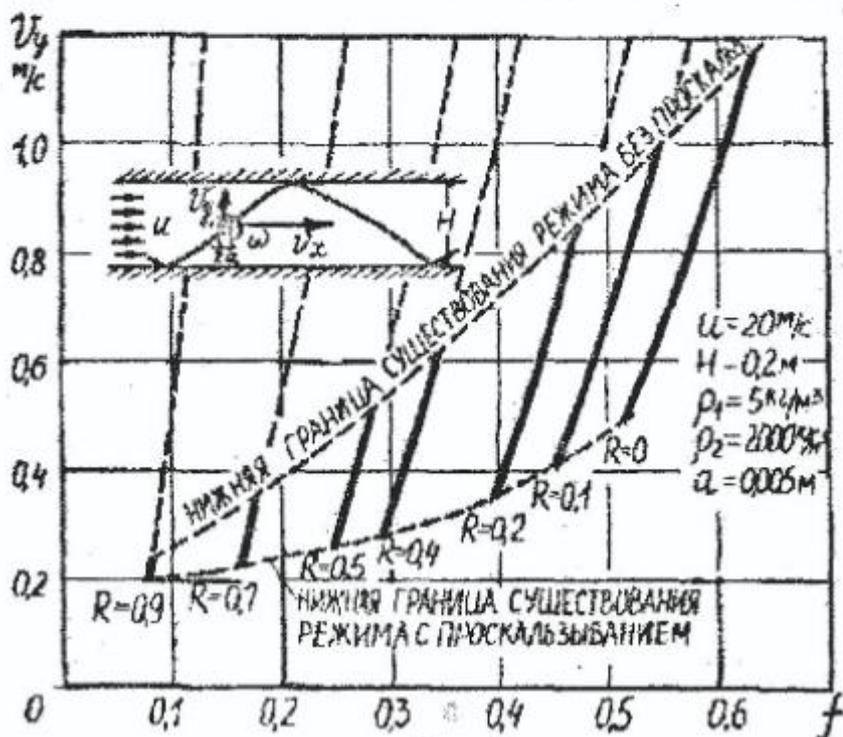


Рис. 3а

( 2.11 ), ( 2.7 ) получаем для движения при ударах с проскальзыванием

$$v_{y,2} = 166 (\rho_1 / a \rho_2)^{3/2} H^2 f^4 ((1+R)/(1-R))^2 \sqrt{g/(1-R^2)}. \quad (3.18)$$

График  $v_{y,2}(f)$  см. на рис. 3а. Остальные неизвестные кинематические параметры определяются с помощью ( 2.23 ), ( 2.19 ), ( 3.18 ) и уравнений ( 2.20 ) - ( 2.22 ). Численное решение системы определяющих уравнений ( 2.24 ), ( 2.25 ), которое проведено итерационным методом Ньютона-Рафсона, и приближенное решение ( 3.18 ) показывают удовлетворительное совпадение для рассмотренного диапазона. Аналогично проведено численное решение системы ( 2.26 ), ( 2.27 ) для режимов

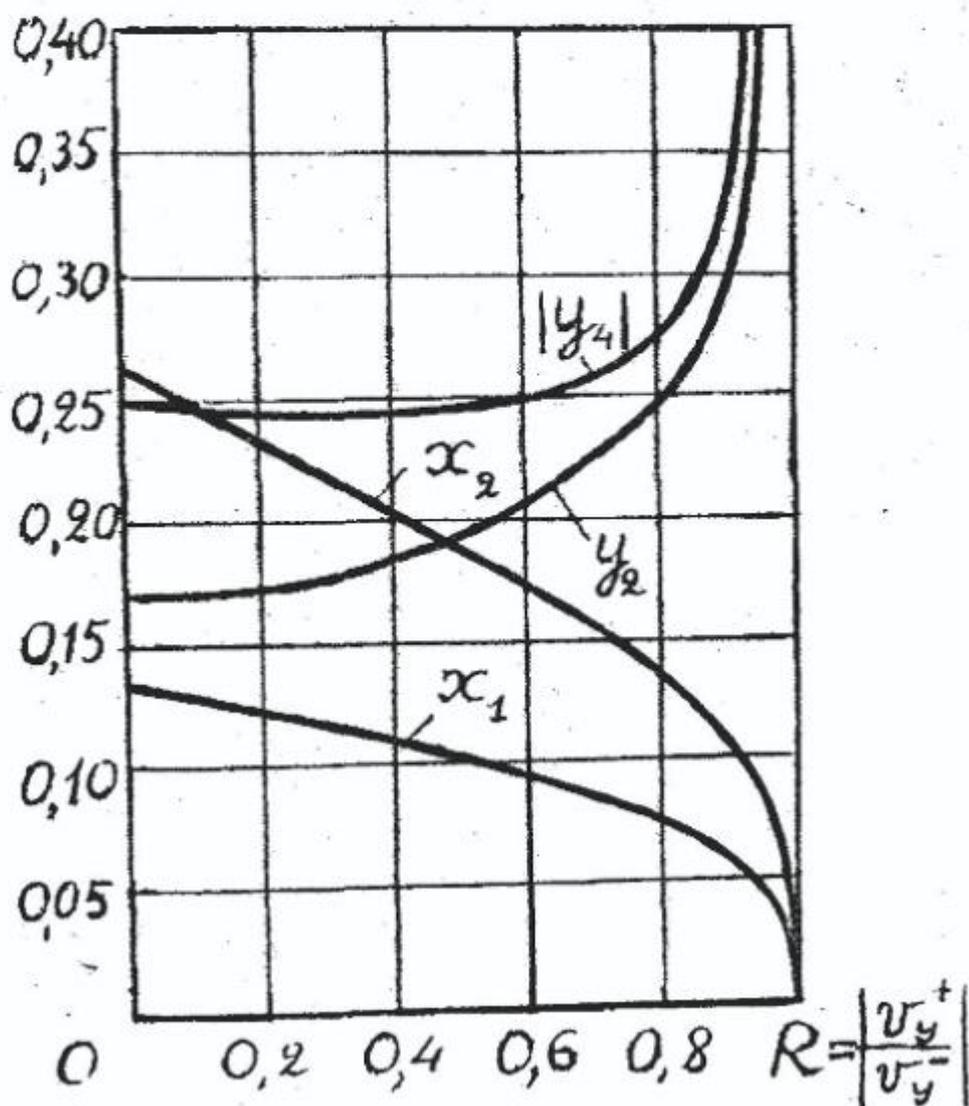


Рис. 3 б

движения без проскальзывания и смешанного. (см. рис. 3б, 5).

Для определения границ существования различных режимов запишем условие непроскальзывания при ударах частиц о стенки

$$\operatorname{tg} \alpha = |S_x| / |S_y| < f. \quad (3.19)$$

С учетом ( 1.8 ), ( 1.11 ) из ( 3.19 ) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 |v_x^- - a \omega^- \operatorname{sign} v_y^-| / 7(1+R) |v_y^-|. \quad (3.20)$$

При столкновении с верхней стенкой, учитывая, что  $v_x^- = u x_2$ ;

$$|v_y^-| = u y_2; \quad \operatorname{sign} v_y^- = 1; \quad \omega^- = -u x_1 / a$$

( непроскальзывание ) и ( 2.19 ), ( 3.20 ), условие непроскальзывания ( 3.19 ) принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha_B = 4 z_1 / 7(1+R) y_2 < f. \quad (3.21)$$

Аналогично при столкновении с нижней стенкой  $\operatorname{tg} \alpha_H = 4 z_1 / 7(1+R) |y_4| < f$ . Поскольку  $|y_4| > y_2$ , то проскальзывание ранее начинается на верхней стенке, поэтому условием движения частиц при ударах без проскальзывания об обе стенки является ( 3.21 ), а выражение  $f = 4 z_1 / 7(1+R) y_2$  определяет на плоскости параметров  $R - f$  нижнюю границу режима движения без проскальзывания ( см. кривая " 3 " на рис. 4 ). Рассмотрим для смешанного режима выражение ( 3.20 ) при столкновении с нижней стенкой. При этом  $v_x^- = u x_4$ ;  $|v_y^-| = u |y_4|$ ;  $\omega^- = \omega_2 = u \tilde{\omega}_2 / 2 a M$ ;  $\operatorname{sign} v_y^- = -1$ , а  $\tilde{\omega}_2$  находим, исключая  $\tilde{\omega}_1$  из первой формулы ( 2.15 ) и второй ( 2.17 ) с учетом ( 2.18 ):  $\omega_2 = -2 M x_4 + 7 k M y_2$ . В результате получаем выражение  $\operatorname{tg} \alpha_H = f y_2 / |y_4|$ , которое показывает, что в смешанном режиме при переходе к полному проскальзыванию  $y_2 = |y_4|$ . Из рис. 5 видно, что это происходит при уменьшении  $|y_4|$  и увеличении  $y_2$ . Нижняя граница смешанного режима определяется кривой " 2 " на рис. 4. Правая часть неравенства ( 3.14 ) с учетом ( 3.12 ) определяет нижнюю границу существования на плоскости параметров  $R - f$  периодических режимов движения частицы при ударах с проскальзыванием на обеих стенках ( кривая " 1 " на рис. 4 ):

$f \geq 0,24 \sqrt[3]{((1 - R) / (1 + R))^2 / M}$ . Таким образом, проведенный анализ выявил существование различных режимов

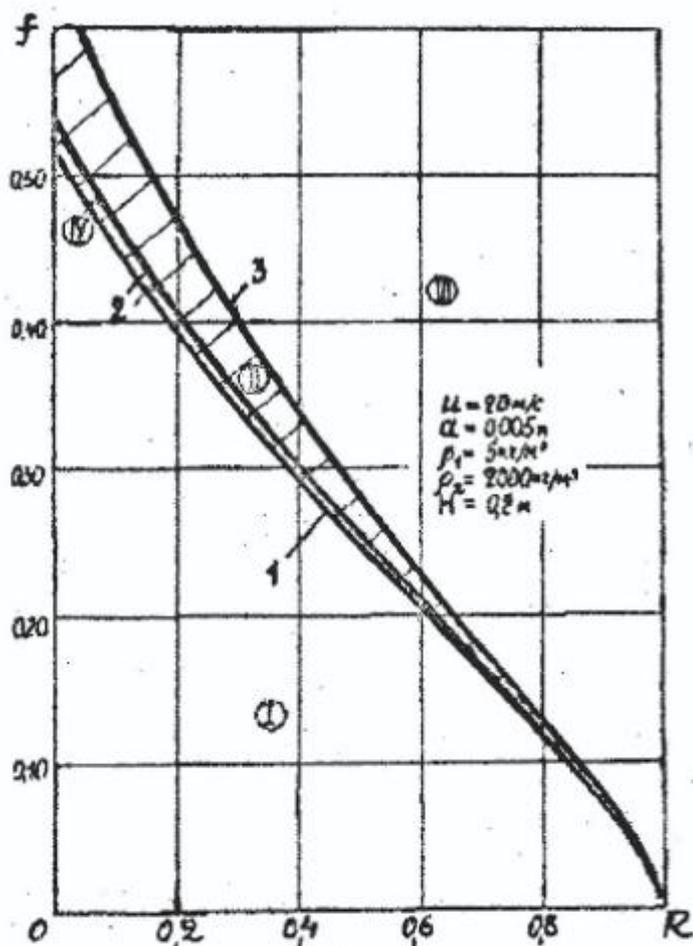


Рис. 4

периодических движений, которые представлены соответствующими областями на плоскости параметров  $R - f$  ( см. рис. 4 ). В области I не существует периодических режимов вышеописанного типа. Как показывают результаты прямого численного моделирования, здесь реализуется непериодическое затухающее движение частиц с ударами только о нижнюю стенку. Режим движения без проскальзывания и смешанный существует в областях III и II соответственно. Режим с проскальзыванием на обеих стенках имеет место как единственный в области IV, а совместно с режимами при непроскальзывании и смешанным в областях II и III ( см. рис. 5 ). Вид режима в областях II , III зависит от начальных значений  $v_x, v_y, \omega$ , однако, как

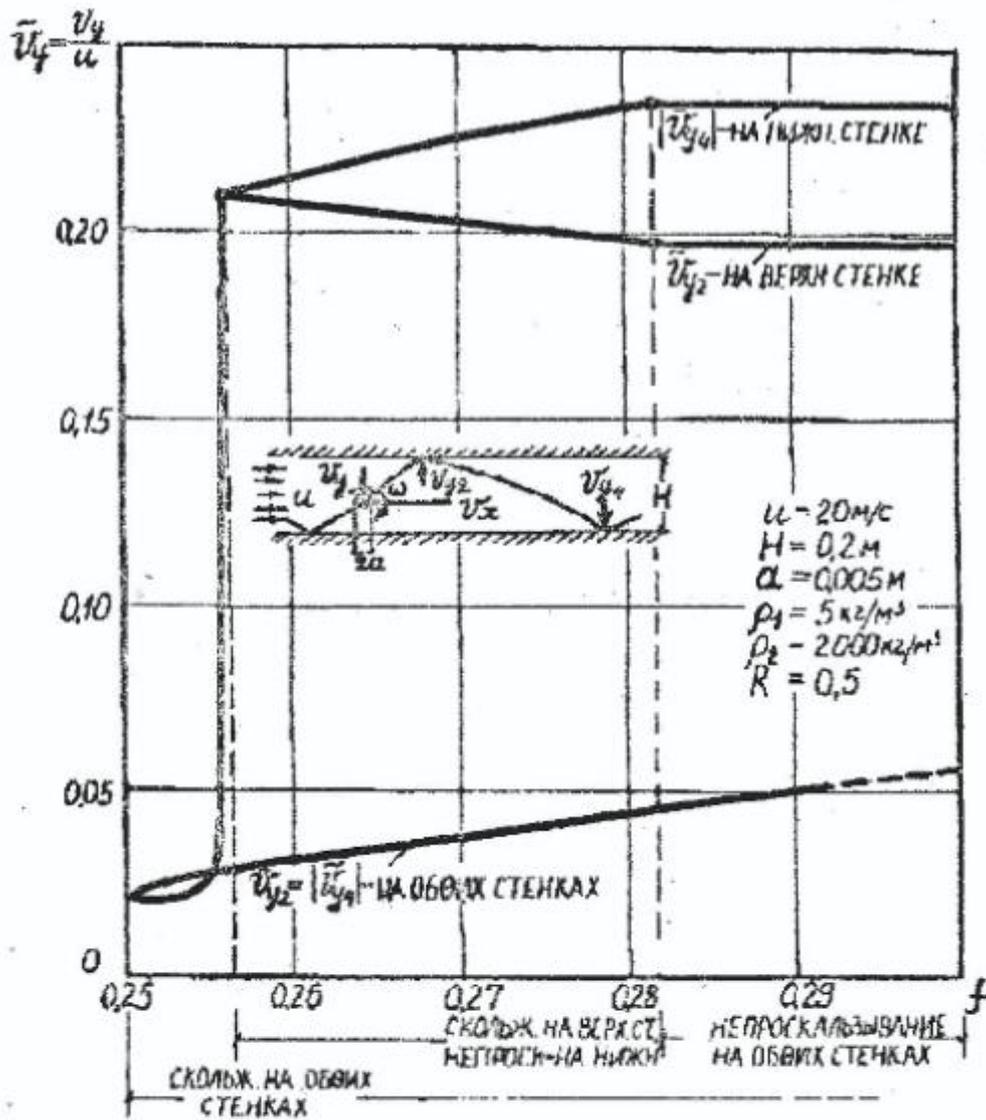


Рис. 5

показывают результаты прямого численного моделирования, процесс движения с проскальзыванием может оказаться неустойчивым и переходит в режим без проскальзывания или смешанный. Могут также реализовываться периодические процессы с проскальзыванием более сложного вида. Например, режимы с повторяемостью значений кинематических параметров через четыре этапа полета на пятый или через восемь этапов на девятый.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. - М.: Мир., 1975. - 378 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1973. - 847 с.
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2 Динамика. - М.: Наука, 1983. - 640 с.
4. Михаэлидис Е.Е. Движение частиц в газовом потоке. Средняя скорость и потери давления // Теоретические основы инженерных расчетов (Труды Американского общества инженеров-механиков). - 1988. - № 1. - С. 276 - 288.
5. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. - М.: Наука, 1985. - 200 с.
6. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Наука, 1978. - 336 с.
7. Потураев В.Н., Волошин А.И., Пономарев Б.В., Кордюк О.Л. Математическое моделирование двухфазных потоков при пневмотранспорте сыпучих материалов // Докл. АН УССР. Сер. А. физ. - мат. и техн. науки. - 1988. - № 7. - С. 48 - 51.
8. Потураев В.Н., Волошин А.И., Пономарев Б.В. Вибрационно-пневматическое транспортирование сыпучих материалов. - Киев: Наук. думка, 1989. - 245 с.
9. Смолдырев А.Е. Трубопроводный транспорт. - М.: Недра, 1980. - 292 с.

УДК 622.648.6:531.132.1:532.51.012.4

Б.В. Пономарев

### О СИЛАХ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЮ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ТРУБОПРОВОДУ

Досліджується рух дисперсних часток з обертанням в потоці газу вздовж горизонтального каналу з паралельними твердими стінками. Розглянуто режим котіння часток по нижній стінці і періодичний режим з ударами часток об верхню та нижню