

## РЕОЛОГИЯ УПРУГОНАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

Дырда В.Н., Твердохлеб Т.Е. Институт геотехнической механики НАН Украины, г. Днепрпетровск

Чижик Е.Ф. ИПП «Полимет», генеральный директор

### Содержание

- Часть 1. Современные аспекты реологии вязкоупругих материалов
- Введение
  - Математическое описание вязкоупругого поведения эластомерных материалов
  - Модели полимеров
  - Вязкоупругость
  - Выбор ядра
  - Влияние температуры
  - Старение
  - Поврежденность
  - Нелинейные эффекты
  - Эффекты физической нелинейности
  - Реология стареющих материалов
- Часть 2. Определение реологических параметров вязкоупругих материалов.
- Введение
  - Общие требования к поведению физико-механических испытаний
  - Определение квазистатических характеристик
  - Определение мгновенного модуля
  - Определение динамических характеристик
  - Определение реологических параметров ЭЖ по кривым релаксации и ползучести
  - Определение реологических параметров ЭЖ по релаксационному пику на частот-

ной зависимости  $\psi \sim |g_e|$

Определение реологических параметров

ЭЖ при циклическом деформировании

Способ определения динамических харак-

теристик вязкоупругих материалов по

ударному нагружению

Идентификация математических моделей

Литература

## Часть I. СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ РЕОЛОГИИ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

### Введение.

Прогресс в большинстве отраслей машиностроения связан с широким использованием эластомерных материалов и большого конструктивного многообразия эластомерных конструкций на их основе. Среди эластомерных материалов особое место занимает резина. Резина как конструкционный материал получила широкое распространение в общем машиностроении и, прежде всего, благодаря наличию целого ряда весьма ценных свойств, выгодно отличающих ее от традиционных конструкционных материалов, таких, как металлы и жесткие пластики. Это, в первую очередь, способность к большим обратным деформациям и высокие диссипативные свойства. К положительным качествам резины следует отнести: большую энергоемкость, большие обратные деформации, до 1000% и более; хорошую перерабатываемость и легкость изготовления деталей особенно при серийном методе; чрезвычайную гибкость - изменяя структуру резины, можно изменить ее свойства от жидкого состояния до эбонитоподобного; высокую надежность - резиновые детали не имеют внезапного отказа; высокую долговечность; по этим свойствам резина практически не имеет конкурентоспособных мате-

риалов; достаточно сказать, что при динамических деформациях сдвига до 35 % наработка до отказа резиновых элементов конструкции превышает  $1,5 \times 10^9$  циклов; высокие демпфирующие и звукопоглощающие свойства; удовлетворительную химическую стойкость к воздействию агрессивной среды.

К отрицательным качествам резины как конструкционного материала следует отнести; высокую ползучесть и релаксацию; зависимость механических свойств от режима нагружения - частоты, амплитуды, величины статической деформации; изменение механических свойств во времени эксплуатации (старение) и от действия агрессивной среды (масел, кислот, солнечной радиации, излучений высоких энергий, озона и т.д.).

Комплекс перечисленных физико-механических и технологических свойств позволил резине занять особое место среди современных конструкционных материалов. Вибропоглощающие устройства и демпферы, упругие звенья и защитные футеровки, гуммированные поверхности и уплотнительная арматура - это изделия, в которых резина не имеет на сегодняшний день конкурентов и не может быть заменена ни одним из существующих материалов.

Особенно перспективно использование резины в вибрационной технике, и, прежде всего, в тяжелых вибромашинах металлургического, аграрного, строительного и горного производства, которые благодаря наличию ряда ценных свойств позволяют решать сложные комплексные задачи по добыче, транспортированию и переработке различных материалов. Применение силовых резиновых деталей позволяет не только повысить производительность машин за счет интенсификации технологических процессов, но и обеспечить достаточно высокий уровень надежности машин, уменьшить вибрацию и звуковое давление, снизить металлоемкость и т.д.

Специфические особенности резины как конструкционного материала, наиболее полно проявляющиеся при экстремальных условиях нагружения.

К экстремальным условиям относятся высокие, длительное время действующие, стационарные циклические нагрузки, высокие и низкие температуры, агрессивное воздействие внешней среды (коррозионное воздействие, радиационное облучение и др.). При этом такие эффекты, присущие резине, как диссипативный разогрев, нестабильность свойств во времени и от действия различных эксплуатационных факторов приобретают существенное значение при выборе параметров и формы детали с заданными эксплуатационными характеристиками.

Экстремальные условия нагружения и особенности технологии обуславливают относительную простоту форм силовых резиновых деталей, представляющих, в основном, разные конструктивные вариации призматических и цилиндрических элементов.

Широкое распространение в общем машиностроении получили резиновые виброизоляторы для защиты машин, оборудования, приборов и человека-оператора от воздействия вибраций. Применение резиновых защитных футеровок и покрытий позволило предохранять рабочие органы тяжелых горных машин (классификаторов, углесосов, мельниц, скипов, рудоспусков и т.д.) от износа и ударных нагрузок, существенно увеличить долговечность и надежность машин, уменьшить шум, экономить дорогостоящие легированные металлы, уменьшить вес машин в целом и т.д.

Наиболее характерными условиями эксплуатации силовых резиновых деталей горных вибрационных транспортно-технологических машин является: предварительное статическое нагружение от 2-3 до 15-20 %; длительные циклические деформации, находящиеся в рамках малых (до 10% при сжатии и 15% при сдвиге), а также комбинированное нагружение в этих пределах; частота нагружения 8-50 Гц; температура

окружающей среды от 0 до 100°C; агрессивная внешняя среда. При этом в значительной мере проявляются особенности термомеханического поведения резин заключающиеся в существенной нестабильности их характеристик при циклическом деформировании, в том числе в высоком уровне физической нелинейности материала. В частности, механические характеристики среднелаполненных резин, используемых в горном машиностроении, при деформациях 3% (дробилки) и 15% (конвейеры) отличаются более, чем вдвое. Это подтверждает существенное влияние режима деформирования, временного и других факторов на термомеханическое поведение резин и резиновых элементов вследствие ярко выраженной вязкоупругости.

Анализ существующих конструкций показал, что эффективность использования вибрационных машин ставится в существенную зависимость от полноты и достоверности учета при обосновании функциональных и эксплуатационных параметров машин специфических свойств резины как конструкционного материала, а также адекватных математических моделей при описании этих свойств. А создание эластомерных конструкций с заданными механическими свойствами и максимальной долговечностью требует комплексного подхода с использованием методов рационального проектирования эластомерных конструкций (выбор марки резины, технологии изготовления, размеров изделия и т.д.), широкого круга расчетных и экспериментальных исследований, включающих определение реологических параметров, параметров макро- и микроразрушения, выяснения механизмов разрушения модельных и натуральных образцов и т.д.

Специфика свойств эластомерных материалов и конструкций на их основе предполагает использование конкретных разделов теории линейной и нелинейной вязкоупругости, соответствующего математического аппарата.

Целью настоящей статьи является обобщение многолетних экспериментальных и теоретических разработок по опре-

делению вязкоупругих (реологических) параметров ЭЭК, работающих при циклическом нагружении с учетом влияния факторов времени, температуры, предыстории деформирования.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для рассмотрения вязкоупругих свойств эластомеров, как впрочем и других полимерных материалов, характерны два подхода: молекулярный (микроскопический) и феноменологический. Конечная цель в общем случае состоит в построении аналитических зависимостей между напряжениями и деформациями с учетом влияния факторов времени, температуры и предыстории деформирования на напряженное состояние системы. Задача адекватного описания этих свойств была осознана и поставлена давно. И хотя большинство достижений в теории вязкоупругости относится к последнему времени, все же частная теория, сформулированная для линейного изотропического случая, существует уже с конца прошлого столетия. Это связано с вкладом таких ученых как Максвелл, Кельвин, Фойхт и других. Больцман в 1874 г. впервые дал уравнения трехмерной теории изотропной вязкоупругости. В 1909 г. Вольтерра получил аналогичные зависимости для анизотропных тел.

Последующее развитие и широкое применение линейной и нелинейной теории вязкоупругости наблюдается сравнительно недавно, в послевоенные годы. Активность в этой области связана, в первую очередь, с широким распространением и использованием в настоящее время полимерных материалов. Многие из этих новых материалов обладают механическими свойствами, которые нельзя описать с помощью простых упругих и вязких моделей механического поведения. В силу этого становится очевидной необходимость построения более общей теории. Усилия современных исследователей

проблемы вязкоупругости направлены на создания такой теории.

**Модели полимеров.** Одной из первых теорий, объясняющих особенности вязкоупругих свойств полимеров, является кинетическая теория высокоэластичности, развитая Куном [1], Гутом и Марком [2]. В основу этой теории положена физическая концепция об энтропийном характере высокоэластической деформации, согласно которой линейные макромолекулы можно рассматривать как совершенно гибкие нити, принимающие любую форму и сохраняющие неизменную длину и величину валентного угла. В рамках этого подхода удалось объяснить некоторые особенности поведения эластомеров: увеличение модуля эластичности с ростом температуры, тепловые эффекты при деформации, развитие больших обратимых деформаций.

Более адекватная модель полимерного теза разработана в работе Уолла [3]. Здесь в качестве модели полимера рассматривается уже сетчатая структура, что позволило выполнить расчет изменения энтропии сетки при ее деформации и на этой основе получить теоретическое соотношение между напряжением и относительной длиной образца.

В дальнейшем развитии кинетической теории высокоэластичности в рамках сетчатой модели полимера занимался Трелоар [4], распространив эту теорию на все виды деформации.

А.П. Александров и Ю.С. Лазуркин [5] разработали методику изучения высокоэластической деформации в периодическом режиме. Выполненные ими исследования в широком диапазоне частот и температур позволили установить основные закономерности кинетики высокоэластической деформации.

Г.Л. Слоимский и В.А. Каргин [6] применяли теорию упругого последствия Больцмана-Вольтерра к релаксационным механическим явлениям в полимерах, а также развили

качественные представления о молекулярном механизме релаксационных процессов.

Важное исследование влияния интенсивности межмолекулярного взаимодействия на механические свойства эластомеров проведено В.Е. Гулем [7].

Новый подход к механизму деформации полимеров предложен Г.А. Патрикеевым [8]. Согласно развиваемым им представлениям при механическом нагружении работают не все макромолекулы, а лишь небольшая часть их, образующая каркас. Напряжение в этих макромолекулах существенно превышает среднее напряжение, рассчитанное на сечении всего образца.

Перечисленные выше молекулярные теории высокоэластической деформации построены на моделях, которые представляют собой в значительной степени идеализацию реальных свойств полимерных материалов. Они не позволяют описать количественно в достаточно широких пределах наблюдаемые в эксперименте закономерности вязкоупругого поведения полимеров.

**Вязкоупругость.** Вследствие этого, в последнее время возрос интерес к феноменологическим методам описания вязкоупругого поведения полимерных материалов. Разработке математического аппарата теории вязкоупругости посвящено значительное число работ [11-37].

Большое распространение получили реологические соотношения, включающие непрерывный релаксационный спектр ползучести и релаксации, и соотношения, использующие в качестве функций влияния ядра со слабой особенностью (сингулярностью). Эти ядра подбираются из условий мгновенного нагружения, при которых процессы ползучести и релаксации имеют весьма большие скорости:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow \infty; \quad \frac{d\sigma}{dt} \rightarrow \infty; \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

С учетом таких функций процессы деформирования линейных вязкоупругих материалов описываются с помощью уравнений Больцмана-Вольтерра

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t K(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right], \quad (1)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \int_{-\infty}^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right], \quad (2)$$

где  $E$  - модуль упругости материала;  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  - деформация и напряжение в момент времени  $t$ ;  $t$  - время наблюдения;  $\tau$  - время, предшествующее моменту наблюдения;  $K(t-\tau)$  и  $R(t-\tau)$  - ядра релаксации и ползучести соответственно.

В теории интегральных уравнений Вольтерра функция  $K(t-\tau)$  - ядро уравнения (1), а функция  $R(t-\tau)$  - его резольвента. Если для ядра  $K(t-\tau)$  найдена его резольвента  $R(t-\tau)$ , то уравнение (2) является решением уравнения (1) и наоборот.

Это возможно при выполнении условий [22]

$$K(t-\tau) - R(t-\tau) = \int K(t-s)R(s-\tau)ds, \quad (3)$$

которое можно рассматривать как интегральное уравнение для определения резольвенты. Поэтому необходимо выбирать для ядер аппроксимирующие функции, для которых решение интегральных уравнений (1-3) может быть получено достаточно простым способом.

В случае ступенчатого нагружения  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  или  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  при  $\sigma_0 = \text{const}$  или  $\varepsilon_0 = \text{const}$ , где  $H(t)$  - функция Хевисайда,  $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

уравнения (1) и (2) значительно упрощаются

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[ 1 - \int_0^t K(z)dz \right],$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ 1 + \int_0^t R(z)dz \right],$$

где  $E_0$  - мгновенный модуль упругости.

Выражения  $\left[1 - \int_0^t K(t-\tau) d\tau\right]$ ,  $\left[1 + \int_0^t R(t-\tau) d\tau\right]$  - функции релаксации и вязучести соответственно.

При гармоническом деформировании по закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$  уравнение (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_0 \varepsilon_0 \left[ \sin \omega t - \int_0^t K(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= E_0 \varepsilon_0 \left[ (1 - A(\omega)) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t \right] \end{aligned}$$

Где  $A(\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau$  - косинус преобразование ядра релаксации;  $B(\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau) \sin \omega \tau d\tau$  - синус преобразование ядра релаксации.

Аналогично при гармоническом нагружении  $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$  уравнение (2) будет

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ \sin \omega t + \int_0^t R(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ (1 + A_1(\omega)) \sin \omega t - B_1(\omega) \cos \omega t \right], \end{aligned}$$

Где  $A_1(\omega) = \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau$  - косинус преобразование резольвенты  $R(t-\tau)$ ;

$B_1(\omega) = \int_0^{\infty} R(\tau) \sin \omega \tau d\tau$  - синус преобразование резольвенты  $R(t-\tau)$ .

Следует отметить, что функции  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  являются действительной и мнимой частью одностороннего изображения по Лапласу ядра  $K(t-\tau)$ , если в последнее вместо аргумента подставить мнимую величину  $-i\omega$  [38].

$$\mathcal{K}^*(-i\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} K(\tau) (\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau) d\tau = A(\omega) + iB(\omega)$$

Аналогично получена связь между  $A_1(\omega)$  и  $B_1(\omega)$  с изображением резольвенты  $R(t-\tau)$

$$R^*(-i\omega) = A_1(\omega) + iB_1(\omega)$$

Использование преобразования Фурье и алгебры комплексных величин [28, 38, 39] позволяют упростить получение тождественных соотношений, связывающих функции  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  и  $A_1(\omega)$ ,  $B_1(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= 1 - \frac{1 + A_1(\omega)}{[1 + A_1(\omega)]^2 + B_1^2(\omega)} \\ B(\omega) &= \frac{B_1(\omega)}{[1 + A_1(\omega)]^2 + B_1^2(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(\omega) &= 1 - \frac{1 - A(\omega)}{[1 - A(\omega)]^2 + B^2(\omega)} \\ B_1(\omega) &= \frac{B(\omega)}{[1 - A(\omega)]^2 + B^2(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Формулы (4), (5) могут служить для определения синус и косинус преобразования ядра  $k(t-\tau)$ , синус и косинус преобразование резольвенты  $R(t-\tau)$  и наоборот. Ограничения, накладываемые на ядро  $k(t-\tau)$  ( $\int_0^{\infty} k(t-\tau) dt \leq 1$ ), а также преобразование физической наглядности и реализуемости взаимосвязей между функциями, описывающими механическую реакцию материала (приведенные выше функции ползучести и релаксации, синус и косинус преобразования ядер ползучести и релаксации), накладывают дополнительные ограничения на выбор ядер релаксации.

**Выбор ядра.** Вид ядра выбирается в каждом конкретном случае с учетом физико-механических свойств материала и вида решаемой задачи. При этом большую роль играют такие факторы, как наличие явного выражения ядра релаксации для соответствующего ядра ползучести (резольвенты), количество определяемых параметров материала, методика определения этих параметров, математическая сложность этих ядер, а также гибкость полученных аналитических выражений при описании экспериментов.

Сводное описание ядер, для которых получены соответствующие резольвенты, приведено в табл.1 [31], составленной

Таблица 1. Функции влияния, используемые для аппроксимации ядер ползучести и релаксации

Ядро	Резольвента	Параметры ядер
$\frac{A \exp[-\beta(t-\tau)^k]}{(t-\tau)^k}$	$\exp[-\beta(t-\tau)^k] \sum_{i=1}^n \frac{A \Gamma\left(\frac{k_1+k_2-1}{k_1}\right) (t-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma\left[\alpha\left(\frac{k_1+k_2-1}{k_1}\right)\right]}$	$A, \beta, k_1, k_2$
$\frac{\alpha_1 \lambda \exp[-\beta(t-\tau)^{\alpha_1}]}{(t-\tau)^{\alpha_1}}$ (Бронский А.П.)	$\frac{\exp[-\beta(t-\tau)^{\alpha_1}] \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_1 \lambda \Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right) (t-\tau)^{1+\alpha_1-1}}{\Gamma\left[\alpha\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)\right]}}$	$\alpha_1, \lambda, \beta$
$\frac{\alpha_2 \lambda \exp[-\gamma(t-\tau)^{\alpha_2}]}{(t-\tau)^{\alpha_2}}$ (Слонимский Г.Л.)	$\frac{\exp[-\gamma(t-\tau)^{\alpha_2}] \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_2 \lambda \Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha_2}\right) (t-\tau)^{1+\alpha_2-1}}{\Gamma\left[\alpha\left(2-\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]}}$	$\alpha_2, \lambda, \gamma$
$\frac{A \exp[-\beta(t-\tau)]}{(t-\tau)^{\alpha}}$ (Ржанницкий А.Р.)	$\frac{\exp[-\beta(t-\tau)] \sum_{i=1}^n \frac{A \Gamma(\alpha) (t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}}$ (Колтунов М.А., Безухов В.Н.)	$A, \beta, \alpha$
$\frac{A \alpha}{(t-\tau)^{1+\alpha}}$ (Дюффинг Г.)	$\sum_{i=1}^n \frac{[A \Gamma(\alpha)] (t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}$	$A, \alpha$
$\frac{(t-\tau)^{\beta}}{\Gamma(1+\alpha)}$ (Абель)	$\lambda (t-\tau)^{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\beta^{\alpha} (t-\tau)^{\alpha(1+i)-1}}{\Gamma[(1+i)\beta + \alpha]}$ (Работнов Ю.Н.)	$\lambda, \alpha, \beta$

Колтуновым. Наиболее простым ядром, используемым для описания ползучести и релаксации полимеров, является экспонента

$$K(t - \tau) = \chi_1 \exp(-\beta_1(t - \tau)), \quad (6)$$

где  $\chi_0, \beta_0$  - параметры ядра, имеющие конкретный физический смысл. Параметры  $\chi_0$  и  $\beta_0$  имеют размерность времени  $s^{-1}$ ;  $\beta_0^{-1} = t_0$  - называют временем релаксации;  $\chi_0 = \frac{E_0}{\eta}$

где  $E_0$  - мгновенный модуль упругости;  $\eta$  - вязкость материала.

Интервал времени, в котором реальные кривые релаксации удается описать одной экспонентой, весьма мал. Поэтому часто применяют в качестве ядра релаксации сумму экспонент

$$K(t - \tau) = \sum_{i=1}^n \chi_i \exp\{-\beta_i(t - \tau)\},$$

где  $\chi_i, \beta_i$  - параметры ядра.

Набор величин  $t_{0i} = \beta_i^{-1}$  получил при этом название дискретного спектра. Заменяя суммирование интегрированием, получают ядра, соответствующие непрерывному спектру времен релаксации

$$K(t - \tau) = \int_0^{\infty} \rho(\beta) \exp[-\beta(t - \tau)] d \ln \beta, \quad (7)$$

Функция  $\rho(\beta)$  определяется как плотность распределения времен релаксации  $\theta = \beta^{-1}$  или спектр релаксации. Методика определения параметров  $\chi_i, \beta_i$  приведена в [38]. Ядра вида (6), (7) позволяют привести сложные интегродифференциальные уравнения к обыкновенным дифференциальным, суть такого перехода показана в [43]. Однако применение математических моделей с такими ядрами не обеспечивает достоверного описания нагрузки в широком диапазоне [22,32]. Для определения параметров  $\chi_i, \beta_i$  можно применять специальные программы для ЭВМ, составленные с использованием метода наименьших квадратов. Экспоненциальные функции, полу-

чище определенные преимущества при решении ряда задач, благодаря простоте выражений для ядер ползучести и релаксации и несложной методике определения параметров этих ядер, обладают существенным недостатком - такие функции не описывают процесс в начальный период, при  $t=0$  они имеют конечную величину.

Наиболее простым ядром, имеющим слабую, интегрируемую особенность в нуле, является ядро

$$K(t-\tau) = \frac{A}{(t-\tau)^\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

впервые предложенное Абелем. Это ядро впоследствии широко применялось для описания поведения полимерных материалов, горных пород и т.д. Резольвента ядра Абеля определена Работновым [15].

Наибольшее распространение в механике полимеров при решении задач, описывающих релаксационный спектр в большом интервале времени, включая и начало отсчета, нашла дробно-экспоненциальная  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  функция Ю.Н. Работнова [15,22]

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) = \chi(t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^\alpha (t-\tau)^{\alpha(n+1)}}{\Gamma[(n+1)(\alpha+1)]}, \quad (8)$$

где  $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta = \frac{1}{t_0^{1-\alpha}}$ ;  $\chi = \frac{\lambda}{t_0^\alpha}$ ;

$$\lambda = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}$$

$\alpha, \beta, \lambda$  - параметры ядра, являющиеся реологическими параметрами материала и имеющие конкретный физический смысл;

$t_0$  - время релаксации;

$\Gamma(\dots)$  - гамма-функция заданного параметра;

$E_0$  и  $G_0$  - мгновенные модули упругости и сдвига материала;

$E_\infty$  и  $G_\infty$  - установившиеся значения модуля упругости и модуля сдвига, определяемые как  $E_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} E(\omega) \rightarrow G_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega)$ .

Параметр  $\lambda$  обычно называют дефектом модуля,  $\chi = \lambda \cdot \beta \cdot$  обобщенное время релаксации, а параметр дробности  $\alpha$  явно выражается через максимальное значение спектра  $\rho_{max}$  и дефект модуля  $\lambda$

$$\alpha = -1 + \frac{4}{3} \pi^{-1} \operatorname{arctg}(2\lambda \rho_{max} \lambda^{-1}).$$

Синус и косинус преобразования Фурье дробно-экспоненциальной функции  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta t(t-\tau))$ , полученные в работе [43]

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{\chi (\omega^{1-\alpha} \cos \beta + \beta)}{\omega^{2(1-\alpha)} + 2\beta \omega^{1-\alpha} \cos \beta + \beta^2}, \\ B(\omega) &= \frac{\chi (\omega^{1-\alpha} \sin \beta)}{\omega^{2(1-\alpha)} + 2\beta \omega^{1-\alpha} \cos \beta + \beta^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Такое ядро сохраняет особенность ядра Абеля, но допускает большую гибкость при описании механической реакции различных материалов. Эффективность аппарата  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций в значительной степени связана с существованием алгебры резольвентных операторов [15,27], позволяющей легко выписывать точные решения многих задач вязкоупругости. Область практического использования дробно-экспоненциальных функций особенно возросла после составления таблиц [40] и разработки методик подбора реологических параметров  $\alpha, \beta, \lambda$  при помощи ЭВМ непосредственно по экспериментальным данным [41] и методики определения реологических параметров резиновых деталей при циклическом деформировании [42].

При описании вязкоупругих свойств полимеров широко используется трехпараметрическое ядро Ржаницына [16, 38]

$$K(t-\tau) = A(t-\tau)^\alpha e^{-\beta(t-\tau)}, \quad (10)$$

и его резольвента - ядро Колтунова [20, 21]

$$R(t-\tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)]^n (t-\tau)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha, n)}, \quad (11)$$

где  $A, \alpha, \beta$  - параметры ядра;  $t$  - время;  $-1 < \alpha < 0, \beta \geq 0$ .

Параметр  $\beta$  имеет размерность  $c^{-1}$ ,  $A$  и  $\alpha$  - безразмерные величины.

Синус и косинус преобразования Фурье ядра Ржаншина [38] имеют выражения

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha\omega - \text{ctg} \frac{\omega}{\beta}\right), \\ B(\omega) &= \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\alpha\omega - \text{ctg} \frac{\omega}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Широкому применению ядер (8) и (10) способствовали создание практических методов определения их параметров по экспериментальным данным.

Ядро (10) и его резольвента, а также интегралы от этих функций табулированы в [21] для достаточно широкого диапазона изменения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$ , и интервала времени  $t \geq 0,0001$ .

Широко используется для описания последействия в резинах слабосингулярное ядро Бронского-Слонимского [14]

$$K(t - \tau) = \lambda(A - B)(t - \tau)^{-\alpha} \exp[-\beta(t - \tau)^{-\alpha}] \quad (13)$$

где  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  - параметры ядра.

Аналитическая форма интегральных преобразований ядра (13) отсутствует. При этом синус- и косинус-преобразования  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  ядра (13) можно получить на основе равномерных аппроксимаций, используя формулы [32, с.205].

Приведенные ядра содержат, как правило, три или четыре параметра, имеют дробную степень времени, так как только в этом случае возможно описание экспериментальных данных по релаксации напряжения и ползучести с хорошим приближением.

При описании квазистатических процессов поведение функции  $K(t - \tau)$  - где  $K(t - \tau)$  - наперед заданный вид ядра, изучено хорошо. Если среда не следует модели Работнова [22], то всегда найдется другое ядро  $K(t - \tau)$ , которое эту среду

описет. Однако механизмы, влияющие на процессы деформирования, при статических и динамических нагрузках могут быть различны. Поэтому нет полной ясности в том, применимы ли квазистатические ядра в случае динамических нагрузок. Для ответа на этот вопрос необходимо иметь достаточно много экспериментальных данных или какую-то иную информацию о среде.

Анализ существующих ядер показал [6,14,16,20,22], что при надлежащем выборе их параметров они с достаточной степенью точности описывают ход релаксационных процессов в различных материалах, однако физический смысл этих параметров не всегда ясен, а то и вовсе отсутствует. Попытки раскрытия физического смысла ядер предпринимались в [44-52].

В работе [46] делается попытка обосновать применение дробных интегральных операторов на основе модельного представления о физическом характере релаксационных явлений. Здесь предлагается теоретическое описание деформации эластомера с учетом его надмолекулярной структуры. Рассматривается релаксация в области перехода из застеклованного состояния к высокоэластическому. При этом движение имеет диффузионный характер и математически исследована одномерная модель диффузионного процесса. По мнению авторов [45, 46], физический смысл появления интегральных операторов состоит в диффузионном характере перестройки надмолекулярных образований, приводящей к развитию высокоэластической деформации. Ранее же [15] появление таких операторов предполагалось из феноменологических соображений.

В работе [44] на основании представления о зародышевом механизме релаксации, как следствие, делается вывод о чувствительности релаксационных характеристик к неоднородности в структуре реального полимерного тела.

Новые возможные типы ядер релаксации предложены в [49] на основании анализа изменения энтропии системы, к

возрастанию которой в ходе релаксации напряжения приводят взаимодействия и диффузия кинетических единиц - релаксаторов и нерелаксаторов. Релаксаторами могут быть различные атомные группы, повторяющиеся звенья, микрополости, концентраторы напряжения и т.д., которые могут, взаимодействуя друг с другом, сливаться, перестраиваться и диффундировать в полимерном материале.

Ядра релаксации двух видов, полученные в предположении обратной зависимости ядра в уравнении (1) с затронутой, которая возрастает в процессе релаксации напряжения до максимального значения, имеют достаточно сложный вид: для них нет практической методики определения их параметров, могут применяться для описания лишь начальных участков кривых релаксации напряжения. Такие ядра, по мнению автора, с высокой точностью описывают кинетику релаксационного процесса и позволяют выявить кинетические и диффузионные области его протекания.

Зависимости параметров слабосингулярных ядер от структуры полимеров получены в работе [48] с помощью структурного микрорелаксационного подхода [50]. В работе предложена методика определения параметров слабосингулярного ядра (10) в зависимости от параметров структуры полимера на примере полнуретана и полипропилена: числа сегментов в полимерной цепочке, молекулярного веса сегмента, параметра энергии когезии молекулярных групп, степени кристалличности, размеров надмолекулярных образований, степени разветвленности, функциональности узлов.

В работе [47] сделана попытка связать процесс разрушения твердых тел под нагрузкой с изменением деформативности теории ползучести. Связь между долговечностью и деформативностью материала установлена посредством выражения ядра ползучести через параметры уравнения долговечности Журкова.

Так, для материалов, у которых величина накопленной деформации ползучести, определяемая из эксперимента, является постоянной величиной, ядро ползучести имеет вид

$$K(t) = \frac{kTAE\gamma}{\left[ U_0 - kT \ln \frac{t^2}{t_0} \right]}$$

где  $k$  - постоянная Больцмана;

$T$  - абсолютная температура;

$A$  - величина накопленной деформации ползучести;

$E$  - модуль упругости материала;

$\gamma$  - структурно-чувствительный коэффициент;

$t$  - долговечность;

$U_0$  - энергия активации процесса разрушения;

$t_0 = 10^{-11}$  с и совпадает по порядку с периодом тепловых колебаний атомов тела.

Такое ядро, вероятно, позволит прогнозировать деформативность материала при различных температурах. Ранее [27] подобным образом получено ядро ползучести, параметрами которого являются характеристики прочности горных пород. Исследованию влияния неоднородности структуры резин на характер релаксационных процессов посвящена работа [52]. По мнению авторов, различия в дислокации и распределении связей межмолекулярного, внутримолекулярного и внутриструктурного взаимодействия связей каучук-наполнитель, наполнитель-наполнитель, наличие различных структурных образований и т.д., обуславливают широкий набор времен релаксации и, как правило, характеристики неоднородности резин. В [52] установлена эмпирическая корреляционная связь между параметрами спектра и характеристиками неоднородности резин.

Анализ результатов этих работ позволяет сделать вывод, что не все характерные механические свойства эластомеров, имеющих широкий спектр времен релаксации, основная часть которых лежит в области малых времен, могут быть удовлетворительно описаны уравнениями (1) и (2) с широко ис-

пользуемыми ядрами типа (8), (10), (12), (13). А такие свойства, как проявление эффекта Маллинза (зависимость коэффициента потерь от амплитуды), наличие остаточных необратимых деформаций, химическое, термо- и прочие виды старения не заложены в эти модели и не могут быть ими описаны [53].

**Влияние температуры.** Опыт показывает [21, 31-33, 37], что существенное влияние на реологические свойства всех материалов оказывает температура.

Решение конкретных задач с учетом последнего в общем случае весьма затруднительно. Чтобы обойти эти трудности, необходимо либо вводить в программу расчета вид ядра ползучести или релаксации при различных температурах, либо использовать понятие терморологически простых тел, для которых влияние температуры на реологические свойства учитывается путем введения в обычные упруго-наследственные соотношения типа (1), (2) модифицированного времени  $t'$  (принцип температурно-временной аналогии ТВА [28]), приемлем второй метод.

Приведенное время или псевдовремя при разных постоянных температурах  $T$  вводится как

$$t' = a_T(T) t,$$

где  $t'$  - приведенное время;

$a_T(T)$  - функция температуры или коэффициент температурно-временного сдвига, коэффициент редукции;

$t$  - время наблюдения.

Коэффициент температурного сдвига выбирается таким образом, что  $a_T(T_0) = 1$ , где  $T_0$  - некоторая базовая температура приведения. Для нестационарных температурных полей условное время определяется как интеграл от произведения функции температуры на дифференциал истинного времени.

Если для данного материала температурно-временная аналогия имеет место, т.е. известна функция  $a_T(T)$  в некотором интервале температур, то заменив в уравнениях (1), (2) время  $t$  на  $t'$ , они внешне не изменяясь, а на самом деле будут отражать сильное влияние температуры [21, 22, 31]. Основ-

ным ограничением применимости принципа ТВА является требование неизменности материала и природы релаксационных процессов в области, где производится приведение. Так, для эластомеров невозможна прямая суперпозиция спектров, полученных до и после старения и кристаллизации [34]. Вид функции  $a_r(T)$  определяется из эксперимента.

Для аппроксимации коэффициента  $a_r(T)$  предложено несколько формул. Наиболее употребляемая зависимость принята в виде (28) уравнения Вильямса-Ланделла-Ферри (ВЛФ)

$$\lg a_r = -\frac{C_1(T - T_r)}{C_2 + (T - T_r)}, \quad (14)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - эмпирические коэффициенты, зависящие от выбора  $T_r$ ;

$T_r$  - температура приведения.

Для практических целей за базовую температуру приведения удобно принимать температуру лабораторных испытаний [21]  $T_r = 20^\circ\text{C}$ , где  $a_r = 1$ . В качестве первого приближения для большинства резиноподобных материалов в [28] приняты значения  $C_1 = 8,86$ ;  $C_2 = 101^\circ\text{C}$ , получившие название универсальных коэффициентов приведения. Границы применимости температурно-временной аналогии - ТВА зависят от типа эластомера (резины). В [54] обоснована возможность использования универсальных параметров приведения для резин, содержащих до 30 мас.ч. текучего углерода, при этом температура приведения  $T_r$  в (14) определяется как  $T_r = T_g + 50^\circ = 252\text{ K}$ , где  $T_g$  - температура стеклования резины. Здесь же показана возможность использования ТВА динамических функций наполненных техническим углеродом резин в нелинейной области, для которой сформулирован дополнительный критерий применимости приведения - совместности (совместности) изотерм амплитудных зависимостей динамических функций резин (модуль сдвига  $G'$  и тангенс угла механических потерь  $\tan\delta$ ). Максимальная амплитуда деформаций, при которой возможно приведение, зависит от твердости резины и достигает 0,02 для любых резин (до  $H=80$  ед. по Шору А.); 0,1 для сред-

женатопленных резин ( $H = 50$  мас.ч) и 0,13 для малонаполненных резин. Показано, что для резин, содержащих до 30 мас.ч. сажи ТВА осуществляется с универсальными параметрами приведения.

Коэффициенты приведения  $C_1$ ,  $C_2$  для резин с различным наполнением приведены в табл. 2 [54]

Таблица 2. Параметры ТВА

Содержание основных компонентов, мас.ч.					Параметры приведения		
НК	СКН-3	СКД	Сера	Техур-лерод	$T_0$ , К	$C_1$	$C_2$
100	-	-	2,5	30	297	24,4	101,6
-	100	-	2,5	40	289	8,86	101,6
-	100	-	2,5	50	297	-1743	-14720
100	-	-	3,0	45	298	28,6	256
-	75	25	3,0	80	284	8,86	101,6

С учетом изложенного, если ползучесть или релаксация описываются уравнениями (1), (2) с дробно-экспоненциальным ядром Эдвардса-Робертсона (8), Например,

$$a(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \chi \int_0^t \mathfrak{E}_\alpha(-\beta(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right]$$

то при постоянной температуре  $\epsilon_0 = a_1(T)$ , и известной функции  $a_1(T)t$ , для которой  $a_1(T_0) = 1$  значения реологических параметров  $\chi$  и  $\beta$  при температуре приведения  $T_0$  были равны соответственно  $\chi_0$  и  $\beta_0$ , то из самого определения дробно-экспоненциальной функции (8) непосредственно следует, что при произвольной температуре  $T$  параметры ядра будут пересчитываться по формулам [22]

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 e^{\alpha \ln T/T_0} \\ \beta &= \beta_0 e^{-\alpha \ln T/T_0} \quad (-1 < \alpha < 0) \end{aligned} \quad (15)$$

И если  $\alpha_T$  аппроксимируется зависимостью (14), то для параметров ядра Работнова выражения (15) будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \chi_0 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}\right)(1+\alpha)} \\ \beta(T) &= \beta_0 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}\right)(1+\alpha)} \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично получают зависимости параметров ядра Ржаницина (10) от температуры [21]

$$\begin{aligned} A &= A_0 \alpha_T^n; \\ \beta &= \beta_0 \alpha_T; \end{aligned}$$

параметр  $\alpha$  - не зависит от температуры.

Таким образом, проводя эксперименты на ползучесть (релаксацию) при различных значениях температуры, постоянных в каждом эксперименте и меняющихся от эксперимента к эксперименту, можно согласно методик [21, 31, 42] определить параметры ядер (8) и (10) в зависимости от температуры.

Адекватно влиянию температуры на вязкоупругие свойства эластомеров соответствует и изменение частоты нагружения. Такая адекватность была предметом многочисленных исследований. Интерес представлял вопрос, почему усиление зависимости от частоты сопровождается усилением зависимости от температуры и наоборот. Это явление получило название температурно-временной (частотной) аналогии и объяснено в рамках теории так называемого терморелеологически простого поведения материала [28]. Согласно этой теории, изотермические и неизотермические характеристики соотносятся следующим образом [28,32]

$$\begin{aligned} G^*(\omega, T) &= \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G^*(\omega\alpha_T, T_0); \\ G^*(\omega, T) &= \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G^*(\omega\alpha_T, T_0) \end{aligned}$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  - плотности полимера при абсолютных температурах  $T$  и  $T_0$  соответственно;

$G'$  и  $G''$  - составляющие комплексного модуля сдвига, определяемого как  $\bar{G} = G'(\omega, T) + jG''(\omega, T)$

$\alpha_T$  - коэффициент температурного приведения, определяемый по формуле (14).

Температурно-временная аналогия также представляет возможность прогнозирования процессов деформирования полимерных материалов путем проведения ускоренных экспериментов в более жестких условиях - при повышенных температурах. В рамках ТВА в настоящее время хорошо исследованы как в линейной, так и нелинейной областях крайние задачи для сред с нестабильными свойствами - воздействие температур, влажности и т.д. [28, 31, 56]. В работах [31, 56] приведены методики определения коэффициентов температурного сдвига  $\alpha_T$  по экспериментальным данным, а также основные требования, предъявляемые к проведению таких экспериментов. Ввиду серьезных экспериментальных трудностей, ТВА часто является единственным средством оценки динамических свойств в широком интервале температур и частот, хотя такая оценка становится все менее надежной по мере выхода за верхнюю и нижнюю границы интервала параметров  $\omega$  и  $T$ . В каждом конкретном случае необходима тщательная экспериментальная проверка такого подхода.

Старение - это необратимые изменения физико-механических свойств ЭКК, происходящие под влиянием как длительно действующих циклических нагрузок, так и различных немеханических факторов (света, тепла, ионизирующих излучений, агрессивных сред и т.д.). Если свойства материала являются медленно изменяющимися функциями времени, то старение может быть учтено феноменологически, т.е. заменой упругих постоянных  $E$ ,  $G$  функциональными зависимостями  $E(t)$ ,  $G(t)$ . Аналогично учитывается влияние внешней агрессивной среды, если агрессивная среда представляет собой радиационные потоки с дозой  $D$  и т.д., то постоянные  $E$  и  $G$  заменяются функциями  $E(D)$  и  $G(D)$ .

Вид функций  $G(t)$ ,  $G(D)$  для резины на основе СКИ-3 конкретизирован в [32], он имеет, как правило, экспоненциальную форму.

Таким образом, в рамках наследственной теории вязкоупругости с использованием слабосингулярных ядер (8), (10) могут быть учтены через модифицированное время влияние температуры на реологические параметры материала, являющиеся параметрами ядер, получают так называемые уравнения термовязкоупругости. Установить зависимость же реологических параметров от действия радиационного облучения, различных видов старения, действия длительных циклических нагрузок, накопления поврежденности, приводящие к изменению структуры резины, не представляется возможным. Стандартизированные же методы прогнозирования изменения характеристик резины [57], относящиеся к их старению, достаточно ограничены в применении.

Для прогнозирования структурных изменений в резинах при различных видах старения используются преимущественно эмпирические или полуэмпирические зависимости [32,33,57-59].

**Поврежденность.** Многие исследователи [22,60,61,63] вводят функцию, характеризующую степень накопленных повреждений материала  $\alpha(t)$  в уравнения состояния среды, как определяющий параметр. Физическая сущность повреждаемости при этом не определяется, но предполагается, что в процессе разрушения повреждаемость увеличивается от 0 до 1,  $\alpha(0)=0$ , причем при разрушении  $\alpha(t^*)=1$ ,  $t^*$  - время разрушения при произвольном законе изменения напряженного состояния во времени. Различные выражения для  $\alpha(t)$  приведены в [27].

В общем случае уравнения состояния вязкоупругих тел, учитывающих влияние накопленных повреждений, могут быть представлены в виде [61, 63]:

$$2G_0 \varepsilon_y = s_y + \int_0^t \Gamma(t-\tau, \omega) \dot{\varepsilon}_y(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где  $\varepsilon_y = \varepsilon_y - \varepsilon \delta_y$  - девиатор тензора деформаций;  
 $s_y = \sigma_y - \sigma \delta_y$  - девиатор тензора напряжений;  
 $\delta_y$  - символы Кронекера;  
 $\sigma = \sigma_n / 3$  - среднее напряжение;  
 $\varepsilon = \varepsilon_n / 3$  - средняя деформация;  
 $G_0$  - мгновенный модуль сдвига;  
 $\Gamma(t-\tau, \omega)$  - экспериментально определяемая функция;  
 $\theta = 3\varepsilon$  - относительное изменение объема;  
 $K$  - модуль объемной деформации;  
 $\omega(t)$  - функция, характеризующая степень накопленных повреждений.

Предполагая, что функция  $\Gamma(t-\tau, \omega)$  представима в виде

$$\Gamma(t-\tau, \omega) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-P_k(t-\tau)},$$

где  $A_k = A_k(\omega)$  и  $P_k = \text{const}$  - известные параметры, что подтверждается на практике [57, 58, 64] кинетическими кривыми изменения многих характеристик полимерных материалов в процессе старения, уравнения (17) приводятся к дифференциальным уравнениям между девиаторными величинами деформаций и напряжений, в которых влияние степени накопленных повреждений на механические свойства материала учитывается через модифицированное время [29, 56, 65] в форме аналогий

$$dt^* = \frac{dt}{a_\omega(\omega)},$$

где  $a_\omega(\omega)$  - функция редукции, определяемая экспериментально.

Функция  $a_\omega(\omega)$  может быть определена экспериментально по кинетическим кривым накопления повреждений и кривым ползучести, включающим и точки разрушения [63] по уравнению

$$y(t, \omega) = y_1 \left[ \frac{t}{a_{\omega}}(\omega) \right]$$

где  $y_1 = y_1(t) \text{ и } y_1 = y_1(\omega)$  - уравнения кривых ползучести при отсутствии накопления повреждений и их наличии соответственно.

Аналогичный вариант феноменологической модели деформирования вязкоупругого стареющего материала предложен в [65].

Однако на практике возникают значительные трудности, так как не ясно, как правильно оценить поврежденность, определить функциональные параметры кинетических уравнений накопления повреждений при различных модулях разрушения (силовых, деформационных, энергетических), так как каждая из них характеризуется собственными представлениями и о механизме разрушения, и о поврежденности. В силу этого обстоятельства в настоящее время на практике используются преимущественно эмпирические или полумпирические зависимости [31, 33, 37, 57, 58], полученные на основе прямых экспериментальных данных о кинетике накопления повреждений, при этом исследуются не только виды таких зависимостей, но в первую очередь скорость протекания процессов накопления повреждений.

**Нелинейные эффекты.** Для большинства эластомерных материалов область, когда реологические соотношения  $\sigma \sim \epsilon \sim t$  можно описать линейными соотношениями типа (1), (2), достаточно мала и рассматривать ее следует с достаточными приближениями.

Дальнейшее развитие теории деформирования идет по пути учета физической нелинейности и сложных путей нагружения материала [18, 21, 22, 29, 60, 66-69]. В общем случае основные уравнения, устанавливающие связь между малыми деформациями и напряжениями для вязкоупругих материалов, обладающих физической нелинейностью, представляются уравнения Вольтерра-Фреше [21, 22, 29] в виде суммы интегралов возрастающей кратности [29].

Уравнение такого вида для одномерного нагружения изотропного несжимаемого материала, обладающего одинаковыми деформационными свойствами при растяжении и сжатии (это позволяет исключить в кратно-интегральном ряде Фреше-Вольтерра четные степени и двойной интеграл) имеют вид

$$\sigma(t) = a\sigma(t) + b \int_0^t K_n(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + b_2 \int_0^t \int_0^t K_{22}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_1) \times \\ \times \sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)\sigma(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \quad (18)$$

где  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  - параметры материала;

$K_n$  - ядро ползучести, первый индекс  $n$  - обозначает степень нелинейности, второй  $s$  - число уровней напряжений, равное числу ядер.

Ядра кратных интегралов весьма чувствительны к степени точности экспериментальных данных, поэтому удержание даже двух или трех членов в (18) приводит к большому объему и сложности вычислений, что сильно ограничивает их практическое применение. Поэтому для описания нелинейной вязкоупругости используются зависимости, представляющие собой частные случаи уравнений главной нелинейной теории вязкоупругости [29] и содержащие, как правило, один или два члена в виде суммы однократных интегралов. Уравнение такого вида, в котором удержаны линейный и кубический член, имеет вид

$$\sigma(t) = a\sigma(t) + b_1 \int_0^t K_1(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + b_2 \int_0^t K_3(t-\tau)(\sigma(\tau))^3 d\tau$$

где  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  - параметры материала;

$K_1$ ,  $K_3$  - ядра ползучести.

В настоящее время имеется много работ, посвященных построению нелинейных уравнений наследственного типа. Наиболее удобными в практически приложениях являются уравнения Ледермана-Розовского [60,66]

$$\sigma(t) = \Psi(\sigma) + \int_0^t K_1(t-\tau)f(\sigma(\tau))d\tau \quad (19)$$

и уравнение Работнова [67]

$$\sigma(s(t)) - \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau \quad (20)$$

где  $\sigma(s(t))$  - некоторая нелинейная функция напряжения;

$\sigma(t)$  - аппроксимация кривой

$\sigma \sim \epsilon$  - мгновенного деформирования или изохронная зависимость  $\sigma = f(s)$  при  $t \rightarrow 0$ .

Уравнение Работнова (20) относится к числу наиболее известных уравнений вязкоупругости. Оно успешно применяется к металлам, полимерам и другим материалам [29, 68, 69]. Различные варианты уравнений (19,20) используются для описания физически нелинейных наследственных сред при решении конкретных задач вязкоупругости.

Наряду с уравнениями (19), (20) используются методы приведенных переменных, получившие название различных аналогий - термовременной, напряженно-временной и т.д. [31, 56,70]. Однако необходимо с известной осторожностью использовать выводы теоретических работ, в которых уравнения нелинейной термовязкоупругости наследственного типа обобщаются на случай нелинейной термовязкоупругости путем введения условного времени и масштабной функции, найденной в линейной области [54,55,71].

**Эффекты физической нелинейности.** Для средне- и высоконаполненных резин в области малых гармонических деформаций область линейного деформирования незначительна, характерными являются эффекты физической нелинейности, проявляющиеся в амплитудной зависимости динамических характеристик, используемых в линейной теории: модуля сдвига  $G$  или упругости  $E$ , модуля объемного сжатия  $K$ , коэффициента Пуассона  $\nu$ . При аналитическом описании указанных характеристик удобно пользоваться комплексным представлением динамического модуля, являющегося функцией частоты, температуры, амплитуды гармонического деформирования [32,36].

Для случая общего циклического деформирования соответствующая экспериментальная программа очень трудоемка и практически нереализуема. При простом (монофазном) гармоническом нагружении, характерном для условий эксплуатации ЭЭК в вибрационных машинах, она существенно упрощается и требуемые зависимости могут быть получены из опытов на простой сдвиг [36, 72]. Обширные экспериментальные данные, приведенные в [73-76], обзоры по нелинейным эффектам в эластомерах при циклическом деформировании [32, 74], свидетельствуют о решающем влиянии степени наполнения на уровень амплитудной зависимости сдвиговых динамических характеристик накопления  $G'$  и потерь  $G''$ . На рис. 1 представлены классические зависимости  $G'$  и  $G''$  от удвоенной амплитуды деформации сдвига  $u$  для резины на основе бутилкаучука (28,8 % объемного наполнения сажей), полученные в [77]. Эти зависимости свидетельствуют о необходимости учета амплитудной зависимости динамических характеристик резин.

В [72, 75] установлено, что закономерности изменения механических характеристик ЭЭК при гармоническом деформировании адекватно описываются математической моделью интегрального типа, учитывающей свойства материала, параметры конструкции и эксплуатационные факторы посредством конечных аналитических соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{N}_n &= \bar{E}_k \bar{u}_n \frac{S}{H}; & \bar{N}_t &= \bar{E}_r \bar{G}_t \bar{u} \frac{S}{H}; \\ E_k^* &= \beta_n^* E_0; & G_t^* &= \beta_t^* G_0; \\ \beta_n^* &= 2(1+\nu) \beta_{nn} G_1^* (\omega, \theta, t) F^* (\bar{\epsilon}) / G_0; \\ \beta_t^* &= \beta_{tt} (\omega, \theta, t) F^* (\bar{\epsilon}) / G_0; \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\bar{N}_n, \bar{N}_t, \bar{u}_n, \bar{u}_t$  - амплитуды нормальных и касательных сил и перемещений на торцах РГП;

$(\bar{\epsilon}) = (\bar{\epsilon}) + i(\bar{\epsilon})''$  - комплексное представление величины

$$\bar{N}_n = N_n' + iN_n'', \bar{u}_n = u_n' + iu_n'' \text{ и т.д.}$$

$\bar{E}_2, \bar{G}_2$  - кажущиеся или условные модули, характеризующие конструкцию;

$E_1, G_1$  - модули материала (резины) в области линейного деформирования;

$\beta_{0n}, \beta_{0z}$  - параметры жесткости, соответствующие линейной области деформирования;

$F^{\cdot}$  - функции, описывающие зависимость модуля сдвига материала от амплитуды деформации,  $F^{\cdot}(0) = 1$ ;

$G_0, E_0$  - некоторые отсчетные модули, соответствующие частоте  $\omega_0$  и температуре  $\theta$ ;

$\epsilon$  - среднеобъемная интенсивность деформаций.

Для параметров среднеобъемной интенсивности деформаций применительно к ЭЭК при сжатии, сдвиге, комбинационном нагружении, имеют место следующие выражения [72]

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_{0n} [(1 + \nu)\beta_{0n}]^{\frac{1}{2}}; \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_{0z} \left( \frac{\beta_{0z}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (22)$$

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon_{0n}^2 \beta_{0n} + 2(1 + \nu)\epsilon_{0z}^2 \beta_{0z}]^{\frac{1}{2}},$$

где  $\epsilon_{0n}, \epsilon_{0z}$  - деформации торца ЭЭК под действием нормальной  $\bar{N}$ , и касательной  $\bar{K}$ , гармонических сил.

Инженерный метод расчета механических, в том числе силовых характеристик ЭЭК, состоит в конкретизации модели (21), (22) путем последовательного определения ее параметров:  $\beta_{0n}, \beta_{0z}, F^{\cdot}, \bar{\epsilon}, \bar{\sigma}$  в соответствии с заданными формой ЭЭК, маркой резины и условиями эксплуатации ЭЭК [75]. При этом модуль сдвига материала зависит от амплитуды деформаций, температуры и частоты следующим образом

$$\bar{G} = \bar{G}(\omega, \theta, \epsilon), \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}'(\omega, \theta) F^{\cdot}(\bar{\epsilon}),$$

где  $\epsilon$  - интенсивность амплитуды деформации,

$$\epsilon^2 = (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2), \quad \bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}_i - \frac{1}{3}\bar{\epsilon}_0. \quad (23)$$

При конкретизации функций  $F^{\cdot}(\bar{\epsilon})$  используются экспериментальные зависимости  $\bar{G}'$  и  $\bar{G}''$  от амплитуды деформации. Для получения наиболее общих результатов в качестве

базовых характеристик принимаются классические, существенно нелинейные зависимости Пейна [77], рис. 1, построенные для бутылкаучука в широкой области изменения амплитуд деформаций и аппроксимируемые при численных расчетах следующим образом

$$\frac{G\sigma}{G_0} = \begin{cases} 1 - 10^{(0,3075\gamma + 0,317)}, & \gamma < 0,006, \\ -0,804 \lg \gamma - 0,937, & 0,006 < \gamma < 0,02, \\ 0,0765\gamma^{-0,45} & 0,02 < \gamma < 0,3. \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{\sigma}{G_0} = \begin{cases} 0,933 + 0,655 \cdot 10^3 \gamma + 0,0121 \cdot 10^6 \gamma^2, & \gamma < 0,007, \\ 0,65 + 2,36 \cdot 10^3 \gamma - 0,80 \cdot 10^6 \gamma^2, & 0,007 < \gamma < 0, \\ -0,104 - 1,3601 \mu \gamma, & 0,02 < \gamma < 0,3 \end{cases}$$

Представленные на рис. 1 данные обобщаются на случай многослойной деформации путем использования вытекающей из формулы (23) связи интенсивности деформации с удвоенной амплитудой деформации сдвига

$$e = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}, F^*(e) = \frac{G^*(\sqrt{2}e)}{G_0}$$

т.е. заменой в формулах (24)  $\gamma$  на  $\sqrt{2}e$  [36].

Основные результаты расчета отражены на примере плоских призматических элементов сжатия (рис. 2). Очевидны следующие закономерности: физическая нелинейность материала проявляется в зависимости механических характеристик ЭЖ от амплитуды деформации. При этом кривые, отвечающие разным соотношениям размеров  $y_0/y_0 = H/L$ ,  $L$  - длина ЭЖ) смещены относительно друг друга и экспериментальных данных (штриховые линии), отвечающих однородному НДС в соответствии с нелинейными зависимостями Пейна. Их удается совместить путем введения параметра среднеобъемной интенсивности амплитуд деформаций  $\bar{e}$ . В [72] установлено, что указанные закономерности справедливы и для резины с другим характером физической нелинейности.

Таким образом, полученные по результатам экспериментальных исследований кривые ползучести и релаксации, па-

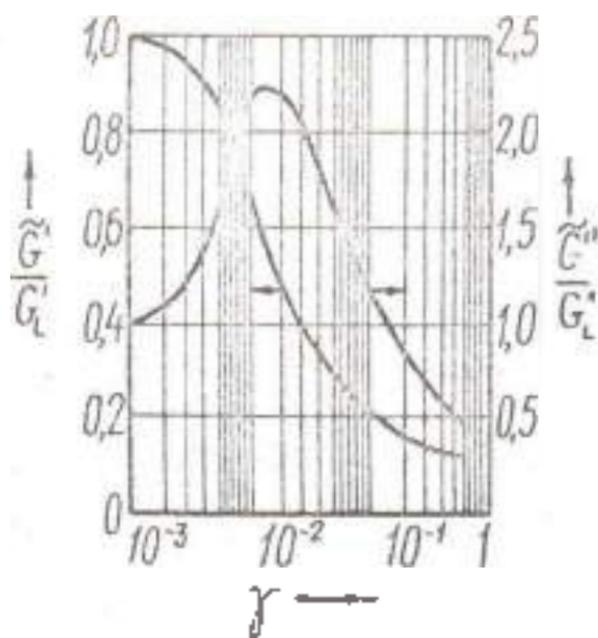


Рис. 1. Базовые амплитудные зависимости компонент комплексного модуля сдвига

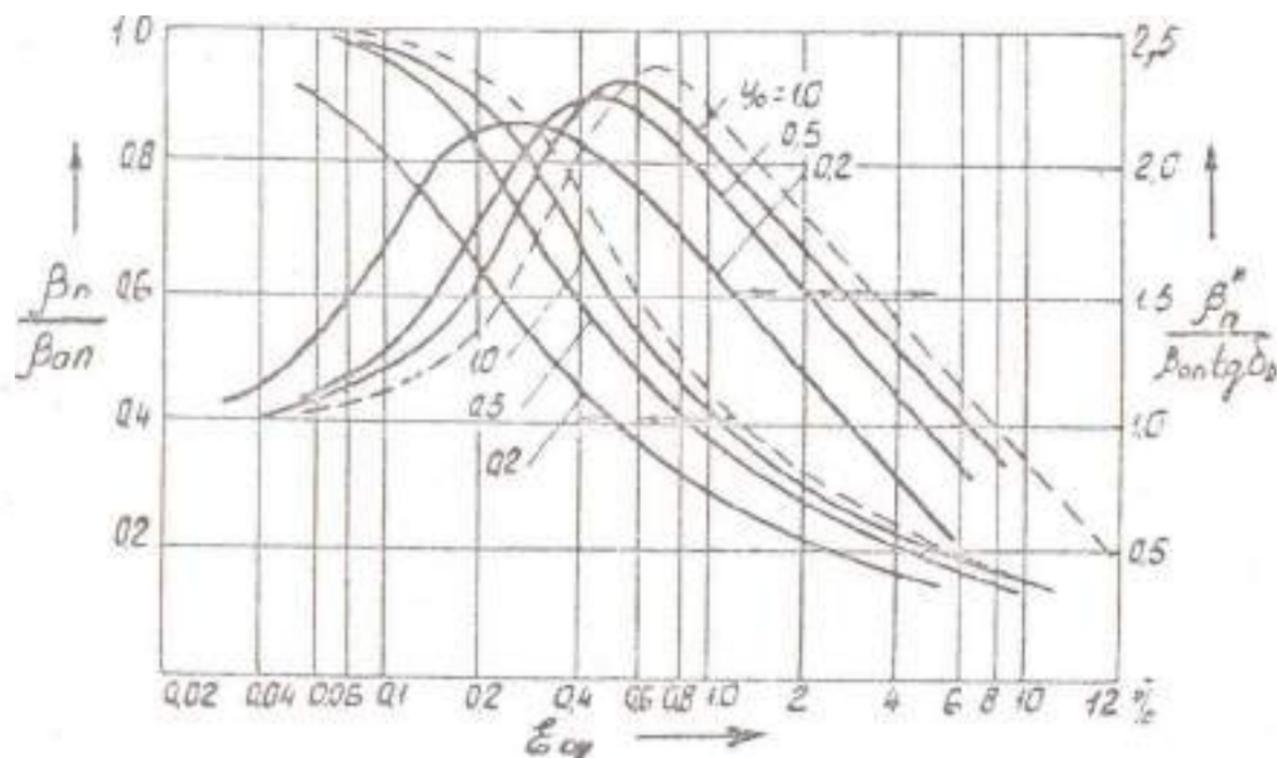


Рис. 2. Механические характеристики ЭЖ в зависимости от амплитуды деформации и соотношения размеров

параметры петель гистерезиса, частотные и температурные зависимости модуля сдвига и коэффициента поглощения энергии с использованием разработанных математических методов позволяют определить реологические параметры резины в широком интервале изменения режимов нагружения и температур. Для описания механического поведения резины применялись соотношения линейной теории вязкоупругости типа (1), (2).

В качестве ядер релаксации использовалась дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова  $\sum_{\alpha} \beta_{\alpha} t^{-\nu_{\alpha}}$ , а также исследовалась возможность применения ядра релаксации А.Ф. Ржаницина.

Реология стареющих материалов. Реология нестареющих материалов достаточно хорошо описывается в рамках наследственной теории вязкоупругости Больцмана-Вольтерра с ядрами разностного вида (8), (10), (11), (13) (см. табл. 1).

К уравнениям с разностными ядрами применима алгебра резольвентных операторов, методы преобразования Лапласа-Карсона, предельные теории и др. Существуют и такие процессы, которые описываются неразностными ядрами. Если свойства материала меняются со временем, то доминирование о событии зависит не только от времени, отделяющего настоящий момент времени  $t$  от момента  $\tau$ , (разность  $t-\tau$ ), но также от состояния материала в момент  $\tau$  (возраст материала), что учитывается при помощи множителя, зависящего от  $\tau$ . Это так называемые неразностные ядра, т.е. ядра более общего вида, что непосредственно отражается на записи ядра  $K(t, \tau)$ . К таким ядрам указанные выше методы в общем случае неприменимы. Поэтому фактическое нахождение решений уравнений Вольтерра с такими ядрами встречает значительные трудности. Кроме того, при экспериментальном определении ядер ползучести и релаксации нестареющих материалов из опытов на простую ползучесть необходимо найти

лишь один параметр - длительность нагружения образца. В то время как для стареющих материалов таких параметров по крайней мере два. Кроме длительности времени нагружения необходимо знать еще и возраст, при котором материал был нагружен  $t$ .

Проведенные исследования, посвященные ползучести стареющих материалов, относятся, в основном, к исследованиям ползучести бетонов [12, 38, 78, 79]. В последнее время они получили интенсивное развитие в связи с изучением ползучести железобетона, полимеров, пластиков, льда, грунтов, горных пород и других материалов. Для практического приложения этих исследований существенно значение имеет выбор ядер ползучести и релаксации такого типа, чтобы они, с одной стороны, достаточно точно воспроизводили основные свойства стареющих материалов, а с другой стороны, приводили бы к решению уравнений теории ползучести для стареющих материалов в квадратурах. В работах [12, 79] формулируются основные условия, которым должны удовлетворять функции, описывающие деформативные свойства стареющих материалов.

Рассмотрим более подробно эти требования.

Уравнение ползучести стареющих материалов при основном напряженном состоянии может быть записано

$$E(t)\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t K(t, \tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (25)$$

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$$

или уравнение релаксации напряжения

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_0^t B(t, \tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (26)$$

$$B(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} [E(t) + Q(t, \tau)],$$

где  $\varepsilon(t)$ ,  $\sigma(t)$  - деформация и напряжение в момент времени  $t$  соответственно;

$t$  - возраст материала в момент нагружения;

$E(t)$  - переменный модуль упруго-мгновенной деформации;

ЦНП:

$K(t, \tau)$ ,  $R(t, \tau)$  - ядра ползучести и релаксации;

$C(t, \tau)$ ,  $\Phi(t, \tau)$  - меры ползучести и релаксации.

Мера ползучести  $C(t, \tau)$  представляет собой относительную деформацию ползучести стареющего материала к моменту времени  $t$ , вызванную единичным напряжением, приложенным в возрасте  $\tau$ . Ядра ползучести и релаксации  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  характеризуют реакцию стареющего материала на единичный импульс, приложенный в некотором возрасте  $\tau$ , однозначно выражаются через модуль упруго-мгновенной деформации  $E(t)$  и меры ползучести  $C(t, \tau)$  и релаксации  $\Phi(t, \tau)$ . Получаемые из опытов  $E(t)$ ,  $C(t, \tau)$ , и  $\Phi(t, \tau)$  обычно аппроксимируются аналитическими выражениями, выбор которых в силу соотношений (25) и (26) эквивалентен выбору ядер  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$ . Из общих физических соображений эти функции должны обладать следующими свойствами [12]. Модуль упруго-мгновенной деформации  $E(t)$  - неотрицательная, выпуклая вверх функция, стремящаяся к конечному пределу при  $t \rightarrow \infty$ .

Мера ползучести  $C(t, \tau)$  - ограниченная неотрицательная функция, возрастающая и выпуклая вверх по первому аргументу.

Для старого материала мера ползучести  $C(t, \tau)$  должна мало отличаться от функции  $C_t(t - \tau)$ , зависящей от разности аргументов. Более подробно ограничения, накладываемые на указанные функции, приведены в [12].

Аналитические выражения, предложенные большинством исследователей для аппроксимации меры ползучести стареющих материалов, могут быть представлены в виде

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^n A_i(t) B_i(\tau) \quad (27)$$

где  $A_i(t)$  - функция времени  $t$ ;

$\nu_1(t)$  - функция возраста материала  $t$ .

Ядро уравнения (25), порожаемое мерой ползучести вида (27), является вырожденным (оно представляет собой произведение функции от  $t$  на функцию от  $t$ ), что позволяет свести интегральное уравнение к дифференциальному. Существенно отметить, что единственное разностное вырожденное ядро - это экспоненциальное ядро вида

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^n k_i \exp[\beta_i(t - \tau)],$$

где  $k_i, \beta_i$  - параметры ядра.

Одно из простейших выражений для меры ползучести имеет вид [12]

$$C(t - \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau), \quad (28)$$

где  $\varphi(\tau)$  - функция старения материала;

$f(t - \tau)$  - функция, характеризующая наследственные свойства материала.

Функция  $\varphi(\tau)$ , определяющая процесс старения материала, монотонно убывает и при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к конечному пределу

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = C_0,$$

где  $C_0$  - постоянная, характеризующая предельное значение меры ползучести материала в его старом возрасте.

Функция  $f(t - \tau)$ , характеризующая наследственные свойства материала, должна изменяться в пределах

$$0 \leq f(t - \tau) \leq 1, \quad 0 \leq t - \tau \leq \infty$$

Функцию старения  $\varphi(\tau)$  обычно аппроксимируют следующим образом

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^n A_k / \tau^k \quad (29)$$

или

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^n A_k \exp[-\lambda_k \tau] \quad (30)$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(r + \tau)^k} \quad (31)$$

где  $C_0, A_k, r$  - константы материала.

Функция  $f(t, \tau)$  может быть аппроксимирована суммой экспонент

$$f(t, \tau) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \exp[-\gamma_k(t - \tau)], \quad (32)$$

где  $\lambda_k, \gamma_k$  - параметры постоянные для данного материала, причем должно быть

$$\lambda_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j; \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

В частности, (при  $n = 1$ ) для меры ползучести получают выражение

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) \{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]\} \quad (33)$$

я ядро ползучести  $K(t, \tau)$  будет иметь вид

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) (1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]) \right],$$

Важным достоинством меры ползучести в виде (33) является возможность решения уравнения (25) в квадратурах

$$\sigma(t) = E(t)c(t) - \int_0^t K(t, \tau) E(\tau) c(\tau) d\tau,$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ E(\tau) - \gamma \varphi(\tau) E^2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right],$$

где

$$\varphi(\tau) = \int_0^{\tau} \left[ \gamma(1 + \varphi(\tau) E(\tau)) - \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} \right] d\tau.$$

При  $E(\tau) = E_0 = \text{const}$  и  $\varphi(\tau) = E_0 = \text{const}$  решение выражается через табулированную неполную гамма-функцию [38].

Соотношения (29)-(33) для меры ползучести  $c(t, \tau)$  предсказывают конечную скорость деформации, что может привести к погрешностям, если с помощью рассмотренных ядер описываются процессы деформирования при быстро изменяющихся нагрузках, динамических воздействиях. Поэтому для описания процессов деформирования стареющих материалов аналитические выражения меры ползучести должны быть построены на основе слабосингулярных функций [29]. Такие выражения для меры ползучести, имеющие структуру (28), построены в [12, 79], при этом

$$f(t-\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t-\tau} \exp(-u) u^\alpha du, \quad (34)$$

или

$$f(t-\tau) = \int_0^{t-\tau} \mathfrak{E}_\alpha(-\beta, u) du, \quad (35)$$

(  $\rho > 0; \beta > 0; -1 < \alpha < 0$  )

где  $\Gamma(\alpha+1)$  - гамма-функция параметра  $\alpha+1$ ;

$\mathfrak{E}_\alpha$  - функция Работнова (8);

$\alpha, \rho, \beta$  - параметры ядер, определяемые по опытным данным.

Ядра, построенные на основе (28), (34) и (28), (35), являются слабосингулярными и для стареющего материала вырождаются в хорошо изученные ядра Работнова и Ржаницина.

Однако, для таких ядер, описывающих ползучесть стареющих материалов, не имеет места обращения уравнения (25) в квадратурах, численное решение таких уравнений со слабосингулярными ядрами встречает значительные трудности. В [70] дается общий метод построения слабосингулярных ядер ползучести и релаксации для стареющих материалов, позволяющий получить решения уравнения (25) в квадратурах.

Структура ядер ползучести [79] принята в одном из видов

$$K_1(t, \tau) = Q(\tau) + B(t-\tau) + \int_0^{\tau} Q(x)B(t-x)dx, \quad (36)$$

$$K_2(t, \tau) = Q(\tau) + A(t-\tau) + Q(\tau) \int_0^{\tau} A(t-x)dx, \quad (37)$$

где  $Q(\tau)$  - ядро, зависящее от возраста  $\tau$ ;

$A(t-\tau)$  - положительное инвариантное слабосингулярное ядро, резольвента которого  $M(t-\tau)$  известна.

Ядро  $Q(\tau)$  удовлетворяет условиям

$$Q(\tau) > 0; Q'(\tau) < 0; Q''(\tau) > 0; \tau < \infty$$

$$\int_0^{\infty} Q(x)dx = \Psi(\tau) < \infty.$$

Решение уравнения (25) с ядрами  $K_i(t, \tau) (i=1,2)$  имеет вид

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int S_1(t, \tau)E(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau,$$

где  $S_1(t, \tau)$  - резольвенты ядер (36) и (37), определяемые по формулам

$$S_1(t, \tau) = B(t - \tau) + G(t, \tau) \cdot \int B(t - \tau)G(x, \tau)dx;$$

$$S_2(t, \tau) = B(t - \tau) + G(t, \tau) \cdot \int G(t, x)B(\tau - x)dx;$$

$G(t, \tau)$  - резольвента ядра  $Q(t, \tau)$

$$G(t, \tau) = Q(t, \tau) \exp\left(-\int Q(x)dx\right).$$

При конкретной реализации такого метода можно принять  $B(t - \tau)$  ядро в форме Ржаницина [38]

$$B(t - \tau) = \chi \exp\left[-\rho(t - \tau)\right] \frac{(t - \tau)^{\rho - 1}}{\Gamma(\rho)} \quad (38)$$

$(\chi > 0, \rho > 0, \alpha \in (0, 1))$

Резольвента ядра (38) выражается через табулированную  $\mathcal{E}_\alpha$ -функцию Работнова (8)

$$B(t - \tau) = \chi \exp[-\rho(t - \tau)] \mathcal{E}_{\rho, \rho}(-\chi(t - \tau)) \quad (39)$$

где  $\chi, \beta, \alpha$  - параметры ядер.

А ядро  $Q(t, \tau)$  можно взять в виде затухающей экспоненты.

Ядра (36) и (37) в этом случае будут иметь вид

$$K_1(t, \tau) = \lambda e^{-\mu t} + \frac{\lambda e^{-\mu(t)}(t - \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda e^{-\mu t}}{\xi_1^{\alpha}} \chi(\alpha, \xi_1)(t - \tau),$$

$$\lambda > 0, \chi > 0, \mu > 0, \alpha > 0, \alpha \in (0, 1), \xi_1 = \mu + \alpha \xi_2 = \rho,$$

где  $\chi(\alpha, \xi) = \int_0^1 e^{-\xi x} x^{\alpha - 1} dx$  - неполная гамма-функция.

Параметры ядер (40) определяются из условий наилучшей аппроксимации экспериментальных кривых ползучести в области линейного деформирования.

Изложенные выше методы получения резольвентных ядер ползучести и релаксации для стареющих материалов требуют достаточно большого количества экспериментов.

Практика применения таких ядер разработана в настоящее время, в основном, для бетонов, но данный подход может быть использован при определении ядер ползучести и релаксации учитывающих старение вязкоупругого материала.

Вариант феноменологической модели деформирования вязкоупругого стареющего материала предложен в [65]. Как частные случаи из [65] вытекают неравные соотношения, применяемые для описания деформационных свойств стареющих материалов в случае использования экспоненциальных ядер, и при соответствующих допущениях вариант уравнения вязкоупругого наследственного тела в форме аналогий [28]. Здесь подтверждена справедливость, полученного экспериментально для ряда полимеров, предложения, что весь эффект от старения материала может быть учтен коэффициентом редукции.

## ЧАСТЬ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

### ВВЕДЕНИЕ

Решение задач квазистатики и динамики вязкоупругих систем сводится, как правило, к анализу функциональных зависимостей, содержащих ограниченный набор функций времени или частоты. Эти функции описывают механическую реакцию материала. Это, так называемые, механические характеристики материала (резин). К ним относятся приведенные выше функции ползучести и релаксации, синус и косинус преобразования ядер ползучести и релаксации.

По результатам экспериментальных исследований обычно получают кривые ползучести, релаксации и параметры петли гистерезиса при различных частотах, по которым находят механические характеристики. Затем реологические параметры выражают (явно или неявно) через механические ха-

характеристики при фиксированных значениях времени или частоты циклического деформирования.

Для определения реологических параметров используют несколько методов, дополняющих друг друга. К ним относятся определение реологических параметров непосредственно по кривой релаксации; по релаксационному пику на частотной зависимости коэффициента диссипации  $\psi - I g \omega$ ; по параметрам петли гистерезиса при произвольной частоте нагружения.

Если в качестве ядра релаксации используются функции вида (8), (10), (13) и обобщенное время релаксации порядка  $t_0 = 10^4 + 10^6$  с (что характерно для наполненных резин), определение реологических параметров целесообразно проводить непосредственно по кривым релаксации и ползучести. При исследовании ненаполненных амортизационных резин, для которых обобщенное время релаксации весьма мало  $t_0 = 10^1 + 10$  с, целесообразно использовать метод обработки деформационных петель гистерезиса, полученных в широком частотном диапазоне. При наличии экспериментальных кривых  $\psi - I g \omega$  в широком частотном диапазоне с четко обозначенным релаксационным пиком (см. рис. 7, кривые получены на специальном стенде типа "Инстрон"), реологические параметры определяют по релаксационному пику на кривой  $\psi - I g \omega$ . В общем случае при определении реологических параметров новых, особенно опытных марок резин, используют, как правило комбинацию перечисленных методов и сравнивают полученные результаты.

Перечисленные выше методы определения реологических параметров требуют проведения целого комплекса экспериментальных исследований по определению физико-механических характеристик резин и резиновых элементов, включающих определение квазистатических характеристик (условно-равновесных)  $E_\infty$ ,  $G_\infty$ , мгновенных значений  $E_0$  и  $G_0$ , динамического модуля сдвига  $G_\infty(\omega)$  и технического ко-

эфициента диссипации энергии  $\psi$ , регистрации кривых ползучести и релаксации.

**Общие требования к проведению физико-механических испытаний.** На общие требования к проведению физико-механических испытаний резины существуют стандарты [80-83], устанавливающие требования к способам заготовки образцов, проведению испытаний и обработке их результатов. При отборе образцов необходимо выполнять следующие требования:

1) образцы отбираются по величине условно-равновесного модуля сжатия или сдвига, а также по твердости; образцы с различными дефектами резины, такими как царапины, вырывы, а также недовулканизованные образцы не испытываются;

2) исходя из жесткости образцов, они комплектуются по партиям, разброс жесткости не должен превышать 5 %; для установления однородности резинового массива необходимо проводить выборочное расчленение образцов.

**Определение квазистатических характеристик.** В качестве экспериментального стенда для получения статических (условно-равновесных) характеристик  $E_\infty$  и  $G_\infty$  резиновых элементов использовалась установка, подробно описанная в [32], позволяющая фиксировать величину деформирующей силы  $P$  и величину относительной деформации  $\varepsilon$  или  $\gamma$ . Деформация образцов измерялась индикатором часового типа с точностью до 0,01 мм. Выдержки образцов под нагрузкой соответствовала 1 ч при температуре 343 К.

Нагружению подвергались блоки резинометаллические (БРМ), шарниры резинометаллические (ШРМ), цилиндрические (полные и сплошные) детали.

Значения установившегося модуля  $E_\infty$  или  $G_\infty$  находились по величине деформирующей силы  $P_\infty$ , определяемой экстраполяцией линейного участка кривой релаксации на ось

сил  $P$  (рис. 3), при фиксированной величине относительной деформации  $\varepsilon_{\infty}$  (или  $y_{\infty}$ ) по формулам:

для пары плоских элементов сдвига типа БРМ

$$G_0 = \frac{P_0 h}{2F \Delta_{\infty}},$$

где  $F$  - площадь сдвига;

для цилиндрических элементов при сжатии

$$E_0 = \frac{P_0 F}{2F_0 \Delta_{\infty}},$$

где  $F_0$  - площадь сжатия;  $h$  - высота элемента;  $\Delta_{\infty}$  - деформация.

**Определение мгновенного модуля сдвига.** При определении мгновенных значений  $E_0$  и  $G_0$  применялась специально созданная установка (рис. 4), которая позволяла реализовать быстрое нагружение (время нагружения  $0,05 \pm 0,1$  с). Установка состоит (см. рис. 4) с электрического магнита 7 с неподвижной пластиной 6, который притягивает через подвижную пластину 5 образцы 4, расположенные в латушной скобе 3. Сила реакции резиновых образцов фиксируется тензоизмерительной втулкой 2, которая закреплена к станине 1, затем передается через тензоусилитель БАНЧ на шлейфовый осциллограф Н-105. Величина деформации образцов  $\Delta$  определяется индикатором часового типа. После расинфровки осциллограмм рассчитываются мгновенные значения модулей  $E_0$  и  $G_0$ .

**Определение динамических характеристик.** Нагружение при определении динамических, механических параметров и технического коэффициента поглощения энергии  $\psi$  резинометаллических деталей целесообразно производить с помощью деформационных машин с эксцентриковым регулируемым приводом при гармоническом стационарном режиме. Конструкция экспериментальных стенов должна позволять исследовать резиновые детали: а) в зависимости от частоты нагружения при постоянной амплитуде; б) в зависимости от

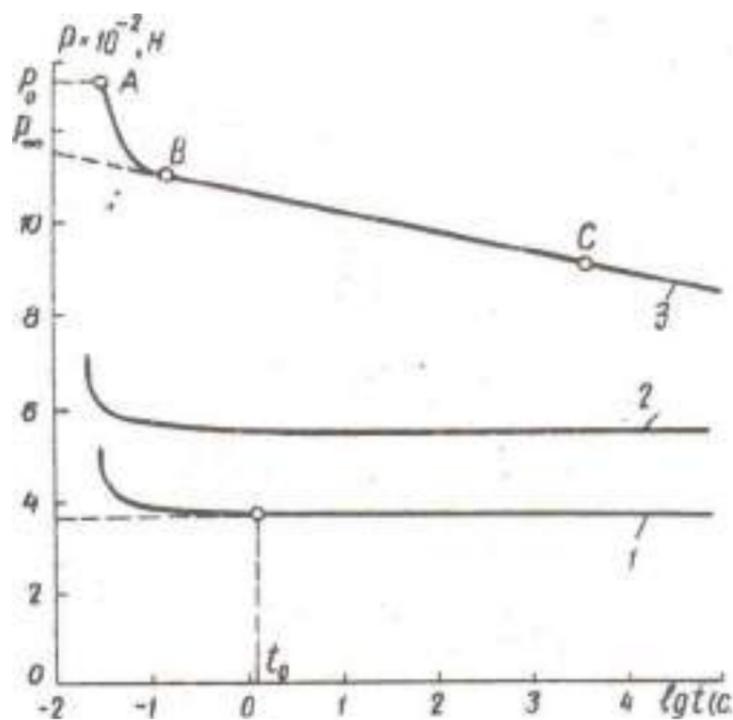


Рис. 3. Кривые релаксации при сдвиге БРМ 101 для резины 51-1562 (1,2) и 2959 (3)

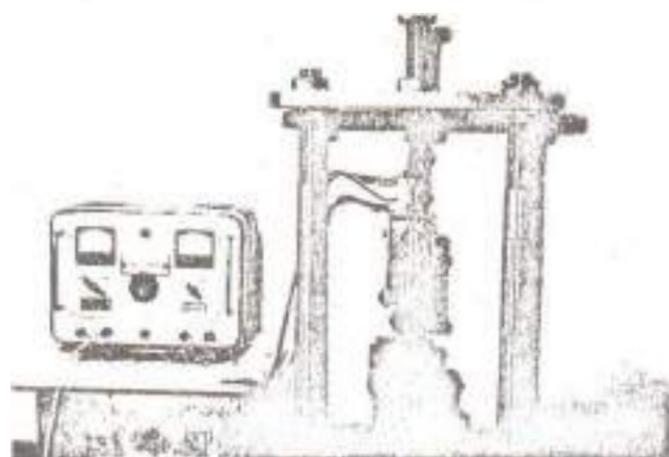
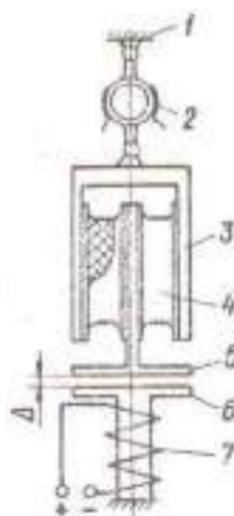


Рис. 4. Схема (а) и общий вид (б) установки для определения мгновенного значения модуля

амплитуды нагружения при постоянной частоте. На рис. 5 представлена одна из конструкций стенда, на котором производят нагружение при определении динамических характеристик плоских резинометаллических элементов при сдвиге.

При экспериментальном изучении механических характеристик резины используется стандартная тензометрическая аппаратура, состоящая из магнитоэлектрического осциллографа типа Н-105, электронно-лучевого осциллографа С1-19Б с двумя усилителями постоянного тока, тензоусилителя 8А114, блоков питания и фоторегистрирующего приспособления. На рис. 6 показана блок-схема подключения измерительной аппаратуры применительно к исследованию элементов сдвига. Эксцентриковый привод 3 экспериментального стенда задавал одноосные гармонические перемещения скобе 8 и присоединенным к ней резинометаллическим элементам 1. Перемещение скобы измерялось реокардным датчиком 2. Электрические сигналы, пропорциональные величине заданного перемещения, через усилитель 5 подавались на горизонтальную ось электронного осциллографа 6; на вертикальную ось подавались сигналы, пропорциональные силе реакции резинового элемента, регистрируемые тензонизмерительным кольцом 9. Числовые данные получали путем измерений пелетей гистерезиса, фотографируемых с экрана осциллографа 6; и измерений осциллограмм силы реакции, фиксируемых шлейфовым осциллографом 7. Для того, чтобы получить действительные результаты измерений, перед каждым испытанием проводится специальная проверка регистрирующей аппаратуры.

Определение реологических параметров ЭЭК по кривым релаксации и ползучести. В этом случае определение реологических параметров осуществляется следующим образом. По экспериментальным кривым релаксации напряжения (см. рис. 3, испытывались резиновые элементы типа БРМ101 с размерами резинового слоя  $0,100 \times 0,060 \times 0,035$  и из средне-наполненных резин) определяли условно-равновесный мо-

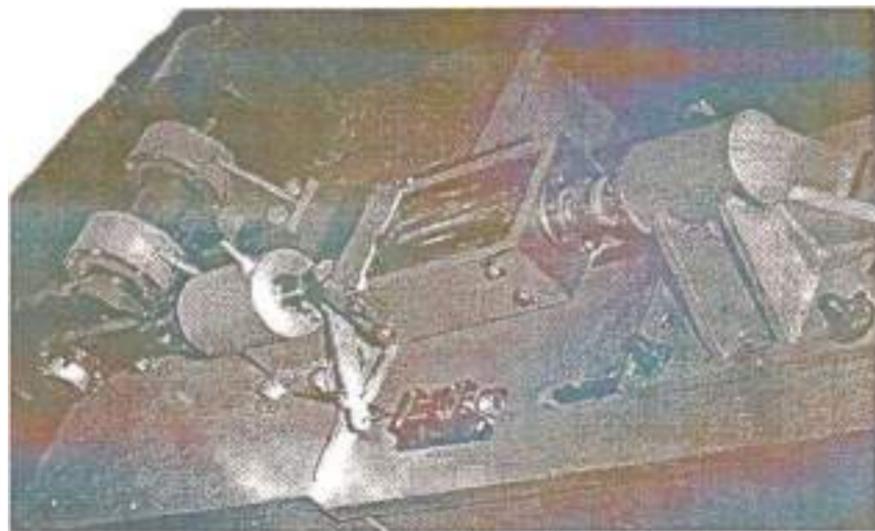


Рис. 5. Испытательный стенд для динамического нагружения на сдвиг плоских резинометаллических элементов

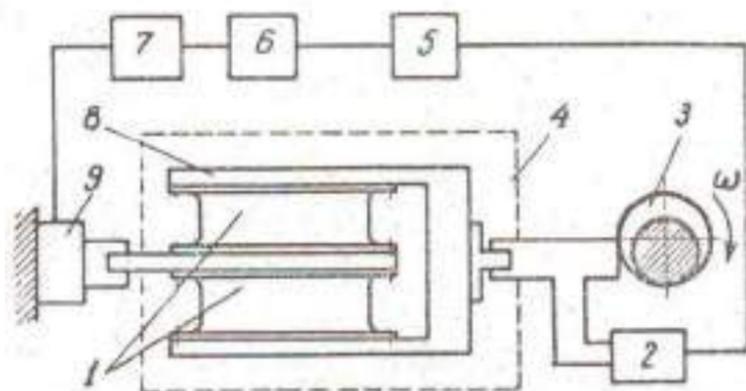


Рис. 6. Схема экспериментальной установки

дуль сдвига  $G_{\infty}$  и обобщенное время релаксации  $t_0$ , мгновенный модуль сдвига  $G_0$  определяли по максимуму на кривой релаксации (см. рис. 7), полученному при мгновенном (в данном случае за 0,01÷0,02 с) нагружении образцов. Определяемые таким образом модули  $G_0$  и  $G_{\infty}$  приведены в табл. 3:  $\psi$  - коэффициент диссипации энергии,  $G_{\text{дин}}$  - динамический модуль сдвига резины).

Далее параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  ядер (8), (10), (11), являющиеся реологическими параметрами материала (резины), определяют с помощью применения к экспериментальной кривой релаксации (или ползучести) численного преобразования Лапласа-Карсона [84,95], к полученному изображению применяется квадратичный метод поиска оптимальных параметров без перехода к оригиналу. Методики таких вычислений приведены в [86-89] и требуют применения вычислительной техники [40].

Таблица 3. Основной состав и механические характеристики резины

№ пп	Шифр резины	Тип каучука	Наполнение, мас.ч		$G_0$ , МПа	$G_{\text{дин}}$ , МПа	$G_{\infty}$ , МПа	$\psi$
			оксид цинка	технич. углерод ТМ-13				
1.	2959	НК	15	45	1,76	1,59	0,74	0,31
2.	1378	СКН+СКД	5	15	1,30	0,94	0,73	0,13
3.	1224	НК	50	5	1,30	1,16	0,93	0,11
4.	4з	СКН-3	27	34	1,60	1,24	0,90	0,40
5.	11-67Л	СКН	20	15	1,50	0,88	0,78	0,35
6.	11-59Л	СКН-3	40	10	1,50	0,88	0,72	0,32
7.	28Э	СКН-3	10	20	1,70	1,23	1,12	0,30
8.	310	СКН-3	15	15	1,40	0,91	0,90	0,25
9.	169	СКН-3	5	20	1,50	1,23	0,93	0,30
10.	51-1562	СКН-3	5	5	0,78	0,72	0,51	0,17
11.	51-1711	СКН-3	5	15	1,30	1,02	0,71	0,50
12.	51-1714	СКН-3	5	20	2,00	1,40	1,10	0,90

Исходная информация обычно задается в виде совокупности значений моментов времени  $t = t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  и соответствующих им значений напряжения  $\sigma_i = \sigma(t_i)$  (релаксация) или деформаций  $\varepsilon_i = \varepsilon(t_i)$  (ползучесть), последние представляют собой экспериментальные осциллограммы сил или перемещений.

Задача состоит в том, чтобы по имеющейся совокупности экспериментальных точек  $(t_i, \sigma_i)$  или  $(t_i, \varepsilon_i)$  найти параметры  $\alpha, \beta, \lambda$  аппроксимирующей привой, построенной по формулам (1) или (2) с использованием ядер (8), (10), (11), (13)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t R(\alpha, \beta, t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (41)$$

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \lambda \int_0^t K(\alpha, \beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (42)$$

$$\left( \lambda = \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

При использовании кривой простой релаксации  $\sigma(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$  согласно [32] соотношение (41) с ядром (8) перепишется

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[ 1 - \chi \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta, t - \tau) \right] \quad (43)$$

$$\chi \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta, t - \tau) \cdot 1 = \chi \int_0^t \mathcal{D}_\alpha (-\beta, t - \tau) d\tau.$$

Из-за чрезмерной сложности аналитического выражения интеграла в (41, 42) при обработке экспериментальных кривых возникают определенные трудности. Для ядра (8), в частности, эти трудности преодолеваются при помощи аппроксимации интегральных операторов с ядром (8) [60]

$$\chi \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta, t - \tau) = \chi \int_0^t \mathcal{D}_\alpha (-\beta, t - \tau) d\tau \approx \frac{\chi}{\beta} \left[ 1 - e^{-\beta t} \right]$$

$$(r = 1 + \alpha)$$

Упрощение задачи достигается применением численного преобразования Лалласа-Карсона исходной экспериментальной кривой, необходимые параметры определяются непо-

средственно по изображению без перехода к оригиналу, аналитическое выражение которого оказывается более простым.

Аналитическое выражение большинства используемых в механике полимеров ядер в пространстве изображений по Лапласу

$$f^L(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

может быть представлено в виде функции [87]

$$\lambda P_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, A}^L(B, p) = \lambda \left[ \left[ (p^{\alpha+1} + \beta)^{\gamma} + A \right]^{\delta} + B \right]^{-1} \quad (45)$$

зависящей от семи параметров, определяемых по экспериментальным данным, и обобщающей ядра Абеля ( $A=B=\beta=0$ ,  $\gamma=\delta=1$ ), Ржаницына ( $A=B=\alpha=0$ ,  $\delta=1$ ), Работнова ( $A=B=0$ ,  $\delta=\gamma=1$ ), Вульфсон-Колтунова ( $B=\alpha=0$ ,  $\delta=1$ ), Гаврильяка-Негами ( $A=B=0$ ,  $\delta=1$ ), Шермергора ( $B=0$ ,  $\delta=1$ ,  $\alpha=-2$ ). С помощью (45) удается описать асимметрию релаксационного спектра и фазовой диаграммы комплексного модуля [87].

Оригинал функций  $P_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, A}^L(B, t)$  может быть представлен в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по времени, однако в практических вычислениях применение этого ряда затруднительно из-за медленной сходимости при больших  $t$ . Поэтому оригинал целесообразно восстанавливать на основе численных методов обращения преобразования Лапласа.

Наиболее часто используются две различные схемы обращения преобразования Лапласа - применение известной формулы Меллина [85]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^L(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \phi(p/t) \cdot p^{-1} e^t dt \quad (46)$$

и формулы Видлера (87)

$$f(t) = W_n(f, t) = (-1)^n p^{-n} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^{(n)}(p) \dots \quad (47)$$

Здесь  $c_1, c_2$  - произвольные положительные числа;  $p$  - параметры преобразования,  $\text{Re } p > 0$ ;  $f(t), f^{-1}(p)$  - функция и ее изображение по Лапласу параметра  $p$ ;  $f^{(n)}$  - производная  $n$ -ой степени изображения функции;  $\varphi(p) = p f^{-1}(p)$ . Входящие в (47) производные изображения могут быть вычислены по формулам численного дифференцирования. Для приближенного вычисления интеграла в (46) используют интерполяционную квадратурную формулу с весом  $p^1 e^{\beta t}$  вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p^1 e^{\beta t} \varphi\left(\frac{p}{t}\right) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p, t_k) \quad (48)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - различны и лежат в полуплоскости  $\text{Re } p > 0$ ,  $\text{Re } \beta > 0$  [85].

Формула (48) точна для функций  $f(t) = t^j, j = 0, 1, \dots, n-1$ . За счет специального выбора узлов  $p_k$  и коэффициентов  $A_k$  формула (48) может быть сделана наивысшей степени точности. Применение формул наивысшей степени точности оправдано, если оригинал может быть хорошо приближен многочленом от переменной  $t$ .

Для полимерных материалов функции вязучести и релаксации изменяются во времени медленно и допускают хорошее приближение многочленами от переменной  $t^a (0 < a < 1)$ . В таком случае следует применять формулы наивысшей степени точности (48), точные для функций  $f(t) = (t^a)^j, j = 0, 1, \dots, 2n-1$ , то есть для дробных степеней времени.

Преобразования Лапласа ядер (8) и (10) имеют вид для функции  $\mathcal{E}_a(f, t)$

$$\mathcal{E}_a^L(\beta, p) = \int_0^{\infty} \mathcal{E}_a(\beta, t) t^{-a} dt = \frac{1}{p^a - \beta^a} \quad (49)$$

$(a = 1 + \alpha)$

Ржаницына

$$R_a^L(\beta_1, p) = \frac{\Gamma(a)}{(p - \beta_1)^{a+1}}, \quad |\beta_1| < 0 \quad (50)$$

В случае простой релаксации при ядре Работнова  $R(t-\tau) = \chi \mathcal{E}_\alpha(\beta t - \tau)$  формулы определения реологических параметров  $\alpha, \beta, \lambda$  имеют вид [86]

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\chi}{\beta} = \frac{\sigma_0 - \sigma_\infty}{\sigma_0}, \\ \beta &= \frac{\sigma^t(1) - \sigma_\infty}{\sigma^t(1) - \sigma_\infty}, \\ r &= \frac{1}{\ln p} \ln \left[ \beta \left[ 1 - \frac{\lambda \sigma_0}{p \sigma^t(p) - \sigma_\infty} \right] \right], \quad (r = 1 + \alpha) \end{aligned} \quad (51)$$

где  $\lambda, \chi, \beta$  - реологические параметры;

$\sigma_\infty, \sigma_0$  - равновесное и мгновенное значения релаксирующего напряжения;

$\sigma^t(p)$  - изображение по Лапласу функции релаксации;

$p$  - параметр преобразования Лапласа;

$\alpha$  - реологический параметр, параметр дробности  $\mathcal{E}_\alpha(\beta t - \tau)$  функции Работнова;

$t$  - время.

Обработка кривой релаксации при ядре А.Р. Ржандинца  $\chi \cdot \mathcal{E}_\alpha(\beta_1 t) = \chi t^\alpha e^{-\beta_1 t}$  ( $-1 < \alpha < 0, \beta_1 < 0$ ) приводит к формулам [86]

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\ln(p_2/p_1)} \ln \frac{\sigma_0 - p_1 \sigma^t(p_1)}{\sigma_0 - p_2 \sigma^t(p_2)}, \quad (p_1 \gg |\beta_1| p_2 \gg \beta_2, r = 1 + \alpha) \\ \chi \cdot m(r - \beta_1)^{-r} = \frac{\sigma_0 - \sigma_\infty}{\sigma_0}, \\ \beta_1 = -p \left[ \frac{\sigma_0 - p \sigma^t(p)}{\sigma_0 - \sigma_\infty} \right]^{1/r}, \end{cases} \quad (52)$$

где  $\alpha = 1 - r$  - реологический параметр;

$p_1, p_2, p$  - параметры преобразования Лапласа;

$\sigma_0$  - мгновенное значение релаксирующего напряжения;

$\sigma^t(p_1), \sigma^t(p_2), \sigma^t(p)$  - изображения по Лапласу функции релаксации параметров  $p_1, p_2, p$  соответственно;

$\chi, \beta_1$  - реологические параметры;

$\Gamma(r)$  - гамма-функция параметра  $r$ ;

$\sigma_{\infty}$  - равновесное значение релаксирующего напряжения;  
 $t$  - время.

Для эффективного вычисления преобразования Лапласа исходной кривой релаксации

$$\rho\sigma^L(p) = \int_0^{\infty} \sigma(t)e^{-pt} dt$$

используется квадратурная интерполяционная формула высшей  $2n-1$  алгебраической степени точности [84], которая для узлов интерполяции  $t_k$ , расположенных в корнях многочлена Лягерра  $L_n(t)$ , дает

$$\rho\sigma^L(p) = \int_0^{\infty} \sigma\left(\frac{t}{\rho}\right)e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n A_k \sigma\left(\frac{t_k}{\rho}\right).$$

Узлы  $t_k$  и коэффициенты  $A_k$  для различных  $n$  приведены в книге [84]. Последнее обстоятельство делает вычисления элементарными, если только результаты эксперимента позволяют отобразить значения  $\sigma(t)$  при  $t = \frac{t_k}{\rho}$ . Этот метод обработки реологических кривых может быть распространен на случай квазистатического эксперимента, если только в уравнениях (1), (2), известны зависимости  $\sigma(t)$  или  $\dot{\epsilon}(t)$  соответственно.

Ядра (8), (10), (13) пригодны для описания и кривых ползучести, обладающих горизонтальной асимптотой, формулы для определения параметров  $\alpha, \beta, \lambda$  и  $\chi$  в этом случае аналогичны (51) и (52).

Определение реологических параметров ядра (8) по обобщенным кривым ползучести (релаксации) эластомеров, полученным при использовании гипотезы температурно-временного соответствия, можно производить графоаналитическим методом [89,90]. Обобщенные вязкоупругие функции отличаются от обычных кривых протяженностью, составляющей 8-12 порядков в логарифмической шкале времени, а также резким различием условно мгновенного и равновесного модулей  $E_g/E_{\infty} = 10^2-10^3$ . Приближенные зависимости, связывающие положение точки перегиба нормированной экспери-

ментальной кривой ползучести  $\epsilon_0^2(t) = \frac{\epsilon(t) - \epsilon_0}{\epsilon_0}$  в полулгарифмических координатах (рис. 3) с параметрами дробно-экспоненциальной функции Работнова имеют вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\lambda}{3\beta} F_1(\alpha, 1) \quad (53)$$

$$F_1(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha} \mathfrak{Z}_\alpha(-\beta, x), \quad (54)$$

$$x = \beta t^{\alpha-1}, \quad (55)$$

где  $\varphi$  - угол наклона касательной к кривой ползучести в точке перегиба;

$\alpha, \lambda, \beta$  - реологические параметры;

$F_1(\alpha, x)$  - табулированные значения функции Работнова;

$t$  - время;

$x$  - промежуточная величина для определения значений  $\mathfrak{Z}_\alpha$ -функции по таблицам, а также асимптотическое значение максимальной деформации

$$\epsilon_{\max}(\infty) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{\lambda}{\beta} \right), \quad (56)$$

$\epsilon_{\max}$  - максимальное, равновесное значение деформации;

$\epsilon_0$  - начальное, мгновенное значение деформации.

Из соотношения (56) сразу получится значение отношения  $\lambda/\beta$ . После этого из (53) находится  $F_1(\alpha, 1)$  и с помощью таблицы [40] определяется  $\alpha$ . Далее по зависимости (55) вычисляют параметр  $\beta$  и по известному значению отношения  $\lambda/\beta$  - параметр  $\lambda$ .

**Пример расчета.** Применение описанной выше методики определения реологических параметров рассмотрим на примере обработки кривых релаксации при сдвиге элементов БРМ101 для резин 2959 и 51-1562 (см. рис. 3). Кривые релаксации напряжения получены на установке, схема которой описана выше, позволяющей реализовать быстрое нагружение и регистрировать в виде осциллограммы величину деформирующей силы при заданных уровнях постоянной де-

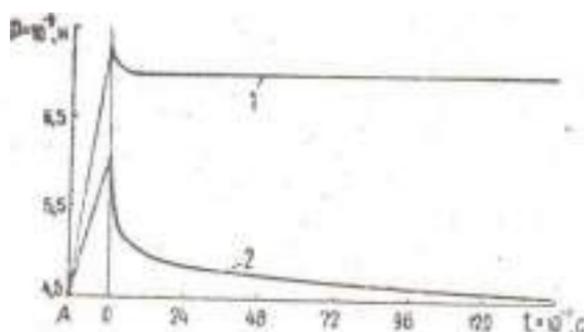


Рис. 7. Кривые релаксации для резины 51-1562 при сдвиге БРМ 101

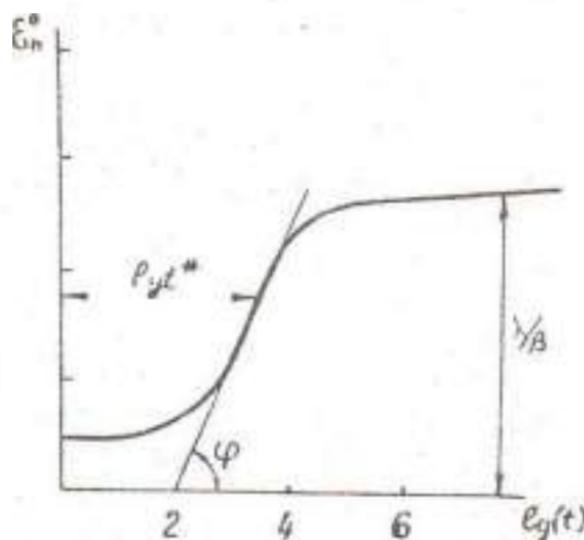


Рис. 8. Иллюстрация графоаналитического метода определения параметров  $\lambda, \beta, \alpha$  дробно-экспоненциальной функции  $\varepsilon_t(-\beta t)$  Работкова

формации. Значения деформирующей силы, полученные после обработки осциллограмм записи усилия в элементе, приведены в табл. 4.

В табл. 4 приведены значения релаксирующегося напряжения в моменты времени  $t = \tau_k/p$ ,  $\tau_k$  - узлы интерполяции (корни многочлена Лягерра),  $a_k$  - его коэффициента.

В соответствии с формулой

$$p\sigma^L(p) \approx \sum_{k=1}^l a_k \left( \frac{\tau_k}{p} \right)$$

получаем: для резины 2959

$$\begin{cases} \sigma^L(1) = \sum_{k=1}^l a_k \sigma(\tau_k) = 116,54; \\ 0,5\sigma^L(0,5) = \sum_{k=1}^l a_k \sigma(\tau_k) = 112,76, \end{cases}$$

для резины 51-1562

$$\begin{cases} \sigma^L(1) = 49,0; \\ 0,5\sigma^L(0,5) \approx 47,79. \end{cases}$$

Реологические параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi(\lambda)$  вычисляем по формулам (51) и (52). Приближенные оценки реологических параметров резины 2959 получены для ядра Работного:

$\chi \approx 0,168$ ;  $\beta = 0,53$ ;  $\alpha = -0,445$ ;  $\lambda \approx 0,318$ .

Для ядра Ржаницына  $\chi(t - \tau) \approx e^{-\lambda(t - \tau)} - \alpha = -0,665$ ;  $\chi = 0,153$ ;  $\beta = 0,0423$ . С учетом разброса экспериментальных данных при определении мгновенного  $G_0$  и условно-равновесного  $G_\infty$  модулей, определяемых непосредственно по кривым релаксации (см. рис. 3), полученные выше приближенные значения реологических параметров рассматриваемых ядер, определены с погрешностью не выше 25 %, которая находится в пределах точности эксперимента и вычислений.

Определение реологических параметров ЭЭК по релаксационному пику на частотной зависимости  $\Psi \sim \lg \omega$ . В этом случае реологические параметры ЭЭК для ядра релаксации (8) определяются по формулам

Таблица 4. Значения релаксирующего усилия

$t, c$	0,0435	0,087	0,252	0,505	0,742	1,48	1,79	3,59	4,158	8,29	3600
2959	131	125	121	118	116	112	110	105	105	105	89,29
51- 1562	57,34	49	48,9	47,8	47,7	47,6	47,6	47,56	47,56	47,56	47,56
$\sigma_p$	0,1093		0,2492		0,3342		0,2513		0,056		

$$\alpha = 1 - \frac{4}{3} \sigma_{\text{сгсг}} \frac{\psi_{\text{max}}}{\pi \lambda}; \quad (57)$$

$$\lambda = \frac{G_0 - G_{\infty}}{G_0} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{E_0 - E_{\infty}}{E_0}; \quad (58)$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_0 \tau_0}, \quad \chi = \lambda \cdot \beta, \quad (59)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} = [\sigma(\psi_{\text{max}})]^{-1}.$$

где  $\omega_0$  — частота релаксационного пика, при которой  $\psi = \psi_{\text{max}}$ .

Для использования этих соотношений необходимо располагать экспериментальной кривой  $\psi' - \lg \omega$  в широком частотном диапазоне с четко обозначенным релаксационным пиком, как, например, на рис. 11.

Такие кривые, как правило, получают на специальных экспериментальных стендах типа «Инстрон». Кроме этого, экспериментальные исследования [32, 42, 43] показывают, что погрешность таких расчетов более 20 % и связана прежде всего с трудностью определения частоты  $\omega_0$  ( $\omega_0 \ll 10\text{с}^{-1}$ ) и некоторой размытостью релаксационного пика для слабонаполненных резин. Все это в значительной степени затрудняет использование зависимостей (57)-(59) для инженерного определения реологических параметров ЭЭК. Они могут быть использованы для более глубокого изучения вязкоупругого поведения резины.

Определение реологических параметров ЭЭК при циклическом деформировании. Для более глубокого и всестороннего изучения резины, особенно опытных марок, целесообразней использовать определение реологических параметров по параметрам петель гистерезиса, регистрируемых в широком диапазоне изменений нагружения, температуры и влияния внешней активной среды. В этом случае реологические параметры ядра Работнова определяются следующими соотношениями [42]:

$$\frac{G(\omega)}{G_0} = 1 - A(\omega) \quad \text{или} \quad \frac{E(\omega)}{E_0} = 1 - A(\omega); \quad (60)$$

$$\psi = 2\pi\chi B(\omega); \quad (61)$$

$$A(\omega) = \frac{\chi(\omega^{1+\alpha} \cos \delta + \beta)}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\omega^{1+\alpha} \beta \cos \delta + \beta^2}; \quad (62)$$

$$B(\omega) = \frac{\chi \omega^{1+\alpha} \sin \delta}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\omega^{1+\alpha} \beta \cos \delta + \beta^2}; \quad (63)$$

где  $G(\omega)$ ,  $E(\omega)$  - модули динамической и упругости при частоте  $\omega$ ;

$A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  - косинус и синус преобразования ядра (8);

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  - реологические параметры, параметры ядра (8).

В результате экспериментальных исследований ЭЭК определяют параметры петель гистерезиса и амплитудные значения деформирующей силы  $P(\omega)$  при различных частотах нагружения в заданном диапазоне.

Типичная петля гистерезиса резиновых элементов представлена на рис. 9 и имеет вид эллипса, наклоненного под определенным углом  $\varphi$  к оси деформации. По найденным значениям  $P(\omega)$  и параметрам петель гистерезиса определяют величины динамических модулей и технического коэффициента диссипации энергии  $\psi(\omega)$  при конкретных значениях частоты нагружения, а также зависимости от частоты реологических параметров материала  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  по формулам

$$A(\omega) = 1 - \frac{G(\omega)}{G_0} = \sqrt{\frac{[P_1(\omega)]^2}{P_0^2} - \frac{\psi^2}{4\pi^2}}; \quad (64)$$

$$B(\omega) = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{S}{2\pi S_0}; \quad (65)$$

где  $S$  - площадь петли гистерезиса;  $S_0$  - площадь прямоугольного треугольника со сторонами  $X_0$  и  $P_0$ , т.е. полная энергия при идеальной упругости резины;

$P_0$  - амплитуда усилия в предположении идеальной упругости резины;

$X_0$  и  $P_1$  - амплитуда перемещения и усилия соответственно.

Далее по формулам (62), (63) и (57-59) определяют реологические параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  ядра (8). В этом случае для опреде-

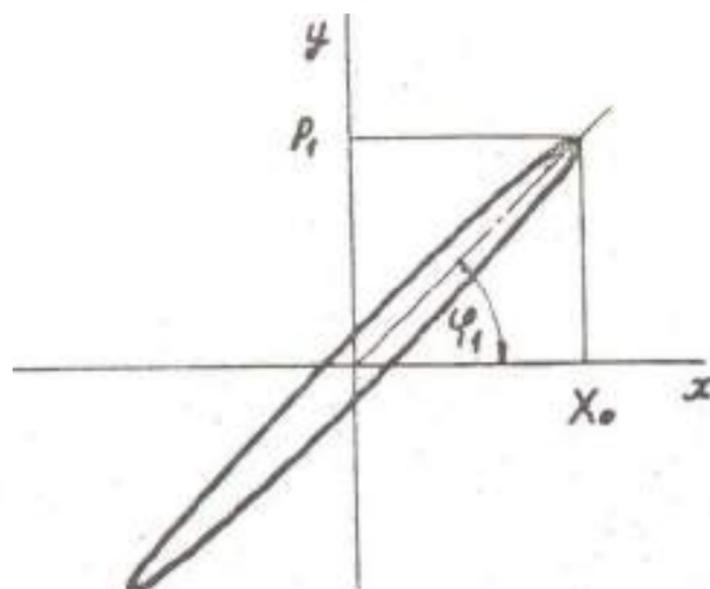


Рис. 9. Петля гистерезиса при циклическом нагружении

ления реологических характеристик  $\alpha$  и  $\beta$  необходимо располагать данными о значении величины  $E(\omega)$  (или  $G(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ ) в весьма широком диапазоне частот нагружения. Однако при  $\omega < 1,5$  Гц определение коэффициента поглощения энергии  $\psi(\omega)$  представляет значительные трудности. Поэтому ниже приводятся соотношения, обеспечивающие определение параметров  $\alpha$  и  $\beta$  через реологические характеристики  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , найденные опытным путем для произвольного значения частоты нагружения  $\omega = \omega_1$  [42]

$$\frac{A(\omega)}{B(\omega_1)} = \sigma \tau g \delta + \frac{\beta}{\omega_1^{1+\alpha} \sin \delta} \quad (66)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\omega_1^{1+\alpha}}{\beta} \left\{ \frac{0,52 \sin \delta - B(\omega_1) \cos \delta \pm \sqrt{[0,52 \sin \delta - B(\omega_1) \cos \delta]^2 - [B(\omega_1)]^2}}{\pm \sqrt{[0,52 \sin \delta - B(\omega_1) \cos \delta]^2 - [B(\omega_1)]^2}} \right\} \quad (67)$$

Эти формулы легко преобразуются в соотношения

$$\beta = \omega_1^{1+\alpha} \sin \delta A(\omega_1) B^{-1}(\omega_1) - \omega_1^{1+\alpha} \cos \delta;$$

$$\alpha = -1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\lambda B(\omega)}{\sqrt{[A^2(\omega_1) - \lambda A(\omega_1) + \delta^2(\omega_1)]^2 + \lambda^2 B^2(\omega_1)}} \quad (68)$$

Таким образом, используя представленные выше математические соотношения, методика определения основных реологических параметров ЭЖ сводится к следующему.

1. На испытательной установке с помощью измерительной аппаратуры при гармоническом нагружении образцов в заданном диапазоне частот определяются амплитудные значения упругой деформирующей силы  $P$  резинового элемента и регистрируются петли гистерезиса.

2. По величине силы  $P$  с помощью соответствующих формул находят значения модулей  $E(\omega)$  или  $G(\omega)$  при различных частотах нагружения.

3. На деформационных машинах при максимальной реализующей частоте нагружения или на установке, описанной выше, определяются мгновенные значения модулей  $E_0$ ,  $G_0$ .

4. Обрабатываются петли гистерезиса и определяются их основные параметры  $S$ ,  $S_0$ ,  $P_1(\omega)$  и  $P_0$ , по которым находится

зависимость технического коэффициента поглощения энергии от частоты нагружения  $\psi(\omega)$ , а также величины реологических характеристик  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ .

5. По формулам (57-59), (62), (63) находятся величины основных реологических параметров резины  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $t_0$ .

Если известны величины  $\frac{G(\omega)}{G_0}$  и  $\psi(\omega)$ , найденные экспериментально при произвольном значении частоты нагружения  $\omega = \omega_1$ , то реологические параметры резины определяются соотношениями (66), (67) или (68). в этом случае методика обработки опытных данных сводится к тому, что описанным ранее способом находятся величины  $E(\omega)$  или  $G(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  при определенном значении частоты  $\omega = \omega_1$ , а также находятся величины мгновенных модулей  $E_0$  и  $G_0$ ; вычисляются значения реологических характеристик  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  при  $\omega = \omega_1$ ; при решении уравнений (66), (67) находятся значения основных реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$ . в дальнейшем вычисляются реологические характеристики  $A(\omega)$  и  $E(\omega)$  в широком диапазоне изменения частот нагружения; по найденным значениям  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  с помощью соотношений (60), (61) находятся частотные зависимости величин  $\frac{G(\omega)}{G_0}$  и  $\psi(\omega)$ , проводится

полный цикл экспериментальных исследований резинометаллических изделий, результаты которых сравниваются с результатами, найденными аналитическим путем.

С помощью приведенных соотношений и разработанной для ЭВМ программы были вычислены параметры ядра Работнова для исследуемых резиновых элементов (табл. 5) и определены частотные зависимости  $G(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , приведенные в полулוגарифмических координатах на рис. 10. Эти зависимости удовлетворительно совпадают с экспериментом в области частот  $\omega > 0,8$  Гц. При более низких частотах нагружения экспериментальные и расчетные значения не совпадают, как показано на примере резины 51-1562 (рис. 11).

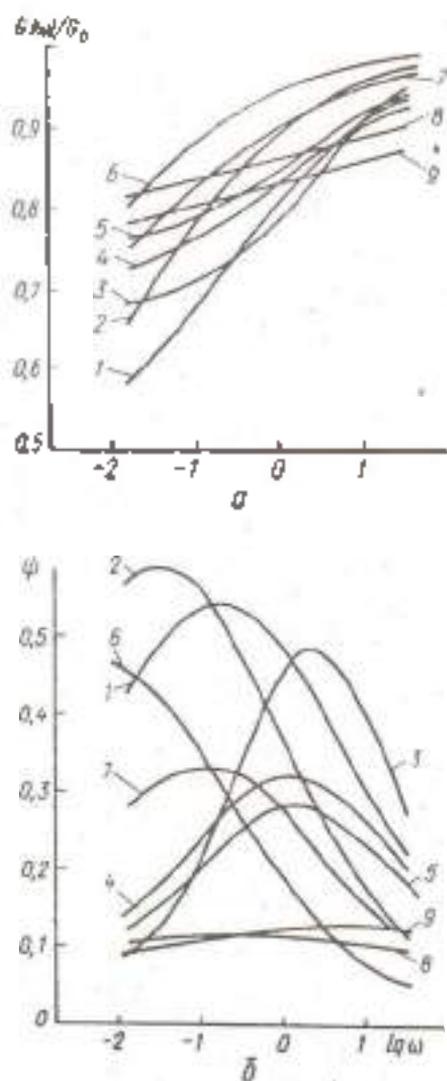


Рис. 10. Частотные зависимости  $G(\omega)/G_0$  (а) и  $\varphi(\omega)$  (б) для элементов из различных резки: 1-2959; 2-1847; 3-303; 4-169; 5-67Л; 6-1378; 7-1562; 8-1224; 9-3311

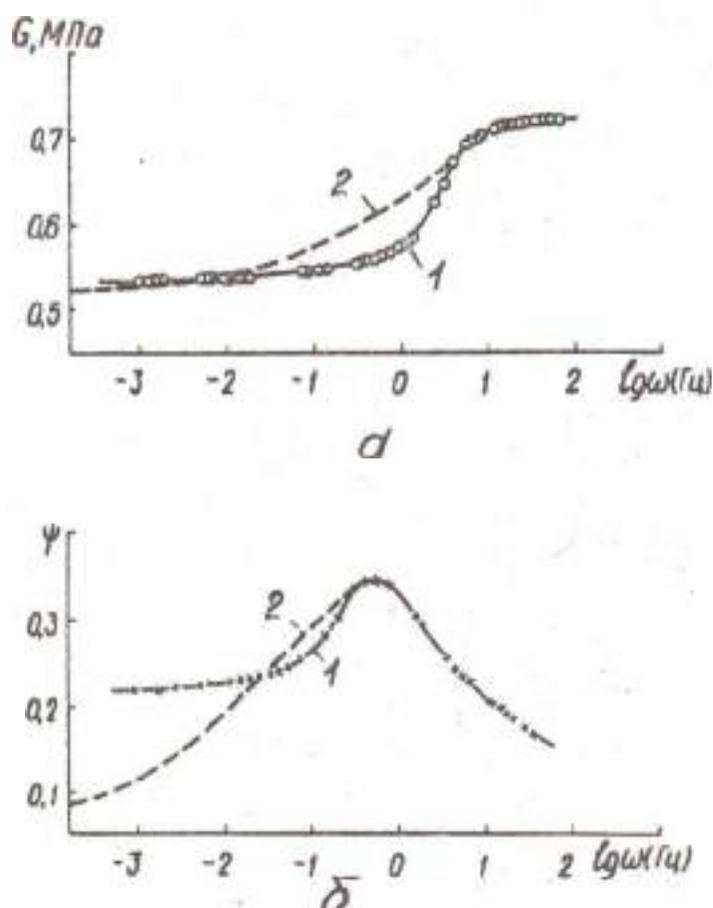


Рис. 11. Частотные зависимости динамического модуля сдвига (а) и коэффициента диссипации (б) для резины 51-1562: 1 – эксперимент; 2 расчет по формулам (57-65)

**Пример расчета.** Рассмотрим определение реологических характеристик элементов типа БРМ101 (размер эластичного блока  $0,35 \times 0,060 \times 100$  м) из серийной марки резины типа 51-1562 (на основе СКМ-3, сажи 5 мас. ч., окиси цинка 5 мас.ч.). Три пары элементов, статическая жесткость которых отличалась от среднего значения не более 5 % подвергались комплексу испытаний согласно изложенной методике. Найденные реологические характеристики показаны в табл. 6.

Статический (условно-равновесный) модуль сдвига  $G_{\infty}$  определялся на установке при скорости нагружения 0,05 м/с, выдержке под нагрузкой 60 мин при температуре 343 К (70 °С) и величине деформации 5 мм.

Мгновенный модуль сдвига определялся на описанной выше установке при времени срабатывания магнита (время нагружения)  $t = 0,05$  с и величине деформации  $\Delta = 1,9$  мм.

Динамические характеристики исследуемых элементов определялись на специальном стенде в широком диапазоне изменения частоты нагружения (4+20 Гц). При расшифровке петель гистерезиса и осциллограмм силы определялись значения динамического модуля  $G_{\text{дин}}$  и коэффициента диссипации  $\psi$ . На рис. 12 показаны эти значения для трех пар исследуемых элементов. В дальнейшем с помощью изложенного выше алгоритма расчета и программы на IBM производилась обработка полученных результатов при конкретной частоте нагружения  $\omega = 10,8$  Гц. На рис. 12 результаты обработки показаны сплошной линией. Как видно, результаты расчета при фиксированной частоте и экспериментальные результаты удовлетворительно совпадают.

В таблице 6 представлены значения реологических характеристик резин (их определение осуществлялось по изложенной методике для элементов сдвига типа БРМ101, изготовленных в НИИРПе), наиболее часто используемых в общем машиностроении для изготовления виброизоляторов.

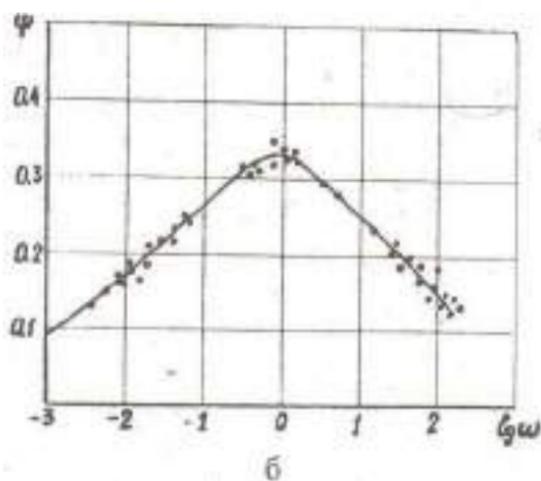
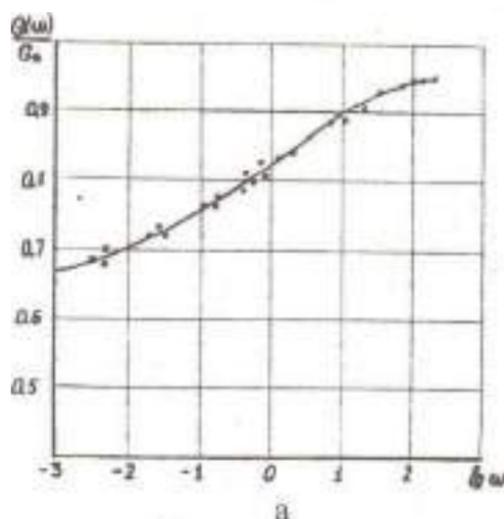


Рис. 12. Частотные зависимости  $G(\omega)/G_0$ , (а) и  $\varphi(\omega)$  (б) для БРМ101 из резинки 1562 (данные получены на «Нистрон» модели 1162)

Таблица 5. Реологические параметры резин ( $\alpha$  - фиксировано)

Шифр резины	$G_a$ МПа	$G_p$ МПа	$G_m$ МПа	$\psi$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
2959	1,76	1,59	0,74	0,31	-0,60	1,06	0,58
1378	1,30	0,94	0,73	0,13	-0,60	0,503	0,44
1224	1,30	1,16	0,93	0,11	-0,60	0,692	0,28
4з	1,60	1,24	0,90	0,40	-0,60	2,86	0,44
67Л	1,50	0,88	0,78	0,35	-0,60	1,73	0,48
59Л	1,50	0,88	0,72	0,32	-0,60	1,31	0,52
28Э	1,70	1,23	1,12	0,30	-0,60	2,57	0,34
169	1,50	1,23	0,93	0,30	-0,60	2,01	0,38
310	1,40	0,91	0,90	0,25	-0,60	1,61	0,36
51-1562	0,78	0,72	0,51	0,17	-0,60	0,91	0,35
51-1714	1,30	1,02	0,71	0,50	-0,60	5,405	0,454
51-1714	2,00	1,40	1,10	0,90	-0,60	2,082	0,45

Способ определения динамических характеристик вязкоупругих материалов по ударному нагружению.

В [91] разработан метод определения динамических характеристик эластичных материалов на натуральных деталях из эластомеров произвольной формы, а также устройство для реализации этого способа [92].

Сущность способа заключается в том, что наносят удар подпружиненным твердым телом по испытываемому материалу, регистрируют время падения и отскока груза, вычисляют собственную частоту колебаний и по ним определяют динамический модуль упругости. В качестве ударника используют грибообразный индентор с грузом, наносят многократные удары, регистрируют амплитуды отскоков и определяют декремент затухания материала, являющийся вторым параметром динамических характеристик эластичного материала.

Таблица 6. Реологические характеристики резин

Шифр резины	Наполнение		$\psi$	$G_0$ МПа	$G_{\infty}$ МПа	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
	тех. углерод	$Z, \theta$						
2959	45	15	0,31	1,76	0,74	-0,64	1,04	0,58
1378	15	5	0,13	1,30	0,73	-0,87	1,01	0,44
1224	3	50	0,11	1,30	0,93	-0,84	1,27	0,28
4Н	60	15	0,60	2,80	1,30	-	-	-
4з	34	27	0,40	1,60	0,90	-0,60	2,85	0,44
67Л	15	20	0,35	1,50	0,78	-0,60	1,73	0,48
59Л	10	40	0,32	1,50	0,72	-0,51	1,43	0,52
28Э	20	10	0,30	1,70	1,12	-0,60	2,57	0,34
169	20	5	0,30	1,50	0,93	-0,60	2,01	0,38
310	15	15	0,25	1,40	0,90	-0,60	1,61	0,36
1562	5	5	0,17	0,78	0,51	-0,64	0,89	0,35

Способ и устройство основаны на определении декремента затухания и динамического модуля упругости по измеряемому времени контакта и времени отскока подвижной массы.

Для обеспечения возможности определения реологических характеристик материала на эластомерных конструкциях произвольной формы без их разрушения, деформации подвергают локальную зону испытываемого материала посредством периодического ударного воздействия на него грибообразного индентора, совершающего свободные колебания с одновременной регистрацией амплитуд отскоков.

При этом регистрируется время контакта индентора с испытываемым материалом, время его отскока и амплитуды. На основании экспериментально полученных величин вычисляются декремент затухания материала  $\delta(\omega)$ , коэффициент диссипации  $\psi(\omega)$  динамический модуль упругости  $E(\omega)$ . Теоре-

тической предпосылкой для разработки способа определения динамических характеристик является исходное уравнение движения штампа на этапе взаимодействия его с эластомером [93].

Динамический модуль с учетом идентифицированных на эталонном образце инерционными параметрам установки получают в виде [91]

$$E(\omega) = km(\omega^2 - \omega_p^2) \quad (69)$$

$$\delta(\omega) = \frac{\omega^2 \ln \frac{A_0}{A_1}}{\pi n(\omega^2 - \omega_p^2)} \frac{\delta_1(\omega_p) \cdot \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \frac{\delta_2(\omega) \cdot \omega_p^2}{\omega^2} \quad (70)$$

где  $A_0$  и  $A_1$  - амплитуда свободных колебаний индентора и амплитуда отскока;

$\omega$  и  $\omega_p$  - частоты свободных колебаний индентора и частота свободных колебаний индентора при соударении с испытуемым материалом  $\omega = \frac{\pi}{T_1}$ ,  $\omega_p = \frac{\pi}{T_2}$ ;

$T_1$ ,  $T_2$  - время отскока и время его контакта (см. рис. 13);

$\delta_1(\omega)$  и  $\delta_2(\omega_p)$  - декремент затухания пружины индентора при соответствующих частотах;

$k$  - коэффициент, учитывающий форму индентора;

$m$  - приведенная масса подпружиненного индентора;

$n$  - число периодов колебаний индентора.

Технический коэффициент диссипации энергии определяют следующим образом

$$\psi(\omega) = 2\delta(\omega) \quad (71)$$

Формулы (69-71) являются основными для расчета динамических характеристик по результатам эксперимента.

**Идентификация математических моделей.** Выше рассматривались модели определения реологических параметров ЭК по результатам экспериментальных исследований, при этом предполагалось адекватное описание эксперимента используемыми феноменологическими соотношениями и возможности экспериментальной базы проводить специально

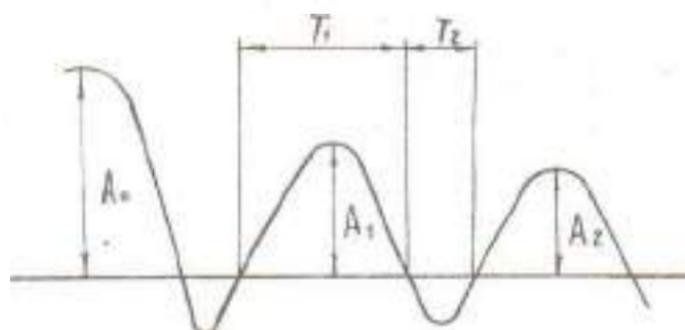


Рис. 13. Вид регистрируемой экспериментальной осциллограммы

поставленные эксперименты и измерения с изперед заданной и достаточно высокой степенью точности.

В практических исследованиях такая адекватность выполняется довольно редко. Поэтому необходимо использовать методы определения реологических параметров ЭЭК, учитывающие неадекватность математических моделей и реальные возможности эксперимента.

В зависимости от операторов, преобразующих исходную информацию, различают статические и динамические модели. Статические модели предполагают наличие заданных факторов — величин и фиксированных параметров, динамические же модели носят более общий характер, а их методы идентификации позволяют использовать широкий спектр экспериментальных данных или натуральных наблюдений [32].

Так как эксплуатация большинства резинотехнических изделий ограничивается диапазоном деформаций (до 30 %), для практики актуальны модели поведения этого класса материалов в квазистатических и динамических режимах работы. Естественными требованиями при построении таких моделей являются: использование адекватного математического аппарата для учета влияния основных свойств материала (физическая, геометрическая нелинейности) способность модели к описанию основных особенностей нелинейного поведения материала и возможность идентификации модели для конкретных материалов на базе доступного для реализации программ экспериментального исследования.

В настоящее время разработано значительное количество методик определения параметров ядер, приведенных в табл. 1 [20, 36, 40, 41, 42, 86, 94-96, 97, 98]. Наиболее разработаны методики определения констант ядер линейной теории наследственности при малых деформациях по результатам опытов на "чистую" ползучесть или "чистую" релаксацию, т.е. без учета участка нагружения до заданной нагрузки или деформации. Правомерность замены реального процесса нагружения ступенчатым должна быть доказана экспериментально.

Показано [20], что ошибка в напряжениях для кривой релаксации в линейной теории оценивается величиной

$$\delta = \varepsilon_0 K(t - t_0) \frac{t_0}{2},$$

где  $\varepsilon_0$  - деформация, достигнутая при растяжении с постоянной скоростью за время  $t_0$ ;

$K$  - ядро (10);

$\mu$  - параметр,  $0 < \mu < 1$ .

Безусловно, каждая из методик имеет свои преимущества, но при описании реального материала возникают, как правило, основные общие для всех методик затруднения: малая длительность опытов при существенном влиянии скорости растяжения на начальном участке кривых ползучести и релаксации, разброс экспериментальных данных до 15 % (часто и выше), отсутствие данных о мгновенном модуле Юнга и коэффициенте Пуассона при малых деформациях.

Рассмотрим сначала вопрос об определении реологических параметров по участку кривой простой ползучести или релаксации. В этом случае [32]

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0^{-1} (1 + \chi S(\alpha, \beta, t));$$

$$\sigma(t) = E_0 (1 - \chi \mathcal{Q}(\alpha, \beta, t)).$$

Здесь

$$S(\alpha, \beta, t) = \int_0^t R(x, \alpha, \beta) dx;$$

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, t) = \int_0^t K(x, \alpha, \beta) dx;$$

$R(x, \alpha, \beta)$  и  $K(x, \alpha, \beta)$  - ядра ползучести и релаксации соответственно. Обозначив для сокращения записей  $\varepsilon_0(t_0) = \varepsilon_k$ ,  $S(\alpha, \beta, z_k) = S_k$ , получаем после алгебраических преобразований

$$V_1(\alpha, \beta) = S_4(1-a) + aS_2 - S_3 = 0; \quad (72)$$

$$V_2(\alpha, \beta) = S_1(1-b) + bS_2 - S_3 = 0,$$

где  $a = \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_2}$ ;  $b = \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}$ .

Аналогичные соотношения можно получить для случая простой релаксации [100]. Таким образом, задача определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  сводится к решению системы трансцендентных уравнений (72).

При наличии экспериментальных данных о величине реакции и сдвига фаз между напряжением и гармонической деформацией ( $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ ) задача определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  также может быть сведена к решению системы уравнений (32)

$$V_1(\alpha, \beta) = \frac{(A_1' + B_1') \varepsilon_0^2 \varphi_1}{[B_1 + (A_1 + A_2) \operatorname{tg} \varphi_1]^2 + B_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1} - \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 = 0,$$

$$V_2(\alpha, \beta) = \frac{B_2 + A_2 \operatorname{tg} \varphi_2}{B_2 + A_1 \operatorname{tg} \varphi_1} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} = 0.$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} K(x) \cos \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} x dx;$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} K(x) \sin \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} x dx,$$

$K(x)$  — ядро релаксации.

Решение системы (72) или (73), если оно существует, можно получить с наперед заданной точностью, используя в качестве критерия корня изменение знака невязки  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — решения каждого из уравнений системы при фиксированном  $\alpha$ . Обработка экспериментальных данных с использованием ядер Работнова или Слонимского-Бронского для разных марок резины показала, что чаще всего системы либо несовместимы, либо имеют несколько корней. Поэтому целесообразно использовать для нахождения оптимальных значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  методы минимизации функции цели вида

$$W = \sum_{k=1}^n v_k^2(\alpha, \beta), \quad (74)$$

где  $n \geq 2$  и определяется наибольшим числом существенно различных точек на кривой. Под существенно различными

точками принимают точки, разность результатов измерений в которых хотя бы на порядок превышает погрешность эксперимента. Трудность построения программы поиска связана с не унимодальностью функции цели (74). Экспериментальная проверка различных методов [32, 94] показала, что наиболее рациональным в данном случае является алгоритм, основанный на методе пробных шагов с автоматическим выбором и пробных шагов с автоматическим выбором и дроблением шага в сочетании с выбором точек спуска по диагоналям прямоугольника в пространстве  $\alpha, \beta$ .

В случае определения реологических параметров (8) по участку кривой релаксации или ползучести, при обработке экспериментов, обладающих большим разбросом данных, может возникнуть неединственность решения задачи, т.е. одна и та же кривая может быть аппроксимирована расчетными кривыми, построенными по различным наборам параметров с почти одинаковой точностью. Имеется некоторый произвол при назначении данной кривой ползучести или релаксации набора положительных параметров.

Этот произвол необходимо использовать при обработке серии экспериментов на ползучесть или релаксацию для одного и того же материала. Установлено, что параметры  $\beta$  и  $\lambda$  [22] изменяются наиболее значительно, менее заметно изменяется параметр  $\alpha$  - являющийся структурно-чувствительным коэффициентом. В этом случае после обработки каждой кривой заданной серии фиксируют значение  $\alpha$  для всей серии (одного материала) наиболее близкое к среднему значению вычисленных параметров  $\alpha$ . Кроме этого, для устранения явления неединственности результатов поиска параметров по данным квазистатических испытаний, необходимо использовать методики поиска параметров ядер при совместном задании квазистатических опытов и значений комплексного динамического модуля сдвига или модуля Юнга в возможно более широком интервале частот [94,95]. Анализ полученных

динамических характеристик показывает, как рассмотренная модель, идентифицированная по данным квазистатического эксперимента, предсказывает основные нелинейные эффекты: отличие петли гистерезиса от эллиптической, уменьшение равновесного модуля с ростом удлинения, влияние амплитуды динамической и статической составляющих деформации.

В случае сложных математических моделей, учитывающих зависимость от температуры реологических параметров и некоторые нелинейные эффекты их идентификацию проводят при совместном использовании данных квазистатических и динамических испытаний [32,95].

При этом целесообразно минимизировать квадратичное отклонение температур к амплитуд колебаний осциллятора в зоне термомеханической неустойчивости. Такой подход позволяет определить реологические параметры полимеров, механическая реакция которых существенно зависит от температуры в рабочем диапазоне температур [32,96]. Для идентификации нелинейных модулей необходима постановка серии сложных экспериментов по определению как частотных, так и амплитудных зависимостей механических характеристик.

В [96] предлагается следующая программа экспериментов в диапазоне максимальных удлинений 30-50 % для идентификации и проверки принимаемых определяющих соотношений без привязки к типу образцов и испытательному оборудованию:

1) релаксация напряжений для периодически повторяющейся импульсной функции деформации с последовательно возрастающими амплитудами: минимальный уровень деформации порядка 1 %, продолжительность отдыха после разгрузки не менее пятикратной выдержки при релаксации;

2) деформирование при различных постоянных (или близких к постоянным) скоростях с возможно более точной регистрацией данных эксперимента на начальных участках кривых;

3) деформирование в режиме вынужденных периодических колебаний при различных значениях статической и переменной составляющих деформации, период колебаний не больше времени задания деформации в опытах на релаксацию, для устранения влияния диссипативного разогрева достаточно регистрация начального участка и первых 5-10 циклов;

4) контрольные эксперименты в режимах ползучести и других видах напряженно-деформированного состояния, имеющих аналитические или численные реализации решений соответствующих краевых задач для рассматриваемой модели.

Во всех опытах для процедур численной идентификации необходима полная регистрация истории изменения параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние образца.

Последовательность процедур идентификации варианта нелинейной модели поведения наполненных резин при конечных деформациях [96].

$$\bar{Q} = p \left[ (1 + b(I_1 - 3)) \left[ \bar{g} - \frac{1}{3} (\bar{G}^*)^{-1} \right] + M(\bar{G}^*)^{-1} \right]; \quad (75)$$

$$I_3 = 1;$$

$$\bar{a} \cdot f(t) = \int R(t - \tau) d\bar{G}(\tau), \quad (76)$$

где  $\bar{Q}$  - «энергетический» (редуцированный) тензор напряжений;  $\bar{g}$  - метрический тензор недеформированной конфигурации;  $(\bar{G}^*)^{-1}$  - тензор меры деформаций Грина с его инвариантами  $I_1, I_3$ ;  $p, b$  - параметры;  $p$  - среднее «физическое» напряжение, определяемое при решении конкретной краевой задачи;  $f(t)$  - произвольная функция времени  $t$  (определяемая историей деформации);  $R(t)$  - функция релаксации, может выглядеть следующим образом.

По релаксационным кривым при максимальном времени наблюдения  $t_m$  строится изохронная кривая в координатах, соответствующих упругому решению для потенциала Тре-

лоара. Если она нелинейна, определяются параметры модели  $n$  и  $b$ .

Для каждой кривой релаксации из уравнения связи напряжений с деформацией при известных значениях  $n$  и  $b$  определяются функция релаксации  $R(t)$  в интервале времен от (5-10)  $t_0$  до  $t_m$  ( $t_0$  - время выхода деформации на заданный уровень). Эта операция и для конечных деформаций приближенно выполняется путем вычисления (76) как произведения функции релаксации на функцию деформации, аппроксимированную функцией Хэвнсайда. Если найденные функции релаксации отличаются несущественно и тангенс угла потерь для динамических испытаний, не зависит от амплитуды деформации, то принимается  $g_2=1$ . Задаввшись аналитическим выражением для функции релаксации типа

$$R(t) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (t/t_0)^\beta} \quad (77)$$

с параметрами  $\mu_\infty$ ,  $\mu_0$ ,  $t_0$ ,  $\beta$ , нужно с помощью численных методов нелинейного программирования определить эти параметры путем совместной аппроксимации кривых релаксации с начальными участками нагружения, кривых растяжения с различными скоростями и данных динамических экспериментов на начальных циклах нагружения. При удовлетворительных результатах аппроксимации получим идентифицированную модель (75), (76).

В противном случае несопадающие кривые функций релаксации каждого уровня релаксационного эксперимента в полулогарифмических координатах смещаются по оси времени в единую кривую, при этом определяется первое приближение функции деформационно-временного сдвига и обобщенной функции релаксации. Для уточнения снова используется их аналитическая аппроксимация и поиск параметров по всей совокупности квазистатических и динамических данных.

Реализация алгоритмов поиска параметров методами нелинейного программирования должна учитывать математическую некорректность решаемой задачи [94] при полном ис-

пользовании информации о допустимой области изменения параметров.

Окончательное решение о пригодности идентифицированной модели выносится после описания данных контрольных экспериментов.

Значительные трудности возникают при идентификации нелинейных моделей, использующих в качестве ядра функцию  $\mathfrak{E}_\alpha(-\beta, 1-\tau)$  Работнова (8), приводящую к потере устойчивости вычислительных процедур поиска на ЭВМ.

Для преодоления указанных трудностей используют метод аппроксимации интегральных операторов с ядром (8), разработанный и теоретически обоснованный Крушем И.И. [43], а идентификация реологической модели выполняется в два этапа [98,99]. Суть метода состоит в следующем. Полагая в (8) показатель дробности  $\alpha=0$ , переходят к экспоненциальному ядру (6) и к соответствующему ему дифференциальному уравнению, определяя реологические параметры  $\chi_0$  и  $\beta_0$  в каждый момент времени из условия равенства реальных значений дефекта модуля  $\lambda=f-A$  и технического коэффициента поглощения энергии  $\psi=2\pi B(\omega)$  для ядра Работнова и экспоненциального ядра на заданной частоте  $\Omega$ .

Формулы для пересчета реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  ядра (8) в параметры  $\chi_0$  и  $\beta_0$  экспоненциального ядра (6) [99]

$$A_0 = \Omega \frac{A}{B}; \quad \chi_0 = \Omega \left( B + \frac{A^2}{B} \right), \quad (78)$$

где косинус- и синус-преобразования  $A$  и  $B$  определяются по формулам (9) при условии замены в них  $\omega$  на  $\Omega$ .

Сначала определялись параметры экспоненциальных ядер  $\beta_{01}$ ,  $\chi_{01}$ ,  $\beta_{02}$ ,  $\chi_{02}$  при экспериментальной обработке данных (как правило, используются экспериментальные осциллограммы сил или перемещений), при двух существенно различных частотах  $\Omega_{01}$  и  $\Omega_{02}$  доставляющие минимум функции цели [99]

$$F_0 = \sum_{i=1}^N [\pi^a(t_i) - \pi^T(t_i)]^2$$

где  $\pi^a(t_i)$  и  $\pi^T(t_i)$  - динамические нормальные давления в точках  $t_i$ .

При этом теоретические получают при решении соответствующих уравнений (или систем) теории колебаний, полученных с использованием ядра (6). Это так называемый первый этап идентификации экспериментальных данных.

На втором этапе идентификации осуществляется переход от экспоненциального ядра (6) к параметрам ядра (8).

Для этого, исключая параметр  $\beta$ , соответствующий дробно-экспоненциальной функции, из соотношений (78)

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= \Omega_{01} \frac{\Omega_{01}^{1-\alpha} \cos \delta + \beta}{\Omega_{01}^{1-\alpha} \sin \delta} \\ \beta_{02} &= \Omega_{02} \frac{\Omega_{02}^{1-\alpha} \cos \delta + \beta}{\Omega_{02}^{1-\alpha} \sin \delta} \end{aligned} \quad (79)$$

получают выражения для определения параметров  $\chi_a(-\beta, t-\tau)$  дробно-экспоненциального ядра [99]

$$\beta = \Omega_{01}^{1-\alpha} \left[ \frac{\beta_{01}}{\Omega_{01}} \sin \delta - \cos \delta \right] \quad (80)$$

$$\left[ \left( \frac{\Omega_{01}}{\Omega_{02}} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \cos \delta - \left( \frac{\Omega_{01}}{\Omega_{02}} \right)^{1-\alpha} \frac{\beta_{01}}{\Omega_{01}} + \frac{\beta_{02}}{\Omega_{02}} = 0 \quad (81)$$

Параметр  $\alpha$  определяют из решения трансцендентного уравнения (81), после по (80) получают  $\beta$ . Значения  $\chi$  вычисляются через дефект модуля

$$\lambda = \chi_{01} \beta_{01}^{-1} = \chi_{02} \beta_{02}^{-1} = \chi \beta^{-1}$$

В работе [98] показано, что ошибки приближенного расчета по сравнению с точным не превосходят погрешности эксперимента, используемого для определения параметров.

Задачи выбора и идентификации реологических параметров вязкоупругой модели, как правило, составляют только подпрограммы при решении задач оптимизации и синтеза резиновых деталей с заданными физико-механическими

характеристиками. В каждом конкретном случае известными методами поиска идентифицируются трех- или четырехкомпонентная реологическая модель.

В качестве функции цели используют квадратичное уклонение вида  $F_v$  по реологическим параметрам. От качества идентификации выбранной модели зависит степень соответствия рассматриваемых функций (величин) реальным характеристикам исследуемых процессов. Подпрограммы идентификации используются и в задачах оптимального многокритериального проектирования вибраторных машин с заданными характеристиками. При этом для реологических параметров задают границы идентификации, отыскивается вектор параметров  $[x_0 = E_0, \alpha, \beta, \lambda]$ , доставляющий глобальный минимум целевой функции вида  $F_v$  и удовлетворяющий требуемым критериям качества проектируемой машины [99]. В основу алгоритма идентификации при этом может быть положен метод векторной многокритериальной оптимизации с использованием ЛП-поиска, предложенного в [101-102].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhn W. // Koll.Z. - 1934. - N 68. - S.2.
2. Gurl E., Mark H. // Sitzungsber. Akad. Wiss. - Wien, 1934. - N 11b. - S. 143.
3. Wall F.T. // J.Chem. Phys. - 1942. - N 10. - P. 132.
4. Трелоар Л. Физика упругости каучука. - М.: ИЛ, 1953. - 240 с.
5. Александров А.П., Лазуркин Ю.С. Изучение полимеров, 1. Высокоэластическая деформация полимеров. // Динамический метод исследования эластичных материалов // Журнал технической физики. - 1939. - Т.9, № 14. - С. 1249.
6. Каргин В.А., Слоимский Г.Л. 1. О законах деформирования реальных материалов. 2. Деформация высокополи-

мерных материалов // Журнал технической физики. - 1941. - Т. 11, № 4. - С. 34.

7. Гуль В.Е., Кулезнев В.Н. Структура и механические свойства полимеров. - М.: Высшая школа, 1972. - 320 с.

8. Патрикеев Г.А. Макромолекулярная механика // Механика полимеров. - 1971. 2. - С. 221-231.

9. Бартенев Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров. - М.: Химия, 1984. - 280 с.

10. Зуев Ю.С. Разрушение эластомеров в условиях, характерных для эксплуатации. - М.: Химия, 1980. - 268 с.

11. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров. - М.: ИЛ, 1952. - 619 с.

12. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. - М.-Л.: Гостехиздат, 1952. - 324 с.

13. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. - М.: Мир, 1965. - 116 с.

14. Бронский А.П. Явление последействия в твердом теле // Прикладная математика и механика. - 1941. - Т. 5, № 1. - С. 21-30.

15. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последействием // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, № 1. - С. 51-54.

16. Ржанцын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. - М.-Л.: Гостехиздат, 1949. - 264 с.

17. Розовский М.И. Ползучесть и длительное разрушение материалов // Журнал технической физики. - 1951. - Т. 21, № 11. - С. 29-37.

18. Розовский М.И. Механика упруго-наследственных сред: Обзор // Итоги науки. Механика. Упругость и пластичность. - М.: ВИНТИ, 1967. - С. 165-250.

19. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. - М.: Мир, 1965. - 456 с.

20. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. - № 4. - С. 483-497.
21. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. - М.: Высшая школа, 1976. - 277 с.
22. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. - М.: Наука, 1977. - 384 с.
23. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. - М.: Мир, 1974. - 340 с.
24. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / Дымников С.И., Лавендел Э.Э., Павловские А.-М.А., Синеге М.И. Под ред. Лавендела Э.Э. - Рига: Зинатне, 1980. - 238 с.
25. Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин В.П. Механика полимеров. - М.: МГУ, 1975. - 528 с.
26. Потураев В.Н., Дырда В.И., Надутый В.П. Резина в горном деле. - М.: Недра, 1974. - 152 с.
27. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. - 712 с.
28. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров. - М.: Изд-во иностр. лит. - 1963. - 536 с.
29. Ильюшин А.А., Лобедри Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. - М.: Наука, 1970. - 280 с.
30. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. - М.: Наука, 1972. - 327 с.
31. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. - Рига: Зинатне, 1975. - 416 с.
32. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. - К.: Наук. думка, 1980. - 260 с.
33. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. - Киев: Наук. думка, 1988. - С. 232.
34. Бухина М.Ф. Техническая физика эластомеров. - М.: Химия, 1984. - 224 с.

35. Релаксационные явления в полимерах / Под ред. Г.М. Бартенева, Ю.В. Зеленсва. - Л.: Химия, 1972. - 373 с.

36. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухова В.Г. и др.; под ред. Потураева В.Н. - Киев: Наукова думка, 1987. - 288 с.

37. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1988. - 742 с.

38. Руканицын А.П. Теория ползучести. - М.: Стройиздат, 1968. - 478 с.

39. Рябов В.М. Обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул // Методы вычислений. - 1976. - Вып. 10. - С. 110-115.

40. Работнов Ю.Н., Паперник М.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. - М.: Наука, 1969. - 132 с.

41. Определенные характеристики ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ / Е.Н. Звонов, Н.И. Малевич, Л.Х. Паперник, В.М. Цейтлин // Инж. ж. Механика твердого тела. - 1968. - № 5. - С. 76-82.

42. Методика определения реологических параметров резиновых деталей при циклическом деформировании / Потураев В.Н., Круш И.И., Дырда В.И., Науменко Н.Н. - Киев: Наукова думка, 1970. - 27 с.

43. Круш И.И. Интегро-операторный метод исследования демпфирующих свойств упруго-наследственных систем // Изв. АН СССР. Механика. - 1965. - № 6. - С. 90-94.

44. Кабанов В.А. К вопросу о кинетике релаксационных процессов в реальных полимерных телах // Докл. АН СССР. - 1970. - Т. 195, № 2. - С. 402-405.

45. Шестопап В.О. Диффузия вакансий и реологические свойства металлов при высоких температурах // Физика твердого тела. - 1979. - Т. 12. - С. 291-294.

46. Слонимский Г.Л., Шестопап В.О. Статистическое описание релаксационных процессов в полимерах // Высоко-

молекулярные соединения. Сер. А. - 1978. - Т. 20, № 8. - С. 1712-1721.

47. Ковров В.Н. Ядро ползучести с параметрами уравнения долговечности С.Н. Журкова // Полимерные материалы в машиностроении. - Пермь: ЛПИ, 1976. - С. 51-53.

48. Колтунов М.А., Ли Л., Колокольчиков В.В. Зависимость слабосингулярных ядер от структуры полимера / Куйбышевский политехн. ин-т. - Куйбышев, 1980. - 6 с. - Деп. в ВНИИТИ 03.03.82, № 896-82.

49. Аскадский А.А. Новые возможные типы ядер релаксации // Механика композитных материалов. - 1987. - № 3. - С. 403-409.

50. Колокольчиков В.В. О неравновесной статистической термодинамике твердых тел // Механика деформируемого твердого тела. - 1975. - № 1. - С. 15-23.

51. Черняк И.Л., Бухны Д.И., Лоскутов О.Д. Ядро ползучести с прочностными параметрами // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. - 1973. - С. 117-119.

52. Эпштейн В.Г., Винницкий Л.Е., Евсеева Л.Г. Оценка неоднородности резин с помощью спектров времен релаксации // Механика полимеров. - 1969. - № 5. - С. 916-953.

53. Описание вязкоупругого поведения резиновых элементов при конечных деформациях / Дырда В.И., Адамов А.А., Селиванов Е.И., Мазнецова А.В. // АН УССР. - Ин-т геотехн. механики. - Днепропетровск, 1984. - 10 с. Деп. в ВНИИТИ 25.01.85, № 746-85.

54. Температурно-частотное приведение динамических функций саженополненных резин в нелинейной области / Г.В. Виноградов, В.И. Гарцман, Б.М. Горелик, А.Я. Малкин // Механика полимеров. - 1973. - № 4. - С. 751-754.

55. Гарцман В.И., Горелик Б.М. Динамические свойства амортизационных резин при сдвиговых деформациях // Каучук и резина. - 1978. - № 4. -

56. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. - М.: Наука, 1985. - 303 с.
57. Прогнозирование работоспособности резинометаллических амортизаторов по изменению их жесткости и ползучести / Рева С.А., Горелюк Б.М., Попинов В.Р., Артемьев В.Н. // Каучук и резина. - 1986. - № 3. - С. 23-26.
58. Эмануэль Н.М., Бучаченко А.Л. Химическая физика старения и стабилизации полимеров. - М.: Наука, 1982. -
59. Махлис Ф.А. Радиационная физика и химия полимеров. - М.: Атомиздат, 1972. - 328 с.
60. Розовский М.И. Некоторые свойства операторов, применяемых в теории ползучести // Прикладная математика и механика. - 1959. - 23, № 5. - С. 978-980.
61. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкций. - М.: Наука, 1981. - 344 с.
62. Резиновые детали в инженерной практике / Дырда В.И., Чижик У.Ф., Княшко В.П., Карачабан Н.Г. - Днепропетровск: Полиграфист, 1998. - 303с.
63. Москвитин В.В., Хабиб Р.И. Некоторые вопросы деформации вязкоупругих тел с учетом влияния накопленных повреждений // Механика полимеров. - 1978. - № 5. - С. 802-807.
64. Гойхман В.Д., Смухунова Т.П. Прогнозирование изменений свойств полимерных материалов при длительном хранении и эксплуатации // Успехи химии. - 1980. - Т. 19. - Вып. 8. - С. 1554-1573.
65. Крегерс А.Ф., Янсон Ю.О. Вариант феноменологической модели деформирования вязкоупругого стареющего материала // Механика композитных материалов. - 1985. - № 33. - С. 395-400.
66. Leaderman H. Elastic and creep properties of filaments materials and other highpolimers. - Washington: Textill foundation, 1944. - 289 p.
67. Работнов Ю.Н., Палерник Л.Х., Степаньчев Е.И. Приложение целипейной теории наследственности к описа-

нию. временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. - 1971. - № 1. - С. 74-78.

68. Бучаков И.И., Чеповецкий М.А. Исследование уравнения Работнова и его применение к полимерным материалам // Вест. ЛГУ. - Сер. I. - 1987. - Вып. 1. - С. 54-58.

69. Локшина А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. - М.: Наука, 1982.

70. Гольдман А.И. Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимеров и композиционных материалов. - М.: Химия, 1988. - 272 с.

71. Arai Koichi, Ferry John D. Temperature dependence of viscoelastic properties carbon-black-filled rubbers in small shearing deformation // Rubber Chem. and Technol. - 1986. - 59. N 11. - P. 592-604.

72. Мазнецова А.В. Разработка прикладных методов расчета силовых резиновых деталей горных вибрационных транспортно-технологических машин // Дис. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. - Днепропетровск, АН УССР. - Ин-т геотехн. механики. - 1990. - 205 с.

73. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем / Под ред. Г.С. Писаренко. - Киев: Наук. думка, 1980. - 386 с.

74. Лукомская А.И., Евстратов В.Ф. Основы прогнозирования механического поведения каучуков и резины. - М.: Химия, 1975. - 360 с.

75. Дырда В.И., Сенченков И.К., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Универсальный конструкционно-деформационный параметр и  $\beta$ -метод в механике деформирования резиновых деталей // Тр. II Междунар. симп. по механике эластомеров, 23-26 июня 1997. - Днепропетровск. - Днепропетровск: Поліграфіст, 1997. - С. 204-234.

76. Дырда В.И., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Расчет силовых резино-технических изделий, используемых в горном машиностроении: Темат. обзор // Производство

резинотехнических и асбестотехнических изделий. - М.: ЦНИИТЭнефтехим, - 1991. - Вып. № 2. - 62 с.

77. Payne A.R. Histeresis in Rubber Vulcanisates // J.Pol. Sci., Symp. - 1974. - P. 169-196.

78. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.В. Теория ползучести неоднородных сред. - М.: Наука, 1983. - 336 с.

79. Арутюнян Н.Х., Зевин А.А. Об одном классе ядер ползучести стареющих материалов // Докл. АН СССР. - 1981. - Т. 258, № 3. - С. 559-561.

80. ГОСТ 269-66. Резина. Общие требования к проведению физико-механических испытаний. - Взамен ГОСТ 269-53; Введ. 01.07.66 до 01.01.97. - М.: Изд. станд., 1990. - 13 с.

81. ГОСТ 9982-76. Резина. Методы определения релаксации напряжения при сжатии. - Взамен ГОСТ 9982-62, ГОСТ 11099-64 в части метода определения напряжения; Введ. 01.01.78 до 01.01.93. - М.: Изд. станд., 1976. - 10 с.

82. ГОСТ 11053-75. Резина. Метод определения условно-равновесного модуля. - Взамен 11053-64; Введ. 01.01.78 до 01.01.93. - М.: Изд-во стандартов, 1976. - 3 с.

83. ГОСТ 23326-78. Резина. Методы динамических испытаний. Общие требования; Введ. 01.01.80 до 01.01.95. - М.: Изд-во стандартов, 1979. - 13 с.

84. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. - М.: Наука, 1966. - 372 с.

85. Крылов В.И., Скобя Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. - М.: Наука, 1979. - 223 с.

86. Синайский Е.С. Об одном способе обработки кривых экспериментальной реологии // Механика твердого тела. - 1967. - № 6. - С. 127-130.

87. Екельчик В.С., Рябов В.М. Применение преобразования Лапласа для численного решения линейных уравнений вязкоупругости // Процессы релаксации в твердых телах. - М.: Наука, 1982. - С. 21-25.

88. Синайский Е.С. О численной реализации функции наследственного оператора // Прикладная математика и механика. - 1978. - т. 42. - С. 1115-1122.

89. Екельчик В.С. Применение дробно-экспоненциальных функций для описания вязкоупругого поведения полимеров в широком температурном диапазоне // Механика твердого тела. - 1980. - № 1. - С. 116-123.

90. Демидова И.И., Екельчик В.С. Об описании реологии полимеров с помощью суммы дробно-экспоненциальных функций // Исследования по упругости и пластичности. - Л.: ЛГУ, 1978. - Вып. 12. - С. 107-113.

91. А.С. 9835506(СССР). G 01 N 3/30. Способ определения динамических характеристик эластичных материалов / Потураев В.Н., Червоненко А.Г., Круш И.И., Надутый В.П. - Оpubл. в Бюл, 1982. - № 47.

92. Способы определения динамических характеристик эластичных материалов / Потураев В.Н., Червоненко А.Г., Круш И.И., Надутый В.П. и др // Тез. докл. симп. "Вопросы механики резиновых конструкций тяжелых горно-металлургических машин". - Диск, 1983. - С. 21-22.

93. Надутый В.П., Ободан Ю.Н. Экспериментальные исследования взаимодействия жесткого штампа с эластичным слоем // Транспортные и горные машины. Сб. науч. тр. - Киев: Наукова думка, 1983. - С. 69-73.

94. Адамов А.А. Описание вязкоупругого поведения несжимаемости материалов при конечных деформациях: Дис.... канд. техн. наук защищена 11.03.80. М.: МИЭМ, 1980. - 177 с.

95. Адамов А.А. Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях // Структурная механика неоднородных сред. - Свердловск: УИЦ АН СССР, 1982. - С. 8-11.

96. Адамов А.А. К построению нелинейной модели вязкоупругого поведения наполненных резин при конечных деформациях // Каучук и резина. - 1996. - № 5. - С. 27-30.

97. Надутый В.П., Круш И.И. Определение реологических характеристик полимерных просенвающих поверхностей грохотов // Сб. науч. тр. Вибрационные эффекты в горных машинах и технологиях. - Киев: Наук. думка, 1990. - С.94-98.

98. Червоненко А.Г. Математическое моделирование реологических процессов взаимодействия сыпучей среды с вибрационным питателем для выпуска руды // Теория и расчет горных машин. - Киев: Наук. думка, 1982. - С.101.

99. Потураев В.Н., Червоненко А.Г., Ободан Ю.Я. Динамика и прочность вибрационных транспортно-технологических машин; Под ред. Рагульскаса К. -М.-Л.: Машиностроение, 1989. - 112 с.

100. Надутый В.П. Исследование релаксационных характеристик резиновых элементов и идентификация их математической модели для выбора режима вулканизации // Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров, 23-26 июня 1997, Днепрпетровск. - Днепрпетровск: Поліграфіст, 1998. - Т. 3. - С. 346-355.

101. Соболев И.М., Статников Р.Б. ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования // Проблемы случайного поиска. -1972. -№1 - С. 117-135.

102. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. - М.: Наука, 1981. -112 с.