

## ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ РЕЗИНОКОРДНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В КАРКАСАХ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИН

Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров

Государственный НИИ крупногабаритных шин, г. Днепрпетровск

Для получения у пневматической шины наилучшего баланса свойств еще на стадии проектирования, необходимо ее меридиональное сечение, распределение и подбор материалов по этому сечению рассчитать и построить так, чтобы в процессе последующей эксплуатации шины, возникающие деформации и напряжения в ее материалах, были бы благоприятными с точки зрения усталостной прочности. Иными словами, шина должна быть сконструирована, а материалы выбраны и распределены по ее меридиональному сечению таким образом, чтобы в течение миллионов циклов изгиба стенок шины под воздействием эксплуатационных нагрузок их материалы не разрушались.

Шина - сложная конструкция, что делает предельно тяжелым решение задачи расчета ее напряженно-деформированного состояния<sup>1</sup>, а, стало быть, и проектирования шины с наилучшим балансом свойств, когда выбранные геометрия и материалы ее меридионального сечения оптимальны, то есть когда шина, деформированная эксплуатационными нагрузками, будет обладать минимум миниморумом потенциальной энергии.

Основная трудность, возникающая при исследовании н.д.с. шины, обусловлена материалами, применяемыми в ней, главным образом, проблемой получения удобных и достаточно точных (с точки зрения инженерной практики) математических выражений для описания упругих характеристик и закона деформирования ее слоистых анизотропных стенок. Специфичность механических свойств резин и кордов, а также несоизмеримость значений их жесткостей, осложняет в значительной мере применение классической механики для описания упругих характеристик и закона деформирования слоистых (составных) резинокордных (композитных) стенок шины, а, стало быть, осуществлять прогноз их н.д.с. и усталостной прочности.

Свойства, особенно упругие, составных резинокордных материалов, образующих стенки пневматических шин, не так хорошо известны и начали привлекать серьезное внимание исследователей только в последние 20-25 лет.

<sup>1</sup> В дальнейшем вместо полного названия термина "напряженно-деформированного состояния" будем использовать следующее сокращение: "н.д.с."

Упругие свойства составных резинокордных стенок шины (модули упругости и сдвига, коэффициенты Пуассона, параметры жесткостей) анизотропные, то есть изменяются с изменением направления.

Эксплуатационные характеристики пневматической шины в первую очередь определяются упругими анизотропными свойствами ее составных резинокордных стенок. Например, угол нитей корда в точках короны, обеспечивающий максимальное сопротивление протектора износу у радиальной шины с металлокордным брекером, отличается для такого же размера радиальной шины с текстильным анидным брекером. Если этот факт при изготовлении шин с использованием всех имеющихся типов кордов и составов резины будем устанавливать путем различных испытаний шин методом проб и ошибок, то потребуются значительные средства и время. Поэтому, для оптимизации того или иного эксплуатационного параметра на стадии ее проектирования, необходимо уметь теоретически определять (рассчитывать) упругие анизотропные свойства и деформированное состояние составных резинокордных стенок шины. Стало быть, теория о механике работы анизотропных составных резинокордных материалов, как в случае шин, нужна и должна по экономическим соображениям использоваться для анализа технических достоинств возможных конструкций пневматических шин.

Современные сведения о механике составных анизотропных материалов содержатся в фундаментальных работах [1], [2], [3], [4] и [5], написанных, однако, для исследования напряжений и деформаций в элементах конструкций из жестких составных анизотропных материалов. При выводе основных уравнений механики жестких составных анизотропных материалов авторы этих работ считали арматуру изотропным материалом, вследствие чего в уравнениях использовался только один упругий параметр арматуры - продольный модуль упругости. Такая аппроксимация механических свойств арматуры мало сказывается на точности расчета н.д.с. жестких анизотропных материалов, но это не может не отразиться на точности расчета н.д.с. эластичных анизотропных резинокордных материалов в силу существенной анизотропии армирующих нитей корда.

В шинной промышленности первое сообщение о количественном исследовании упругих свойств составного резинокордного материала было опубликовано в Германии в 1939 году Маргином [6], который, используя теорию тонких сферических и цилиндрических оболочек, исследовал работу диагональных авиационных шин, форма меридионального сечения которых близка к круговому тору. Метод в работе [6] именуется модифицированным сетевым анализом для расчета ортотропных модулей упругости составной резинокордной системы. Недостатком этой работы является то, что нити корда в ней считались изотропным армирующим материалом.

Прошло 20-25 лет, прежде чем вопрос свойств резинокордных материалов вновь привлек серьезное внимание таких исследователей, как Бидерман и др.

[7] в СССР, Кларк [8] в США, Гаф [9] в Великобритании, Акасака [10] в Японии. Хотя все эти работы весьма полезны при исследовании определенных проблем механики шин, большая часть уравнений, полученных в них без учета анизотропных свойств армирующих нитей корда, не может быть использована для прогнозирования или объяснения определенных физических явлений, связанных с деформационными характеристиками слоистых резинокордных элементов, таких, например, как зависимость эксплуатационных показателей шины от деформаций при изгибе и растяжении, влияние порядка укладки резинокордных слоев на эксплуатационные характеристики шины, зависимость межслойных деформаций сдвига в шине от нагрузок.

В настоящей работе предполагается заполнить пробелы в исследованиях механики работы слоистых резинокордных материалов типа каркасов радиальной и диагональной шин.

Целью исследований ставилось компактно описать на уровне структурного анализа упругие характеристики и законы деформирования слоистых анизотропных резинокордных материалов, применяемых в каркасах радиальных и диагональных шин.

В слоях резинокордных композитов, используемых в пневматических шинах, анизотропные нити корда<sup>2</sup> располагаются в изотропной резиновой матрице непрерывно и направленно.

Рассмотрим сначала элементарный обрешиненный слой корда, в котором нити корда располагаются непрерывно и параллельно друг другу в изотропной резиновой матрице, как это показано на рис. 1. Такой резинокордный слой является типовым для каркасов радиальных шин и его структура такова, что в прямоугольной системе координат LOTZ он может считаться квазиоднородным трансропным листовым материалом.

Если ограничиться плоским напряженным состоянием, которое реально возникает в стенках пневматической шины, то уравнения обобщенного закона Гука для трансропного резинокордного слоя запишутся так [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= a_{11} \sigma_L + a_{12} \sigma_T, & \varepsilon_{TZ} &= a_{44} \sigma_{TZ}, \\ \varepsilon_T &= a_{12} \sigma_L + a_{22} \sigma_T, & \varepsilon_{LZ} &= a_{55} \sigma_{LZ}, & \varepsilon_{LT} &= a_{66} \sigma_{LT}. \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>2</sup> Нити корда, обладающие низким удлинением, служат арматурой резины и воспринимают большую часть нагрузок, действующих на шину во время эксплуатации.

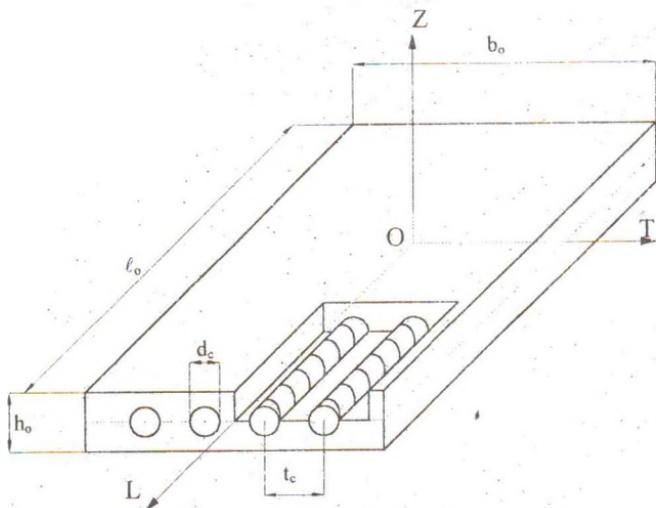


Рис.1. Схема листа резинокордного полотна, состоящего из ряда параллельных текстильных нитей в резине.

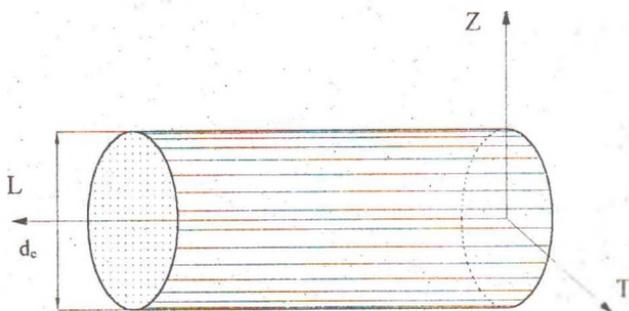


Рис.2. Идеализированный текстильный шинный корд.

Здесь: индексы L, T и Z соответствуют осям системы координат, изображенной на рис.1;  $\varepsilon_L, \varepsilon_T$  - относительные деформации в направлении осей L и T соответственно;  $\varepsilon_{TZ}, \varepsilon_{LZ}, \varepsilon_{LT}$  - относительные деформации сдвига между осями T и Z, L и Z, L и T соответственно;  $\sigma_{TZ}, \sigma_{LZ}, \sigma_{LT}$  - соответствующие деформациям  $\varepsilon_{TZ}, \varepsilon_{LZ}, \varepsilon_{LT}$  сдвиговые напряжения.

Коэффициенты податливости  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) и  $a_{jj}$  ( $j = 4, 5, 6$ ) выражаются через упругие постоянные

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_L}, & a_{22} &= \frac{1}{E_T}, & a_{12} &= -\frac{\nu_{TL}}{E_T} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}, \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{TZ}}, & a_{55} &= a_{66} = \frac{1}{G_{LT}}. \end{aligned} \quad (a)$$

Здесь:  $E_L$  и  $E_T$  - модули упругости трансропного резинокордного слоя по направлениям L и T соответственно;

$\nu_{TL}, \nu_{LT}$  - коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сокращение слоя при растяжении его в направлении осей координат (первый нижний индекс показывает направление действия силы, второй - направление сокращения);

$G_{TZ}, G_{LT}$  - модули сдвига трансропного резинокордного слоя, характеризующие связь сдвиговых напряжений с изменением углов между направлениями T и Z и L и T соответственно.

Так как нити корда из-за конструктивных особенностей обладают существенной анизотропией  $\left( \frac{E_{cL}}{G_{cLT}} \geq 250 \right)$ , то для определения упругих характеристик  $E_L, E_T, \nu_{LT}, \nu_{TL}, G_{LT}$  и  $G_{TZ}$  элементарного трансропного резинокордного слоя, изображенного на рис.1, пользоваться формулами теории [2], где аргумента предполагалась изотропной, мягко говоря, некорректно.

Для получения корректных и, в то же время, компактных формул, определяющих упругие характеристики элементарного трансропного резинокордного слоя, поступим следующим образом. Будем условия работы материалов элементарного трансропного резинокордного слоя (рис.1) имитировать цилиндрической моделью, которая включает в себя цилиндрическую трансропную нить корда диаметра  $d_c$  с ранее измеренными и, стало быть, известными упругими константами  $E_{cL}, G_{cLT}, \nu_{cLT}$ , окруженную цилиндрической изотропной ре-

зновой матрицей с наружным диаметром  $d_g$  и ранее измеренными упругими константами  $E_g$ ,  $\nu_g$ . Такую модель будем представлять как сплошную, но неоднородную среду, обладающую в целом трансстропными свойствами квазиоднородного композитного трансстропного слоя, изображенного на рис.1. Будем предполагать, что:

- между резиновой матрицей и нитью корда существует полное сцепление;
- поскольку поперечный модуль упругости нити корда  $E_{cT}$  значительно больше модуля упругости резины ( $E_{cT} \gg E_g$ ), то можно, без ущерба точности дальнейшим выкладкам, считать

$$E_{cT} = E_{cL}$$

и, стало быть,

$$\nu_{cTL} = \nu_{cLT}$$

Прикладывая к модели, как и в работе [2], внешние растягивающие нагрузки на бесконечности, определяем в соответствии с трехмерными уравнениями теории упругости результирующие напряжения и деформации на цилиндрической поверхности диаметра  $d_g$ . Далее выполняем аналогичный расчет для сплошного однородного трансстропного цилиндрического тела такого же диаметра  $d_g$ , которое предположительно обладает равносильными модели упругими характеристиками. Наконец, сравнивая напряжения и деформации модели с аналогичными напряжениями и деформациями трансстропного сплошного однородного цилиндрического тела, получаем следующие формулы для определения упругих характеристик элементарного трансстропного резинокордного слоя, изображенного на рис.1:

$$\begin{aligned} E_L &= \bar{e} - \frac{\bar{c}^2}{\bar{a}}, & E_T &= \frac{4\bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{e} - \bar{c}^2)}{[(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{e} - \bar{c}^2]}, \\ \nu_{LT} &= \frac{\bar{c}}{2\bar{a}}, & \nu_{TZ} &= \frac{[(\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{e} - \bar{c}^2]}{[(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{e} - \bar{c}^2]}, \\ G_{LT} &= \bar{f}, & G_{TZ} &= \bar{b}, & \nu_{TL} &= \nu_{LT} \cdot \frac{E_T}{E_L} \end{aligned} \quad (b)$$

В этих формулах

$$\bar{a} = \frac{a_g \cdot (a_c + b_g) \cdot (1 - \zeta_c) + a_c \cdot (a_g + b_g) \cdot \zeta_c}{(a_c + b_g) \cdot (1 - \zeta_c) + (a_g + b_g) \cdot \zeta_c}$$

$$\bar{c} = \frac{c_g(\bar{a} - a_c) - c_c(\bar{a} - a_g)}{a_g - a_c},$$

$$\bar{b} = b_g \left[ \frac{2\zeta_c b_c (a_g + b_g) + 2(1 - \zeta_c) b_c b_g + (1 - \zeta_c) a_g (b_c + b_g)}{2\zeta_c b_g (a_g + b_g) + 2(1 - \zeta_c) b_c b_g + (1 - \zeta_c) a_g (b_c + b_g)} \right],$$

$$\bar{e} = \frac{(\bar{c} - c_g) \cdot [\bar{c} - \zeta_c c_c - (1 - \zeta_c) c_g] + (\bar{a} - a_g) \cdot [\zeta_c e_c + (1 - \zeta_c) e_g]}{a - a_g},$$

$$\bar{f} = \frac{f_g \cdot (f_c + f_g) \cdot (1 - \zeta_c) + f_c \cdot 2 \cdot f_g \zeta_c}{(f_c + f_g) \cdot (1 - \zeta_c) + 2 \cdot f_g \zeta_c} \quad (c)$$

Здесь  $\zeta_c = \frac{\pi \cdot d_c^2 \cdot i_0}{4h_0}$  - коэффициент объемного содержания нитей в резинокордном слое,  $i_0 = 1/t_c$  - частота нитей в слое,  $t_c$  - шаг нитей в слое,  $d_c$  - диаметр корда,  $h_0$  - толщина резинокордного слоя.

В выше приведенных формулах использованы комбинации из упругих характеристик резины и корда.

Для резины:

$$a_g = \frac{E_g}{2(1 - \nu_g - 2\nu_g^2)}, \quad b_g = f_g = G_g = \frac{E_g}{2(1 + \nu_g)},$$

$$c_g = 2\nu_g a_g, \quad e_g = 2(1 - \nu_g) a_g. \quad (d)$$

Для корда:

$$a_c = \frac{E_{cl}}{2(1 - \nu_{cTZ} - 2\nu_{cLT}^2)}, \quad b_c = \frac{E_{cl}}{2(1 + \nu_{cTZ})},$$

$$c_c = 2\nu_{cLT} a_c, \quad e_c = 2(1 - \nu_{cTZ}) a_c, \quad f_c = G_{cLT}. \quad (e)$$

Таким образом, если экспериментально определены упругие константы для нитей корда и резиновой матрицы, то без особого труда можно рассчитать по вышеприведенным формулам упругие характеристики квазиоднород-

ного трансропного резинокордного слоя, изображенного на рис. 1.

Решая уравнения (1) относительно составляющих тензора напряжений, будем иметь для квазиоднородного трансропного резинокордного слоя:

$$\begin{aligned}\sigma_L &= C_{11} \varepsilon_L + C_{12} \varepsilon_T, & \sigma_T &= C_{12} \varepsilon_L + C_{22} \varepsilon_T, \\ \sigma_{TZ} &= C_{44} \varepsilon_{TZ}, & \sigma_{LZ} &= C_{66} \varepsilon_{LZ}, & \sigma_{LT} &= C_{66} \varepsilon_{LT}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $C_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ),  $C_{ij}$  ( $j=4, 6$ ) - коэффициенты матрицы жесткости квазиоднородного трансропного резинокордного слоя. Они равны:

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} = \frac{E_L}{(1 - \nu_{LT} \cdot \nu_{TL})}, & C_{22} &= \frac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} = \frac{E_T}{(1 - \nu_{LT} \cdot \nu_{TL})}, \\ C_{12} &= -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} = \frac{\nu_{TL} \cdot E_L}{(1 - \nu_{LT} \cdot \nu_{TL})} = \frac{\nu_{LT} \cdot E_T}{(1 - \nu_{LT} \cdot \nu_{TL})}, \\ C_{44} &= \frac{1}{a_{44}} = G_{TZ}, & C_{66} &= \frac{1}{a_{66}} = G_{LT}.\end{aligned}\quad (f)$$

Определим теперь упругие характеристики квазиоднородного трансропного резинокордного листа в повернутой прямоугольной системе координат 0123 (см. рис.3). Начало новой системы координат совпадает с началом старой прямоугольной системы координат 0LTZ (рис.1). Ось 03 совпадает с осью 0Z, а ось 01 повернута на некоторый угол  $\alpha$  относительно оси 0L (направления нитей). В повернутой системе координат квазиоднородный трансропный резинокордный слой (рис.3) будет обладать уже анизотропными свойствами. Этот (рис.3) квазиоднородный анизотропный резинокордный слой является типовым для каркасов диагональных шин и связь напряжений с деформациями становится здесь более сложной, чем зависимости (1) и (2). Напряжения через деформации выражаются теперь так:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ & b_{22} & b_{26} \\ & & b_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{44} & b_{45} \\ & b_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{vmatrix}\quad (3)$$

Здесь:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$  - компоненты тензора напряжений в новой системе координат (0123);

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$  - компоненты тензора деформаций в новой системе координат.

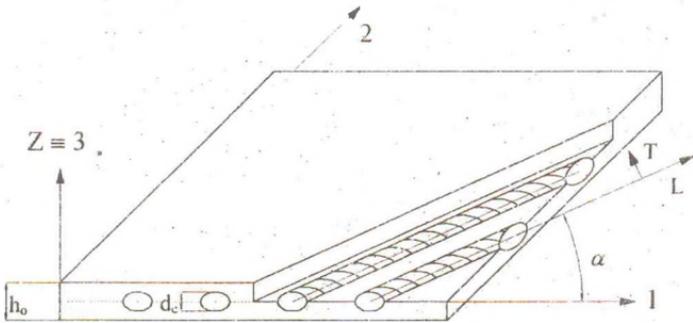


Рис. 3. Элементарный резинокордный слой с прямоугольной системой координат  $0123(Z)$ , повернутой на угол  $\alpha$  по отношению к направлению нитей.

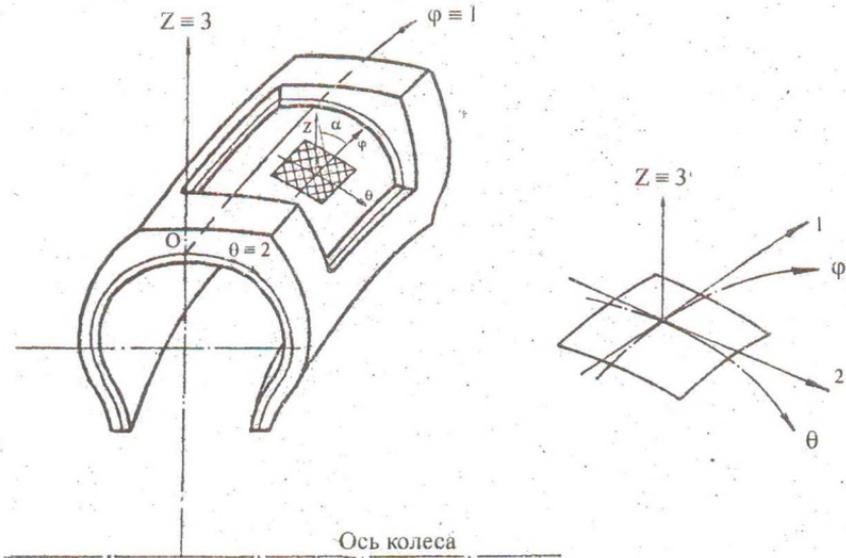


Рис. 4. Обозначения системы координат, принятой для описания геометрии шины, армированной резинокордными слоями.

Коэффициенты матрицы жесткостей  $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ & b_{22} & b_{26} \\ & & b_{66} \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} b_{44} & b_{45} \\ & b_{55} \end{vmatrix}$  симмет-

ричные, поэтому они в нижнем левом углу матрицы не выписаны. Они получают-ся зеркальным отображением относительно главных диагоналей. Для коэф-фициентов матрицы жесткостей имеют место выражения:

$$\begin{aligned} b_{11} &= C_{11}n^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})m^2n^2 + C_{22}m^4, \\ b_{22} &= C_{11}m^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})m^2n^2 + C_{22}n^4, \\ b_{12} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + 2C_{66})]m^2n^2 + C_{12}, \\ b_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + 2C_{66})]m^2n^2 + C_{66}, \\ b_{16} &= (C_{12} + 2C_{66} - C_{11})mn^3 + (C_{22} - C_{12} - 2C_{66})m^3n, \\ b_{26} &= (C_{12} + 2C_{66} - C_{11})m^3n + (C_{22} - C_{12} - 2C_{66})mn^3, \\ b_{44} &= C_{66}m^2 + C_{44}n^2, \quad b_{55} = C_{66}n^2 + C_{44}m^2, \\ b_{45} &= (C_{44} - C_{66})m \cdot n. \end{aligned} \quad (g)$$

Здесь  $m = \sin \alpha$ ,  $n = \cos \alpha$ . (h)

Разрешив уравнения (3) относительно  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$ , получим сле-дующие зависимости:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{16} \\ & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{26} \\ & & \bar{a}_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{44} & \bar{a}_{45} \\ & \bar{a}_{55} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Здесь матрицы коэффициентов деформаций  $\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{16} \\ & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{26} \\ & & \bar{a}_{66} \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} \bar{a}_{44} & \bar{a}_{45} \\ & \bar{a}_{55} \end{vmatrix}$  симмет-

ричные и поэтому левые нижние элементы в них не выписаны.

Обратимся теперь к структурам, составленным из элементарных резино-

кордных слоев, которые используются в пневматических шинах. На рис.4 изображена схема диагональной пневматической шины и криволинейная система координат  $0\varphi\theta Z$ , обычно используемая в оболочках вращения. Такой оболочкой мы считаем армированную часть шины - каркас. Криволинейная система координат локально совпадает с прямоугольной системой, изображенной на рис 3. Это совпадение показано отдельно на рис. 4 справа.

Каркас диагональной шины, состоит из нескольких резинокордных слоев, направления нитей в которых взаимно перекрещиваются и образуют с окружающим направлением углы  $\pm \alpha$ . В массиве резинокордной конструкции выбирают некоторую поверхность приведения сил и моментов. На ней и введена криволинейная система координат  $0\varphi\theta Z$  оболочки вращения. Далее применяется обычный аппарат теории оболочек.

Используется гипотеза Кирхгоффа-Лява, согласно которой (см., например, [12] или [3]) деформации  $\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}$   $k$ -го резинокордного слоя ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(k)} \\ \varepsilon_2^{(k)} \\ \varepsilon_{12}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_{12}^0$  - относительные деформации удлинений и сдвига координатной поверхности;  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$  - изменения кривизн координатной поверхности;  $z$  - координата по оси  $OZ$  любой точки, принадлежащей  $k$ -му слою резинокорда.

Введем обычное понятие о результирующих усилиях  $N_\varphi, N_\theta, N_{\varphi\theta}$  и моментах  $M_\varphi, M_\theta, M_{\varphi\theta}$ , действующих на гранях элемента координатной поверхности:

$$\begin{pmatrix} N_\varphi \\ N_\theta \\ N_{\varphi\theta} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot dz, \quad \begin{pmatrix} M_\varphi \\ M_\theta \\ M_{\varphi\theta} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot z \cdot dz. \quad (6)$$

Здесь  $h_k$  и  $h_{k+1}$  - соответственно нижняя и верхняя границы интегрирования по координате  $z$  для  $k$ -го слоя резинокорда. Подставив выражения (3) и (5) в (6) и проведя интегрирование, получим связь между суммарными внутренними усилиями и деформациями координатной поверхности оболочки (часто эти выра-

жения в теории оболочек называют соотношениями упругости [3]):

$$\begin{pmatrix} N_{\varphi} \\ N_{\theta} \\ N_{\varphi\theta} \\ M_{\varphi} \\ M_{\theta} \\ M_{\varphi\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где коэффициенты матриц жесткостей слоистой оболочки

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n b_{ij}^{(k)} \cdot (h_{k+1} - h_k), & B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_{ij}^{(k)} \cdot (h_{k+1}^2 - h_k^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n b_{ij}^{(k)} \cdot (h_{k+1}^3 - h_k^3), & (ij=11, 12, 22, 16, 26, 66). \end{aligned} \quad (k)$$

Уравнения (7) устанавливают зависимость между усилиями и деформациями произвольно собранных в единый пакет элементарных резинокордных слоев.

Из формул (k) и (a) - (h) следует, что коэффициенты матриц жесткостей оболочки (слоистой резинокордного каркаса шины) зависят от числа слоев и их толщин, а также угловой ориентации, диаметра и частоты нитей корда в слоях, последовательности расположения слоев в стенках оболочки и, наконец, упругих свойств резин и кордов, составляющих слои. Поэтому, чем сложнее будет структура слоистых композитных стенок оболочки (каркаса), тем большее количество математических операций придется проделывать при расчете их жесткостей, из-за чего желательно иметь вычислительную машину с большой скоростью работы.

Однако во многих практически важных случаях матрицы жесткостей  $|A_{ij}|$ ,  $|B_{ij}|$  и  $|D_{ij}|$  слоистой оболочки могут быть значительно упрощены. Для частного, но очень часто встречающегося на практике случая пакета с четным числом одинаковых резинокордных слоев ( $n=2m$ ) и чередующимися знаками углов наклона нитей к меридиану шины по закону  $\alpha^{(k)} = (-1)^k \cdot \alpha$  или  $\alpha^{(k)} = (-1)^{k+1} \cdot \alpha$ , уравнения (7) можно привести к относительно простому виду, если в качестве поверхности приведения (она же координатная поверхность) взять срединную поверхность оболочки:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= A_{11} \varepsilon_1^0 + A_{12} \varepsilon_2^0 + B_{16} \kappa_{12}, \\
 N_{\theta} &= A_{12} \varepsilon_1^0 + A_{22} \varepsilon_2^0 + B_{26} \kappa_{12}, \\
 N_{\varphi\theta} &= A_{66} \varepsilon_{12}^0 + B_{16} \kappa_1 + B_{26} \kappa_2, \\
 M_{\varphi} &= B_{16} \varepsilon_{12}^0 + D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2, \\
 M_{\theta} &= B_{26} \varepsilon_{12}^0 + D_{12} \kappa_1 + D_{22} \kappa_2, \\
 M_{\varphi\theta} &= B_{16} \varepsilon_1^0 + B_{26} \varepsilon_2^0 + D_{66} \kappa_{12}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В данном случае:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= h b_{ij}^{(k)}, \quad D_{ij} = \frac{h^3}{12} b_{ij}^{(k)}, \quad (ij=11, 12, 22, 66), \\
 B_{i6} &= \pm \left( \frac{h^2}{2n} \right) b_{i6}^{(k)}, \quad (i=1,2), \\
 A_{16} &= A_{26} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \quad B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $h$  - общая толщина пакета. Можно указать случаи, когда зависимости усилий и моментов от деформаций и изменений кривизн получаются еще более простыми, чем (8). Например, для четырехслойного каркаса диагональной шины с одинаковыми элементарными резинокордными слоями, когда слои собраны в пакет нестандартно с последовательностью чередования углов наклона нитей к меридиану шины

$$+ \alpha, -\alpha, -\alpha, +\alpha \quad \text{или} \quad -\alpha, +\alpha, +\alpha, -\alpha,$$

и со срединной поверхностью этого пакета в качестве поверхности приведения. В этом случае уравнения (8) распадаются на две несвязанные системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= A_{11} \varepsilon_1^0 + A_{12} \varepsilon_2^0, \\
 N_{\theta} &= A_{12} \varepsilon_1^0 + A_{22} \varepsilon_2^0, \\
 N_{\varphi\theta} &= A_{66} \varepsilon_{12}^0;
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi} &= D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2, \\
 M_{\theta} &= D_{12} \kappa_1 + D_{22} \kappa_2, \\
 M_{\varphi\theta} &= D_{66} \kappa_{12}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

В уравнениях (10), (11) компоненты матрицы жесткостей записываются так:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= hb_{ij}^{(k)}, & D_{ij} &= \frac{h^3}{12} b_{ij}^{(k)}, \quad (ij=11, 12, 22, 66), \\ B_{16} &= B_{26} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Наконец, для стандартного симметричного резинокордного пакета заданной суммарной толщины  $h$ , содержащего большое количество слоев, побочные жесткости  $B_{16}$  и  $B_{26}$  становятся пренебрежимо малыми и также могут быть опущены из уравнений (8). В самом деле, из соотношений (9) для симметричного резинокордного пакета имеем:

$$B_{i6} = \frac{h^2}{2n} \left| b_{i6}^{(k)} \right|, \quad (i=1,2).$$

Рассматривая предел этого выражения при  $n \rightarrow \infty$ , будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{i6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^2}{2n} \left| b_{i6}^{(k)} \right| = 0. \quad (13)$$

Таким образом, с представлением (13) уравнения (8) опять принимают вид (10) и (11).

Полученные здесь результаты означают, что при деформации нестандартного или с большим числом слоев стандартного симметричных резинокордных пакетов в их плоскости, в этих пакетах возникают только мембранные усилия, тогда как изгибающие и крутящие моменты связаны только с изменением кривизн.

*Этот весьма интересный результат дает основание сделать вывод о том, что нестандартный или стандартный, но с большим числом слоев, симметричные резинокордные пакеты ведут себя как единые квазиоднородные упругие ортотропные материалы с главными направлениями ортотропии, совпадающими с координатными направлениями  $\phi(1)$ ,  $\theta(2)$ , а уравнения (10) и (11) представляют собой обобщенный закон Гука для конструктивно ортотропного слоистого резинокордного пакета.*

Используем этот вывод. С этой целью, решая уравнения (10) относительно деформаций координатной поверхности  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_2^0$ ,  $\varepsilon_{12}^0$  и замечая с помощью (12), что

$$A_{ij} = h \cdot b_{ij}^{(k)}, \quad (ij=11, 12, 22, 66), \quad (14)$$

а также принимая во внимание, что

$$\frac{N}{l_1} = \sigma_{\varphi}, \quad \frac{N}{l} = \sigma_{\theta}, \quad \frac{N}{h} = \sigma_{\varphi\theta}, \quad (15)$$

получим после несложных преобразований для конструктивно ортотропного резинокордного пакета:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 = \varepsilon_{\varphi}^0 &= \frac{b_{22}^{(k)}}{b_{11}^{(k)}b_{22}^{(k)} - [b_{12}^{(k)}]^2} \cdot \left( \sigma_{\varphi} - \frac{b_{12}^{(k)}}{b_{22}^{(k)}} \sigma_{\theta} \right), \\ \varepsilon_2^0 = \varepsilon_{\theta}^0 &= \frac{b_{11}^{(k)}}{b_{11}^{(k)}b_{22}^{(k)} - [b_{12}^{(k)}]^2} \cdot \left( \sigma_{\varphi} - \frac{b_{12}^{(k)}}{b_{11}^{(k)}} \sigma_{\theta} \right), \\ \varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{\varphi\theta}^0 &= \frac{1}{b_{66}^{(k)}} \cdot \sigma_{\varphi\theta}. \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, обобщенный закон Гука для однородного ортотропного тела записывается согласно [11] так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi}^0 &= \frac{1}{E_{\varphi}} \left( \sigma_{\varphi} - \nu_{\varphi\theta} \cdot \sigma_{\theta} \right), & \varepsilon_{\theta}^0 &= \frac{1}{E_{\theta}} \left( \sigma_{\theta} - \nu_{\theta\varphi} \cdot \sigma_{\varphi} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\theta}^0 &= \frac{1}{G_{\varphi\theta}} \cdot \sigma_{\varphi\theta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сравнивая (16) с (17), находим упругие константы для спакетированного из резинокордных слоев квазиоднородного конструктивно ортотропного материала в таком окончательном виде:

$$\begin{aligned} E_{\varphi} &= \frac{b_{11}^{(k)}b_{22}^{(k)} - [b_{12}^{(k)}]^2}{b_{22}^{(k)}}, & E_{\theta} &= \frac{b_{11}^{(k)}b_{22}^{(k)} - [b_{12}^{(k)}]^2}{b_{11}^{(k)}}, \\ \nu_{\varphi\theta} &= \frac{b_{12}^{(k)}}{b_{22}^{(k)}}, & \nu_{\theta\varphi} &= \frac{b_{12}^{(k)}}{b_{11}^{(k)}}, & G_{\varphi\theta} &= b_{66}^{(k)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Что касается модулей поперечного сдвига  $G_{\varphi\theta}$ ,  $G_{\theta\varphi}$  симметричного конструктивно ортотропного слоистого резинокордного пакета, то:

$$G_{\varphi z} = G_{13}^{(k)} = \frac{1}{\bar{a}_{55}^{(k)}}, \quad G_{\theta z} = G_{23}^{(k)} = \frac{1}{\bar{a}_{44}^{(k)}}, \quad (19)$$

где

$$\bar{a}_{44}^{(k)} = a_{44}^{(k)} \cdot n^2 + a_{66}^{(k)} \cdot m^2, \quad \bar{a}_{55}^{(k)} = a_{44}^{(k)} \cdot m^2 + a_{66}^{(k)} \cdot n^2. \quad (20)$$

Итак, в настоящей работе на уровне структурного анализа и законов упругости анизотропного твеза представлена разработанная теория деформирования слоистых резинокордных систем, используемых в каркасах радиальных и диагональных шин. Эта теория впервые позволяет учесть анизотропию упругих свойств нитей корда (арматуры) и описать компактными аналитическими формулами ее влияние на упругие характеристики слоистых резинокордных материалов (систем), а также на связи между напряжениями и деформациями, возникающими в них под действием внешних нагрузок.

Формулы<sup>3</sup>, описывающие упругие характеристики слоистых резинокордных систем и связи между их напряжениями и деформациями, являются четко выраженными функциями от: упругих констант резин и нитей корда; ориентации, геометрических размеров и частоты нитей корда в слоях; резиносодержания в слоях; наличия в слоях разных резин и различных кордов, а также других макроскопических параметров. Это обстоятельство дает широкую возможность конструктору управлять механическими свойствами резинокордных систем и отыскивать на стадии проектирования конструктивные оптимальные решения каркасов радиальной и диагональной шин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. Перев. с англ. Изд-во «МИР», -М.: 1982, 334 с.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига, Зинатне, 1967, -398 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. -М.: Физматгиз, 1961. -384 с.
4. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Изд-во «Машиностроение». М., 1965, 272 с.
5. Jones R.M. Mechanics of Composite Materials. Mc Graw-Hill. New York, 1975.
6. Martin F. Theoretische Untersuchungen zur Frage des Spannungszustande im

<sup>3</sup>Пример использования этих формул можно найти в работе [13].

Luftreifen der Abplattung. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung. Teil 1, 1939, s. 470-496.

7. Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л. и др. Автомобильные шины// Госхимиздат. -М.: 1963, 383 с.

8. Clark S.K. A Review of Cord-Rubber Elastic Characteristics. Rubber Chemistry and Technology, 37, 1964, pp. 1365-1390.

9. Gough V.E. Stiffness of Cord and Rubber Constructions. Rubber Chemistry and Technology, 41, 1968, pp. 988-1021.

10. Akasaka T. Various Reports and/of Bulletins of the Faculty of Science and Engineering (Chuo University, Tokyo, 1959-1964).

11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. -М.: Гостехиздат, 1950.

12. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград, Судпромгиз, 1962. -431 с.

13. Растеряев Ю.К., Каспаров А.А. Удругие характеристики и механика деформирования составных анизотропных резинокордных систем пневматических шин// Труды I Международного симпозиума по механике эластомеров. Т. II. Севастополь, 1994, июнь. -Днепропетровск, 1996. -С. 47-66.

УДК 678.04:678.065.001.24:539.3/4

## ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БРЕКЕРА

Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров

Государственный НИИ крупногабаритных шин, г. Днепропетровск

В шинной промышленности брекером называют элемент радиальной пневматической шины, представляющий собой резиновый пояс, армированный нитями корда с обрезанными концами на его края.

В радиальной шине брекер является одним из основных силовых элементов, обеспечивающий жесткость шины в окружном направлении, поэтому знание его агрегатных упругих параметров и жесткостных свойств является необходимым условием для расчета напряженно-деформированного состояния и конструирования радиальной крупногабаритной шины.

В работе О.В. Фотинич [1] рассматривался вопрос определения приведенного модуля упругости резинокордной полосы конечной ширины в направлении ее длины. При этом, использовалась весьма приближенная расчетная модель резинокордной полосы - нити корда предполагались изотропными с пря-