

**Надутый В.П.**, д-р техн. наук, профессор  
**Елисеев В.И.**, канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр.  
**Луценко В.И.**, канд. техн. наук, ст. научн. сотр.  
(ИГТМ НАН Украины)

## **ПРИБЛИЖЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕТЯЖЕК ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ СЫПУЧЕГО СЛОЯ ПРИ ОБЕЗВОЖИВАНИИ**

**Надутый В.П.**, д-р техн. наук, професор  
**Елісеєв В.І.**, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співр.  
**Луценко В.І.**, канд. техн. наук, ст. наук. співр.  
(ІГТМ НАН України)

## **НАБЛИЖЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УТВОРЕННЯ ПЕРЕТЯЖКИ РІДИНИ МІЖ ЧАСТКАМИ СИПУЧОГО ШАРУ ПРИ ЗНЕВОДНЕННІ**

**Naduty V.P.**, D.Sc. (Tech.), Professor  
**Yeliseev V.I.**, Ph. D.(Phys.-Math.), Senior Researcher  
**Lutsenko V.I.**, Ph.D. (Tech.), Senior Researcher  
(IGTM of NAS of Ukraine)

## **APPROXIMATE MATHEMATICAL MODEL OF LIQUID BRIDGE FORMATION BETWEEN PARTICLES IN THE LOOSE LAYER WHILE DEWATERING**

**Аннотация.** Предложена физическая модель образования перетяжки жидкости между частицами сыпучего слоя при обезвоживании. В соответствии с моделью, при опускании уровня жидкости около твёрдых тел, вследствие действия капиллярных сил, формируются два мениска сложной формы. Это верхний мениск между боковыми поверхностями твёрдых тел, представляющий часть поверхности изучаемой перетяжки, и нижний мениск между телами и опускающимся основным слоем жидкости. Оба мениска имеют особенности, связанные с формой ограничивающих поверхностей.

На основе гидростатических уравнений определены равновесные положения поверхностей жидкости и условия, при которых образуется перетяжка. Получено, что с уменьшением угла смачивания перетяжка может образовываться между частицами находящимися на большем расстоянии друг от друга. Определено, что для образования перетяжек при обезвоживании необходимо, чтобы расстояние между частицами в сыпучем слое не превышало определённую длину, которая в несколько раз меньше критической длины, рассчитанной по теории устойчивости.

**Ключевые слова:** сыпучий слой, частица, капиллярные силы, мениск, перетяжка, поверхностное натяжение

Большинство технологических процессов переработки минерального сырья относятся к так называемым «мокрым» процессам, после которых необходимо проводить дополнительные операции по удалению избыточной влаги из полученного продукта. При этом достижение требуемой остаточной влажности является достаточно сложной в плане протекающих физических процессов и энергозатратной процедурой. Поэтому изучение взаимодействия жидкости с твёрдыми частицами при обезвоживании является актуальной задачей.

Известно, например, что при вытеснении жидкости воздухом или опускании её под действием объёмных сил (силы тяжести, центробежной силы и т.д.) часто нарушается фронтальность вытеснения, и образуются сложной формы объёмы остаточной жидкости. Аналогичные образования получаются и при выдавливании одной жидкости другой в дисперсных слоях [1]. Это объясняется наличием капиллярных сил, действующих между жидкостью и твёрдым скелетом дисперсной среды. Для изучения процесса обезвоживания вопрос о наличии и величине объёмов указанных образований становится необходимой и важной задачей.

В работе [2] при рассмотрении процесса опускания жидкости в сыпучем слое было принято, что вся жидкость делится на три основных вида: свободно-капиллярную, истекающую под действием силы тяжести; вязкую плёночную, медленно стекающую по сложной внутренней поверхности скелета, и неподвижную жидкость, условно названную стыковой. Последняя объединяет в себе ту часть жидкости, которая образует достаточно устойчивую капиллярную систему. Устойчивость этой системы обусловлена тем, что капиллярные силы в окрестности точек стыка частиц достигают значительных величин, что определяет прочность влажных дисперсных сред [3]. Близость частиц друг к другу и, в частном случае, соприкосновение их и капиллярные характеристики жидкости определяют образование и существование некоторой перколяционной системы капиллярной жидкости, состоящей как из непрерывных ветвистых каналов, отдельных кластеров и одиночных стыковых перетяжек. Исследование устойчивости перетяжек [4] показало, что они абсолютно неустойчивы (по Рэлею) при достижении определённого расстояния между частицами. Однако, в области устойчивости по отношению к малым возмущениям они, согласно общей теории устойчивости [5], будут неустойчивыми по отношению к конечным возмущениям.

Для капиллярных систем вопрос об устойчивости системы сводится к анализу величин потенциальной энергии, в частности, к её второй вариации [6]. В основе такого подхода лежит теорема Лагранжа об устойчивости автономных систем, которая нашла широкое применение в исследовании устойчивости равновесных конфигураций границ раздела. Однако, для проведения анализа необходимо найти статические положения этих границ. При опускании жидкости возникновение перетяжек обусловлено сочетанием капиллярных сил, действующих на различных участках пористого пространства, причём величины этих сил конечны и далеки от бесконечно малых возмущений, лежащих в основе линейной теории устойчивости. Вследствие этого, можно ожидать, что расстояния между частицами, у которых образуются перетяжки будут значительно меньше, чем даёт теория устойчивости, что подтверждается экспериментальными данными [7].

В данной работе на основе гидростатических уравнений определены равновесные положения поверхностей жидкости при квазистационарном опускании слоя жидкости, в которой находятся два неподвижных цилиндра. Рассмотрение двух тел предполагает, что это некоторая ячейка, которая является элементом сыпучей среды и содержит тот физический механизм, который влияет на количество остающейся жидкости в данной пористой системе. Такая постановка задачи в какой-то степени моделирует процесс образования перетяжек в сыпучем слое между соседними твёрдыми частицами. Использование цилиндрических тел значительно упрощает математическое решение задачи, практически не нарушая физическую её сторону. Однако, в количественном отношении необходимо сознавать, что сравнение с экспериментальными результатами для частиц сферической формы практически неправомерно.

### Основные уравнения

Используя гидростатические уравнения гидромеханики для мениска, находящегося между двумя цилиндрами [8], получим хорошо известное уравнение для плоского мениска

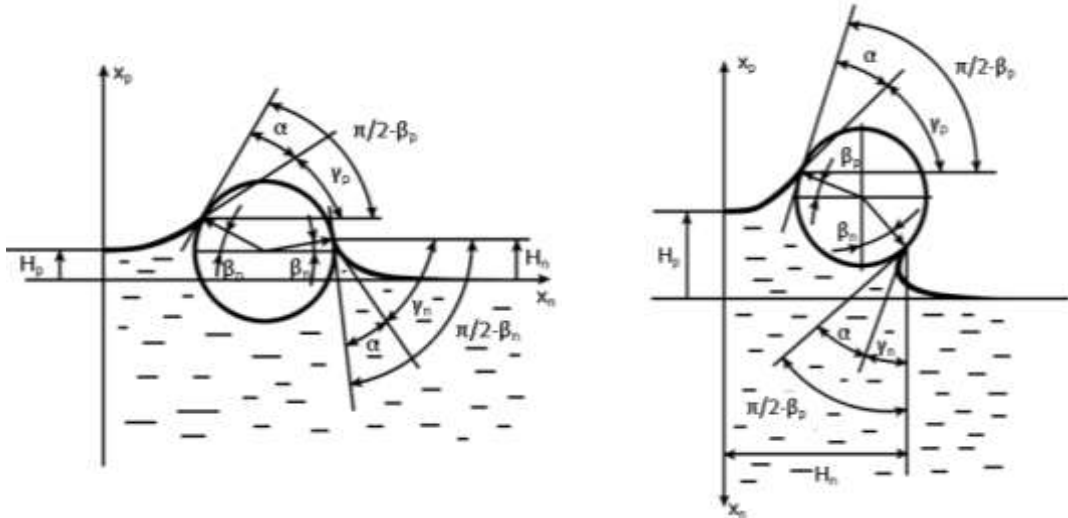
$$\sigma \frac{H''_{xx}}{[1 + (H'_x)^2]^{3/2}} = \rho g H, \quad (1)$$

где  $x$  – координата;

$H$  – высота мениска над поверхностью жидкости (рис. 1);

$\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;

$\rho$  – плотность жидкости;  
 $g$  – ускорение свободно падающего тела.



а – система менисков при небольшом опускании слоя жидкости; б – система менисков перед отрывом слоя жидкости от тел

Рисунок 1 – Схема образования перетяжки

Для решения этого уравнения обезразмерим его следующим образом: введём величины  $\zeta = x / \ell$  и  $h = H/R_C$ , тогда

$$\frac{h''_{\zeta\zeta}}{\left[1 + \left(h'_{\zeta} R_C / \ell\right)^2\right]^{3/2}} = Bo_{\ell} h, \quad (2)$$

где  $\ell$  – расстояние от оси симметрии до точки контакта мениска с телом;

$$Bo_{\ell} = \frac{\rho g \ell^2}{\sigma}.$$

Граничными условиями для этого уравнения являются простые соотношения:

$$\text{при } \zeta = 0 \quad h'_{\zeta} = 0; \quad \text{при } \zeta = 1 \quad h'_{\zeta} = \theta = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta};$$

где  $\alpha$  – угол смачивания;

$\beta$  – угол, показанный на рис. 1.

Для определения формы мениска с внешней стороны цилиндра при небольших углах наклона (рис. 1, а) используем также уравнение (1), но перепишем его в несколько ином безразмерном виде

$$\frac{h''_{\xi\xi}}{\left[1 + \left(h''_{\xi}\right)^2\right]^{3/2}} = Bo_R h, \quad (3)$$

где  $\xi = x / R_C$ ;  $Bo_R = \frac{\rho g R_C^2}{\sigma}$ .

Граничные условия записываются в виде: при  $\eta = 0$  (координата  $\eta$  отсчитывается вниз от точки контакта мениска с телом)  $h'_{\eta} = -\theta$  (величина  $\theta$  определяется так же); при  $\eta \rightarrow s \quad h'_{\eta} \rightarrow \infty$ .

**Анализ результатов расчётов.** Полученные уравнения были численно решены при подборе соответствующих параметров. На рис. 2 показаны кривые менисков для воды, опускающейся между двумя цилиндрами радиусом  $R_c = 5$  мм, расстояния между которыми  $2L = 11,5$  мм, угол смачивания  $\alpha = 45^\circ$ . Рис. 2, а относится к мениску между цилиндрами (2), рис. 2, б – к мениску с внешней стороны (3) и рис. 2, в – к мениску под цилиндрами (5).

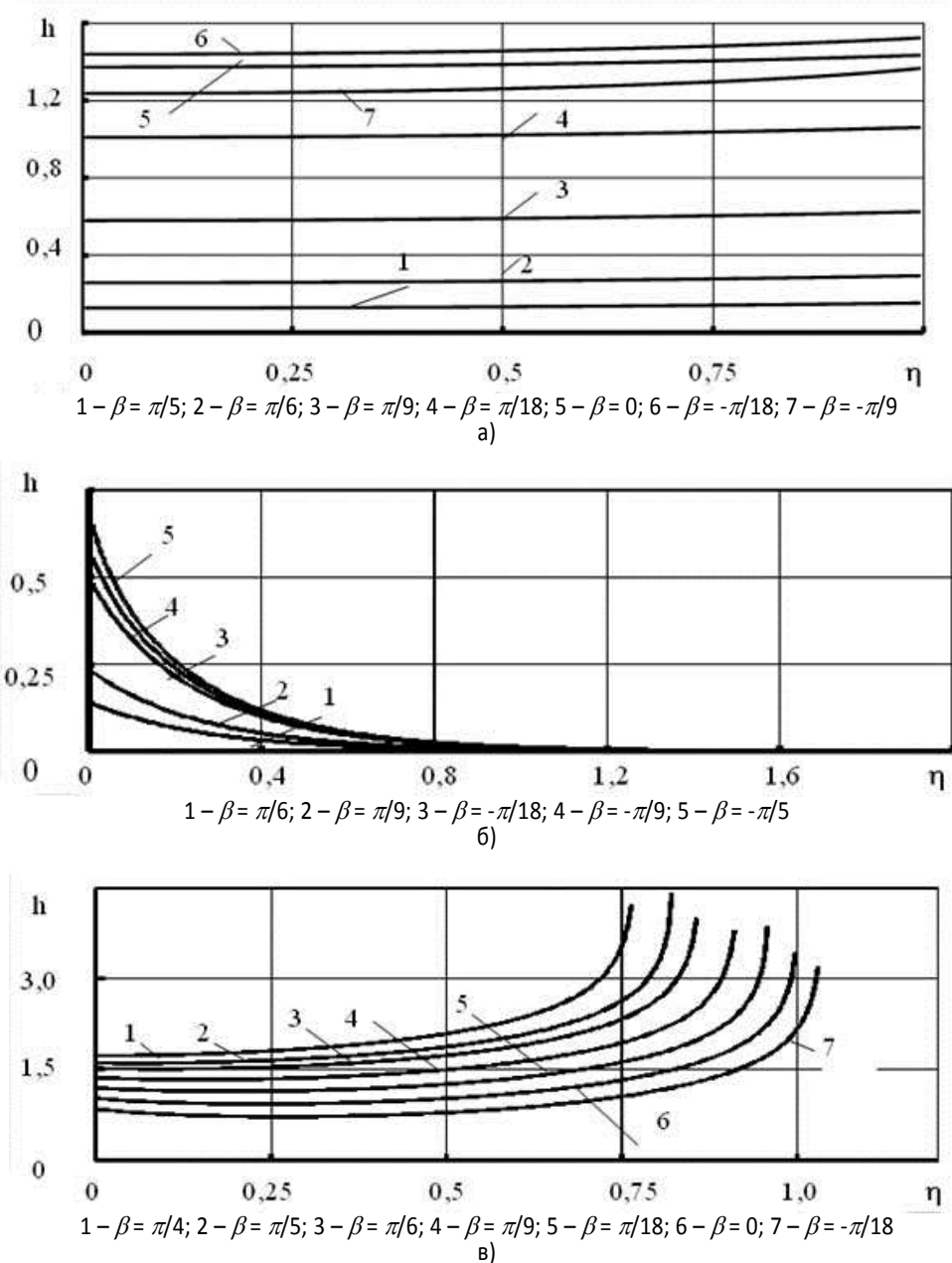


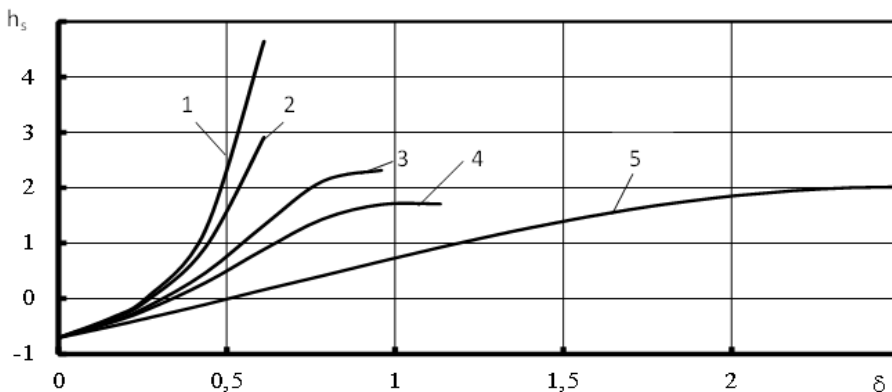
Рисунок 2 – Конфигурации менисков

На рис. 2, а видно, что по мере уменьшения угла увеличивается слой жидкости, который удерживается мениском. Это связано с тем, что уменьшается расстояние между контактами мениска с поверхностью. При прохождении самой узкой части между цилиндрами расстояние начинает затем увеличиваться, в результате чего удерживающая сила начинает уменьшаться. Это видно на этом рисунке по кривой 7, которая оказывается ниже двух

предыдущих. Для внешнего мениска (рис. 2, б) понижение уровня жидкости сводится к большему искривлению мениска и повышению на графике. Когда угол  $\beta$  становится близким к  $-\pi/4$  переход к другой системе координат даёт картину мениска, показанную на рис. 2, в.

При этом видно, что возникший минимум в кривых опускается все ниже по мере уменьшения угла  $\beta$ , т.е. внизу под цилиндрами начинает образовываться перетяжка, соединяющая твёрдые тела с основным слоем воды. Перетяжка между цилиндрами будет образовываться тогда, когда нижняя перетяжка будет разрушаться. Однако, при достаточно больших расстояниях между цилиндрами в этой области может образоваться полость и тогда, если расстояние между границами этой полости и нижним мениском будет меньше, чем толщина слоя на рис. 2, в, то перетяжки между цилиндрами не будет. Это можно показать на рис. 3, на котором приведены относительные высоты внутренних и внешних слоёв для различных случаев. Отсчёт относительной высоты ведётся от оси, соединяющей центры цилиндров, а отсчёт углов  $\delta$  от начального угла  $\beta = \pi/4$ , как для внутреннего мениска, так и для внешнего.

Из этого рисунка следует, что максимальная высота слоя (кривые 1-4) достигается в различных случаях при разных значениях угла внутреннего мениска (для кривых 3, 4 максимумы на рис. 3 видны). Важным обстоятельством здесь является то, что при некотором значении угла  $\delta$  кривая достигает своего максимального подъёма, а затем при дальнейшем движении жидкости слой должен обрушиться. Сравнивая кривые 1-4 с кривой 5 видно, что максимальная величина для внешнего мениска достигается примерно при  $\delta \approx 2,5$ , при этом кривые 1-3 поднимаются несколько выше максимума кривой 5, т.е. для  $L = 5,1$ ;  $5,2$  и  $5,5$  мм произойдёт разрыв нижней перетяжки, что приведёт к образованию перетяжки между цилиндрами. Кривая 4 достигает максимума, который ниже максимума кривой 5, поэтому при достижении соответствующего предельного угла внутренний мениск обрушивается, и перетяжка между цилиндрами не образуется.



$\alpha = 45^\circ$ : 1 -  $L = 5,1$  мм; 2 -  $L = 5,2$  мм; 3 -  $L = 5,5$  мм; 4 -  $L = 5,75$  мм; 5 - внешний мениск

Рисунок 3 – Расстояния от оси цилиндров до поверхности невозмущённой жидкости

Приведенный анализ качественно показывает условия, при которых образуется перетяжка между цилиндрами. В динамических условиях картина, конечно сложнее, но примерный баланс сил должен сохраняться и в реальном процессе. Помимо этого, известно, что при движении жидкости угол смачивания меняется, при этом вводятся понятия углов натекания и оттеkania [9]. Вследствие этого представляет интерес посмотреть влияние углов смачивания на образование перетяжек, поэтому были проведены аналогичные расчёты для случая  $\alpha = 25^\circ$  (рис. 4).

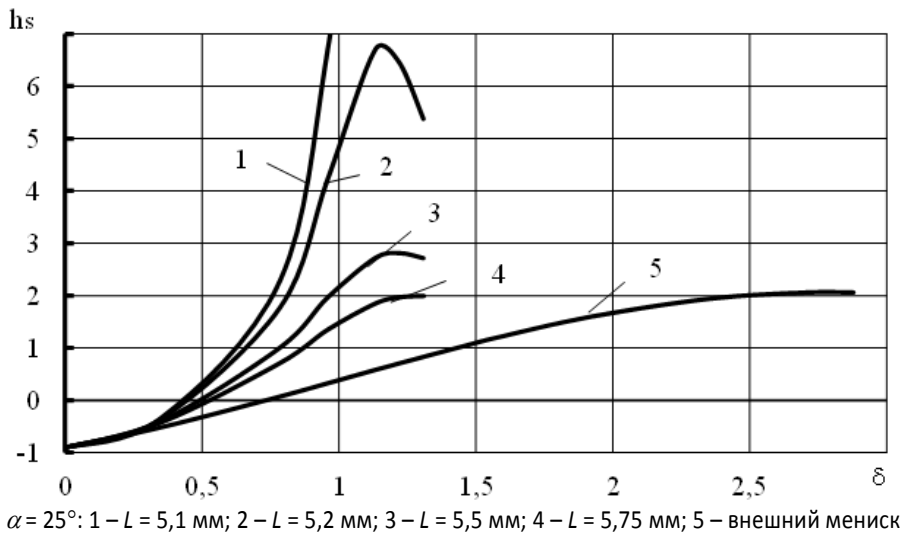


Рисунок 4 – Расстояния от оси цилиндров до поверхности невозмущённой жидкости

Из рисунка видно, что характер образования перетяжки такой же, более того кривая 4 в этом варианте является как бы критической (максимумы кривых 4 и 5 почти равны), т.е. предельным расстоянием здесь является  $L \approx 5,75$ . Для предыдущего варианта  $L$  было несколько меньше (как следует из рис. 3, оно находится между значениями 5,5 и 5,75), что говорит о том, что с уменьшением угла смачивания перетяжка может образовываться между цилиндрами, имеющими большее расстояние между осями. Из этого следует, что для хорошо смачиваемых поверхностей дисперсной среды количество стыковой жидкости в слое должно быть больше.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
2. Надутый, В.П. Математическая модель опускания слоя жидкости в пористой среде / В.П. Надутый, В.И. Елисеев, В.И. Луценко // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2011. – Вып. 92. – С. 3-14.
3. Зимон, А.Д. Аутогезия сыпучих материалов / А. Д. Зимон, Е. И. Андрианов. – М.: Металлургия, 1978. – 288 с.
4. Луценко, В.И. Экспериментальное исследование перетяжки жидкости между двумя сферическими частицами / В.И. Луценко, В.И. Елисеев, Н.П. Анфимова // Дисперсные системы: XXIV науч. конф. стран СНГ. Материалы конференции, 20-24 сентября. – Одесса, 2010. – С. 200-201.
5. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. Новиков, П.А. Гидромеханика щелевых систем / П.А. Новиков, Л.Я. Любин. – Минск: Наука и техника, 1988. – 344 с.
7. Елисеев, В.И. Экспериментальное определение условий образования перетяжки жидкости между частицами сыпучего слоя при обезвоживании / В.И. Елисеев, А.В. Кривокорытов, В.И. Луценко // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2012. – Вып. № 101. – С. 263-268.
8. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 982 с.
9. Сумм, Б.Д. Физико-химические основы смачивания и растекания / Б.Д. Сумм, Ю.В. Горюнов. – М.: Химия, 1976. – 232 с.

### REFERENCES

1. Barenblatt, G.I., Yentov, V.M. and Ryzhik, V.M. (1984), *Dvizheniye zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [The movement of fluids and gases in natural formations], Nedra, Moscow, Russia.
2. Nadutyy, V.P., Yeliseyev, V.I. and Lutsenko, V.I. (2011), "Mathematical model of the lowering of the liquid layer in a porous medium", *Geotekhnicheskaya Mekhanika* [Geo-Technical Mechanics], no. 92, pp. 3-14.
3. Zimon, A.D. and Andrianov, Ye. I. (1978), *Autogeziya syupchikh materialov* [Autohesion bulk materials], Metallurgiya, Moscow, Russia.

4. Lutsenko, V.I., Yeliseyev, V.I. and Anfimova, N.P. (2010), "Experimental study of constrictions between the two liquid spherical particles", *Dispersnyye sistemy: XXIV nauch. konf. CIS countries*, Odessa, Ukraine, September, pp. 200-201.
5. Demidovich, B.P. (1967), *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on mathematical theory of stability], Nauka, Moscow, Russia.
6. Novikov, P.A. and Lyubin, L.Ya. (1988), *Gidromekhanika shchelevykh sistem* [Fluid gap systems], Nauka i tekhnika, Minsk, Belarus.
7. Yeliseyev, V.I., Krivokorytov, A.V. and Lutsenko, V.I. (2012), "Experimental determination of the conditions of formation of constrictions between the particles of the bulk liquid layer during dehydration", *Geotekhnicheskaya Mekhanika* [Geo-Technical Mechanics], no. 101, pp. 263-268.
8. Loytsyanskiy, L.G. (1970), *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics], Nauka, Moscow, Russia.
9. Summ, B.D. and Goryunov, Yu.V. (1976), *Fiziko-khimicheskiye osnovy smachivaniya i rastekaniya* [Physics and is the chemical bases of wetting and spreading], Khimiya, Moscow, Russia.

### Об авторах

**Надуть Владимир Петрович**, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом механики машин и процессов переработки минерального сырья, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, NadutyVP@yandex.ua.

**Елисеев Владимир Иванович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела проблем шахтных энергетических комплексов, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина.

**Луценко Василий Иванович**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела проблем шахтных энергетических комплексов, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, Lutsenko2@yandex.ru.

### About the authors

**Naduty Vladimir Petrovich**, Doctor of Technical Sciences (D.Sc.). Professor. Head of Department of Mechanics of Mineral Processing Machines and Processes. N.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics, under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM. NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, NadutyVP@yandex.ua

**Yeliseev Vladimir Ivanovich**, Candidate of Physics and Mathematics Sciences (Ph.D.), Senior Researcher, Senior Researcher in Department of Mine Energy Complexes, N.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics, under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM. NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine.

**Lutsenko Vasily Ivanovich**, Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), Senior Researcher, Senior Researcher in Department of Mine Energy Complexes, N.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine. Lutsenko2@yandex.ru

**Анотація.** Запропоновано фізичну модель утворення перетяжки рідини між частками сипучого шару при зневодненні. У відповідності з моделлю, при опусканні рівня рідини близько твердих тіл, внаслідок дії капілярних сил, формуються два меніска складної форми. Це верхній меніск між бічними поверхнями твердих тіл, що представляє частину поверхні перетяжки, і нижній меніск між тілами і основним шаром рідини. Обидва меніска мають особливості, пов'язані з формою обмежуючих поверхонь.

На основі гідростатичних рівнянь визначені рівноважні положення поверхонь рідини і умови, при яких утворюється перетяжка. Отримано, що зі зменшенням кута змочування перетяжка може утворюватися між частками, які знаходяться на більшій відстані один від одного. Визначено, що для утворення перетяжок при зневодненні необхідно, щоб відстань між частками в сипучому шарі не перевищувала певну довжину, яка в кілька разів менше критичної довжини, розрахованої з теорії стійкості.

**Ключові слова:** сипучий шар, частка, капілярні сили, меніск, перетяжка, поверхневий натяг

**Abstract.** A physical model of creating of liquid bridge between the particles of particulate layer during dewatering is described. In accordance with this model, when the liquid level is lowered, two meniscus of a complex shape are formed around the solids due to the action of capillary forces. One of them is an upper meniscus between lateral surfaces of solids, which is a part of the surface of the liquid bridge under the study, and another is a lower meniscus between the solids and main descending liquid layer. Both feature peculiarities associated with the shape of limiting surfaces.

On the basis of hydrostatic equations, equilibrium positions of the liquid surface and conditions under which the bridge was formed were defined. It is found that at decreasing wetting angle the liquid bridge can be formed between particles located at a greater distance from each other. It is determined that in order the bridge is formed in dewatering conditions distance between the particles in the loose layer should not exceed a certain length, which is several times shorter than a critical length calculated by the theory of stability.

**Keywords:** loose layer, particle, capillary forces, meniscus, liquid bridge, capillary tension

*Статья поступила в редакцию 04.09.2014*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук, проф. В.И. Дырда*