

УДК 622.831.32

**Клименко Д.В.**, магістр  
(ГВУЗ «НГУ»)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ,  
ИНИЦИИРУЮЩЕГО СТРАГИВАНИЕ ТРЕЩИН В ПОРОДНОМ  
МАССИВЕ**

**Клименко Д.В.**, магістр  
(ДВНЗ «НГУ»)

**ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КОЛІВАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ,  
ЩО ІНІЦІЙОЄ СТАРТ ТРІЩИНИ У ПОРОДНОМУ МАСИВІ**

**Klimenko D.V.**, M.S (Tech)  
(SHEI «NMU»)

**DETERMINATION OF THE OSCILLATIONAL LOAD PARAMETERS, IN  
TERMS OF THE CRACK INITIATION IN THE ROCK**

**Аннотация.** При шахтной добыче полезных ископаемых одну из наибольших опасностей представляет внезапное катастрофически быстрое разрушение горной породы. Как правило, такое явление происходит при воздействии на породу различных добычных механизмов, которые являются источником упругих колебаний в породном массиве. Разрушение пород можно трактовать как процесс трещинообразования. Таким образом, горная порода находится под влиянием квазистатического напряжения, обусловленного наличием выработки, и меняющегося колебательного нагружения. Зарегистрированные акустические колебания в горной породе анализируются в соответствии с нормативными сейсмоакустическими методами. Однако критерии, используемые при этом для прогноза динамических явлений, носят локальный характер и формулируются по результатам предварительных наблюдений в конкретных условиях.

Поскольку динамические явления связаны с развитием трещин в породной среде необходимо определение достаточно общих условий, при которых колебательная нагрузка генерирует разрушение среды с определенными структурными нарушениями (трещинами). Ранее на основе пространственно-временного подхода к описанию процесса разрушения было получено обобщенное условие страгивания трещин. Условия учитывают действие как квазистатического, так и колебательного нагружения, однако области параметров, при которых именно колебательная нагрузка может привести к росту трещин не исследовались. Определение таких областей наиболее важно с позиций развития акустического прогноза динамических явлений.

**Ключевые слова:** трещина, страгивание трещины, амплитуда, коэффициент трещиностойкости, критическая длина трещины.

**Материал исследований.** Критерии, используемые для прогноза опасных динамических явлений в шахтах, носят локальный характер и формулируются по результатам предварительных наблюдений в конкретных условиях [1]. В работе [2] на основе пространственно-временного подхода к описанию процесса разрушения [3] было получено обобщенное условие страгивания трещин.

Принимая, что регулярное напряжение, действующее в окрестности трещины,  $\sigma_1(t) = \sigma_0 + k \cdot (t - t_0) + a \cdot \cos[2\pi\vartheta \cdot (t - t_0)]$ , обобщенное условие страгивания трещины имеет вид [2]:

$$\bar{a} \sin c(\pi \cdot \bar{l}) \cos(\pi \lfloor \bar{l} \rfloor) \geq \frac{K_{cv}}{\sqrt{\bar{l}}} + \frac{\alpha \cdot \bar{l}}{2} - \text{sign}(\sigma_0), \quad (1)$$

$$\text{где } \bar{a} = \frac{a}{|\sigma_0|}; \quad \bar{l} = \frac{l\vartheta}{c_R}; \quad \alpha = \frac{k}{|\sigma_0| \cdot \vartheta}; \quad K_{cv} = \frac{K_{lc}}{2 \cdot |\sigma_0|} \cdot \sqrt{\frac{\pi\vartheta}{c_R}}. \quad (2)$$

Здесь  $a$  – амплитуда колебаний в породном массиве,  $\sigma_0$  – постоянная составляющая напряжения,  $k = \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=t_0}$  – скорость роста квазистатических напряжений,  $t_0$  – момент страгивания трещины,  $l$  – характерный размер (радиус) дисковой трещины,  $c_R$  – скорость волн Релея,  $\vartheta$  – частота колебаний,  $K_1(t)$  – коэффициент интенсивности напряжения,  $K_{lc}$  – критическое значение коэффициента интенсивности напряжения  $K_1$ ,  $\lfloor \bar{l} \rfloor$  – целая часть значения  $\bar{l}$ , округленная до ближайшего целого в меньшую сторону.

При введении безразмерных величин предполагается, что напряжение  $\sigma_0 \neq 0$ , но (1) справедливо и когда напряжение  $\sigma_0 = 0$ , только при возвращении к размерным величинам следует использовать не  $\sigma_0$ , а, вообще говоря, любую постоянную с размерностью напряжения, например  $1 \text{ Pa}$ .

Значение величины  $K_{lc}$  определяется экспериментально [4, 5, 6] либо учитывая во внимание корреляционную взаимосвязь трещиностойкости и предела прочности горных пород на сжатие [7].

Очевидно, что изменение напряжённого состояния породного массива, не связанное с колебаниями, влияет на значения параметров нагружения, при которых может начаться рост трещин. Согласно обозначениям такое изменение напряжения определяется величинами  $\sigma_0$  и  $\alpha$ .

Рассмотрим, как влияет на изменении критической длины трещины величина  $\alpha \neq 0$ , в сравнении с ситуацией, когда величина  $\alpha = 0$ .

Если в окрестности момента страгивания  $(t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t)$  величина  $\alpha > 0$ , тогда регулярное напряжение  $\sigma(t)$  является возрастающей функцией, то есть до момента страгивания  $(t < t_0)$  регулярное напряжение  $\sigma$  было ниже  $\sigma(t_0)$ . Если регулярное напряжение, действующее в породном массиве, является растягивающим, тогда получаем: напряжение  $\sigma(t)$  меньше напряжения  $\sigma(t_0)$ . В случае сжимающего напряжения получаем: модуль напряжения  $|\sigma(t)|$  больше, чем модуль напряжения  $|\sigma(t_0)|$ .

Если в окрестности момента страгивания  $(t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t)$  величина  $\alpha < 0$ , то страгивание происходит в условиях предшествующего моменту страгивания

уменьшения напряжения (в виду того, что регулярное напряжение  $\sigma(t)$  является убывающей функцией). Тогда до момента страгивания регулярное растягивающее напряжение  $\sigma(t)$  больше  $\sigma(t_0)$ . В случае сжимающего напряжения модуль сжимающего напряжения  $|\sigma(t)|$  меньше модуля напряжения  $|\sigma(t_0)|$ .

Очевидно, что значения параметра  $\alpha$  могут быть такими, что условия страгивания (1) выполняются и при отсутствии колебательной нагрузки. Поэтому прежде следует определить, для каких значений влияющих параметров это может иметь место.

Для критериального условия в виде (1) данная ситуация возможна, если выполняется неравенство

$$\frac{K_{cv}}{\sqrt{\bar{l}}} + \frac{\alpha \bar{l}}{2} - \text{sign}(\sigma_0) \leq 0 \quad (3)$$

В статье [2] отмечалось, что, когда условия страгивания трещины выполняются без колебательной нагрузки, то справедливо неравенство (3).

Из обобщенного условия страгивания трещины (1) следует

$$\bar{a}(\bar{l}) = \frac{\frac{K_{cv}}{\sqrt{\bar{l}}} + \frac{\alpha \bar{l}}{2} - \text{sign}(\sigma_0)}{\sin c(\pi \bar{l}) \cos(\pi \lfloor \bar{l} \rfloor)}, \quad (4)$$

где

$$\sin c(\pi \bar{l}) \cos(\pi \lfloor \bar{l} \rfloor) \neq 0 \quad (5)$$

и выполняется условие (3).

Сначала приведём результаты, полученные ранее для случая, когда величина  $\alpha = 0$  [2, 8]. Условие (3) при значении величины  $\alpha = 0$  можно упростить, представив его в виде:

$$\bar{l} \neq 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad 0 < \bar{l} \leq K_{cv}^2 \quad (6)$$

Когда начальное напряжение, действующее в породном массиве, является растягивающим  $\sigma_0 > 0$  и приведенная длина  $\bar{l} \geq K_{cv}^2$ , то страгивание трещины происходит без колебательной нагрузки: значения функции  $\bar{a}(\bar{l}) = 0$  при  $\bar{l} \in [K_{cv}^2; +\infty)$  [2]. Когда начальное напряжение, действующее в породном массиве, является растягивающим  $\sigma_0 > 0$  и  $\bar{l} < K_{cv}^2$ , то страгивание трещины возможно только при наличии колебательной нагрузки с соответствующим значением амплитуды [2].

При сжимающем напряжении  $\sigma_0 \leq 0$  условие (3) принимает вид  $\frac{K_{cv}}{\sqrt{\bar{l}}} + 1 \leq 0$  и страгивание трещины без колебательной нагрузки невозможно.

Перейдем к исследованию значений величин, которые входят в критерий (1), исключив значение величины  $\alpha = 0$ .

При значениях величины  $\alpha \neq 0$  неравенство (3), сделав замену  $y = \sqrt{l}$ , можно представить в виде:

$$y^3 - \frac{2\text{sign}(\sigma_0)}{\alpha} y + \frac{2K_{cv}}{\alpha} \leq 0 \quad (\text{если } \alpha > 0) \quad (7)$$

$$y^3 - \frac{2\text{sign}(\sigma_0)}{\alpha} y + \frac{2K_{cv}}{\alpha} \geq 0 \quad (\text{если } \alpha < 0) \quad (8)$$

Введём для удобства анализа (7) и (8) функцию:

$$\varphi(y) = y^3 - \frac{2\text{sign}(\sigma_0)}{\alpha} y + \frac{2K_{cv}}{\alpha} \quad (9)$$

Тогда неравенства (7) и (8) можно записать, используя функцию (9), в виде

$$\varphi(y) \leq 0, \text{ при условии } \alpha > 0, \quad (10)$$

$$\varphi(y) \geq 0, \text{ при условии } \alpha < 0. \quad (11)$$

Следует учитывать, что физический смысл имеют только действительные неотрицательные значения переменной  $y$  и, кроме того, из задания функции (9) следует:

$$\varphi(0) = \frac{2K_{cv}}{\alpha}; \quad \varphi'(y) = 3y^2 - \frac{2\text{sign}(\sigma_0)}{\alpha}; \quad \varphi'(0) = -\frac{2\text{sign}(\sigma_0)}{\alpha}. \quad (12)$$

Напомним формулы для решения приведенного кубического уравнения [9]

$$x^3 + px + q = 0$$

Дискриминант -  $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ . Вспомогательные величины -  $\alpha_r = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$ ,

$$\beta_r = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \text{ корни}$$

$$x_1 = \alpha_r + \beta_r \quad (13)$$

$$x_2 = -\frac{\alpha_r + \beta_r}{2} + i\sqrt{3} \frac{\alpha_r - \beta_r}{2} \quad (14)$$

$$x_3 = -\frac{\alpha_r + \beta_r}{2} - i\sqrt{3} \frac{\alpha_r - \beta_r}{2} \quad (15)$$

Если дискриминант  $Q > 0$ , то кубическое уравнение имеет один действительный и два комплексных корня;

Если дискриминант  $Q < 0$ , то кубическое уравнение имеет три действительных корня;

Если дискриминант  $Q = 0$ , то кубическое уравнение имеет два различных

действительных корня, один из которых двукратный.

Для уравнения

$$\varphi(y) = 0 \quad (16)$$

дискриминант  $Q = \left(\frac{K_{cv}}{\alpha}\right)^2 - \frac{8}{27\alpha^3} \text{sign}(\sigma_0)$ , вспомогательные величины

$$\alpha_r = \sqrt[3]{-\frac{K_{cv}}{\alpha} + \sqrt{Q}}, \quad \beta_r = \sqrt[3]{-\frac{K_{cv}}{\alpha} - \sqrt{Q}}.$$

Рассмотрим случаи, определяемые значениями величины  $\alpha$ , ния  $\sigma_0$ , величины трещиностойкости  $K_{cv}$ .

а) величина  $\alpha < 0$ , напряжение  $\sigma_0 \geq 0$ .

При таких значениях величины  $\alpha$  и напряжения  $\sigma_0$  дискриминант  $Q \geq 0$ . Тогда существует один действительный корень уравнения (16), вычисляемый по формуле (13). Из равенств (12) следуют условия для функции  $\varphi(y)$

$$\varphi(0) = \frac{2K_{cv}}{\alpha} < 0, \quad \varphi'(y) = 3y^2 - \frac{2}{\alpha} > 0 \quad (17)$$

и, следовательно, этот корень больше нуля.

Получаем, что страгивание трещины без колебательной нагрузки возможно при значениях величины  $\alpha < 0$  и напряжении  $\sigma_0 \geq 0$ , если длина трещины  $\bar{l} \geq \bar{l}_1$ , где

$$\bar{l}_1 = \left[ \left( \sqrt{\left(\frac{K_{cv}}{\alpha}\right)^2 - \frac{8}{27\alpha^3}} - \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( -\frac{K_{cv}}{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{K_{cv}}{\alpha}\right)^2 - \frac{8}{27\alpha^3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \quad (18)$$

Заметим, что при  $\alpha \rightarrow -0$  из условия  $\bar{l} \geq \bar{l}_1$  следует условие  $\bar{l} \geq K_{cv}^2$ , записанное в условии (6) для значения величины  $\alpha = 0$ ;

б) величина  $\alpha < 0$ , напряжение  $\sigma_0 < 0$ .

Дискриминант в этом случае имеет вид  $Q = \left(\frac{K_{cv}}{\alpha}\right)^2 + \frac{8}{27\alpha^3}$ . Значения дискриминанта  $Q$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

Дискриминант принимает значения  $Q > 0$  при выполнении неравенства:

$$\alpha < -\frac{8}{27K_{cv}^2}. \quad (19)$$

При значениях дискриминанта  $Q > 0$  уравнение (16) имеет единственный действительный положительный корень, который вычисляется по формуле (13), в результате получаем:

$$y = \left( -\frac{K_{cv}}{\alpha} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( -\frac{K_{cv}}{\alpha} - \sqrt{Q} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ где } Q = \left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 + \frac{8}{27\alpha^3}. \quad (20)$$

Из неравенства (19) получаем  $K_{cv}^2 < -\frac{8}{27\alpha}$  и  $K_{cv} < \left( -\frac{8}{27\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Тогда корень, полученный в формуле (20), больше, чем величина  $\sqrt{-\frac{2}{3\alpha}}$ .

Страгивание трещины без колебательной нагрузки возможно, при значениях величины  $\alpha < 0$  и напряжении  $\sigma_0 < 0$ , когда  $\bar{l} \geq \bar{l}_2$ , где

$$\bar{l}_2 = \left[ \left( \sqrt{\left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 + \frac{8}{27\alpha^3}} - \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( -\frac{K_{cv}}{\alpha} - \sqrt{\left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 + \frac{8}{27\alpha^3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \quad (21)$$

Дискриминант принимает значения  $Q < 0$  при выполнении неравенства  $\alpha > -\frac{8}{27K_{cv}^2}$ . Уравнение (16) при  $Q < 0$  имеет три действительных корня, но

положительный корень только один, так как условия (17) для функции  $\varphi(y)$  выполняются. Единственный положительный корень уравнения (16) вычисляется по той же формуле (13) и соответственно, условие (21) остаётся в силе;

в) величина  $\alpha > 0$ , напряжение  $\sigma_0 \geq 0$ .

Дискриминант уравнения (16)  $Q = \left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 - \frac{8}{27\alpha^3}$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Дискриминант принимает значения  $Q > 0$  при выполнении неравенства

$$\alpha > \frac{8}{27K_{cv}^2}, \quad (22)$$

и кубическое уравнение (16) имеет единственный вещественный корень. Но так, как в этом случае для функции  $\varphi(y)$  справедливо следующее: если

$$\varphi(0) = \frac{2K_{cv}}{\alpha} > 0 \text{ и } \lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi'(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 3y^2 - \frac{2}{\alpha} \right) = +\infty, \quad (23)$$

то этот корень отрицательный.

Следовательно, при значениях величины  $\alpha > 0$  и напряжении  $\sigma_0 \geq 0$  страгивание трещины без дополнительной нагрузки произойти не может.

Дискриминант принимает значения  $Q < 0$  при выполнении неравенства  $\alpha < \frac{8}{27K_{cv}^2}$ . И кубическое уравнение (16) имеет три действительных корня,

причём два из них положительны. Кроме того, так как в этом случае вспомогательные величины  $\alpha_r = \sqrt[3]{-\frac{K_{cv}}{\alpha} + i \cdot \sqrt{|Q|}}$  и  $\beta_r = \sqrt[3]{-\frac{K_{cv}}{\alpha} - i \cdot \sqrt{|Q|}}$  комплексно сопряжённые, а  $-\frac{q}{2} = -\frac{K_{cv}}{\alpha} < 0$ , соответственно, действительные части величин  $\alpha_r$  и  $\beta_r$  положительны. Тогда наибольший положительный корень уравнения (16) вычисляется по формуле (13), а наименьший положительный – по формуле (15). Условие страгивания трещины выполняется согласно условию (10), когда  $\varphi(y) \leq 0$ , то есть, для трещин с приведенной длиной  $\bar{l}$ , удовлетворяющей условию  $\bar{l}_3 < \bar{l} < \bar{l}_1$ , где  $\bar{l}_1$  вычисляем по формуле (18)

$$\bar{l}_3 = \left\{ \frac{\sqrt{\bar{l}_1}}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} \left[ \left( \sqrt{\left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 - \frac{8}{27\alpha^3} - \frac{K_{cv}}{\alpha}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( -\frac{K_{cv}}{\alpha} - \sqrt{\left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 - \frac{8}{27\alpha^3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \right\}^2. \quad (24)$$

Заметим, что при значениях величины  $\alpha \rightarrow +0$  значение приведенной длины трещины  $\bar{l}_3 \rightarrow K_{cv}^2$ , а значение приведенной длины трещины  $\bar{l}_1 \rightarrow \infty$ , что соответствует полученному ранее результату для величины  $\alpha = 0$  (условия (6)).

Кроме того,  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{8}{27K_{cv}^2} \rightarrow 0} \bar{l}_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{8}{27K_{cv}^2} \rightarrow 0} \bar{l}_3 = \frac{9K_{cv}^2}{4}$ , а  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{l}_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{l}_3 = K_{cv}^2$ ;

г) величина  $\alpha > 0$ , напряжение  $\sigma_0 < 0$ .

Дискриминант  $Q = \left( \frac{K_{cv}}{\alpha} \right)^2 + \frac{8}{27\alpha^3} > 0$ , следовательно, действительный корень уравнения (16) единственный. Для функции  $\varphi(y)$  выполняются условия  $\varphi'(y) = 3y^2 + \frac{2}{\alpha} > 0$ ,  $\varphi(0) = \frac{2K_{cv}}{\alpha} > 0$ . Тогда вышеупомянутый корень отрицательный.

Таким образом, при значениях величины  $\alpha > 0$  и напряжении  $\sigma_0 < 0$  страгивание трещины без дополнительной нагрузки невозможно.

Обобщая полученные выше результаты, можно указать ограничения на параметры, при которых страгивание трещины может быть инициировано колебательной нагрузкой (табл. 1).

Учитывая данные из таблицы 1, для случая  $K_{cv} = 0,8$  на рисунке 1 построены кривые  $\bar{l}(\alpha)$ , отделяющие область (заштрихована), в которой возможно страгивание трещины при колебательной нагрузке. Аналогичные кривые для других значений величины трещиностойкости  $K_{cv}$  представлены на рисунке 2 (штриховка для областей страгивания опущена).

Таблица 1 – Области значений приведенной длины трещины  $\bar{l}$ , страгивание которой может быть инициировано колебательной нагрузкой, при напряжении  $\sigma_0$  и величине  $\alpha$

| $\sigma_0$        | $\alpha$                         | $\bar{l}$                                 | Номер формул для вычислений $\bar{l}_i, i = \overline{1,3}$ |
|-------------------|----------------------------------|---|---|
| $\sigma_0 \geq 0$ | $(-\infty, 0)$                   | $(0, \bar{l}_1)$                          | (18)  |
|                   | $(0, \frac{8}{27K_{cv}^2})$      | $(0, \bar{l}_3) \cup (\bar{l}_1, \infty)$ | (18), (25)  |
|                   | $(\frac{8}{27K_{cv}^2}, \infty)$ | $(0, \infty)$                             |   |
| $\sigma_0 < 0$    | $(-\infty, 0)$                   | $(0, \bar{l}_2)$                          | (21)  |
|                   | $(0, \infty)$                    | $(0, \infty)$                             |   |

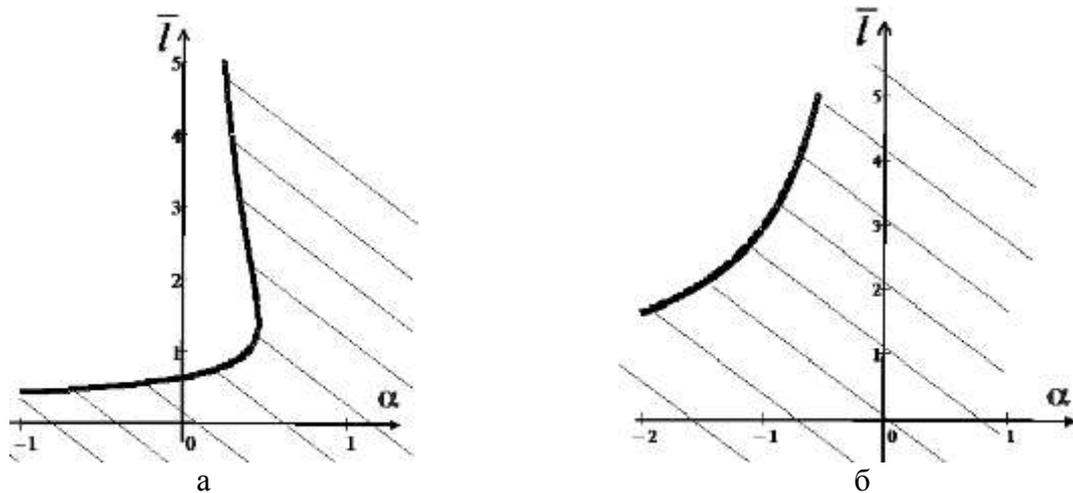


Рисунок 1 – Область изменения  $\bar{l}$  и  $\alpha$ , в которой возможно инициирование страгивания трещины колебательной нагрузкой,  $K_{cv} = 0,8$ : а)  $\sigma_0 \geq 0$ , б)  $\sigma_0 < 0$

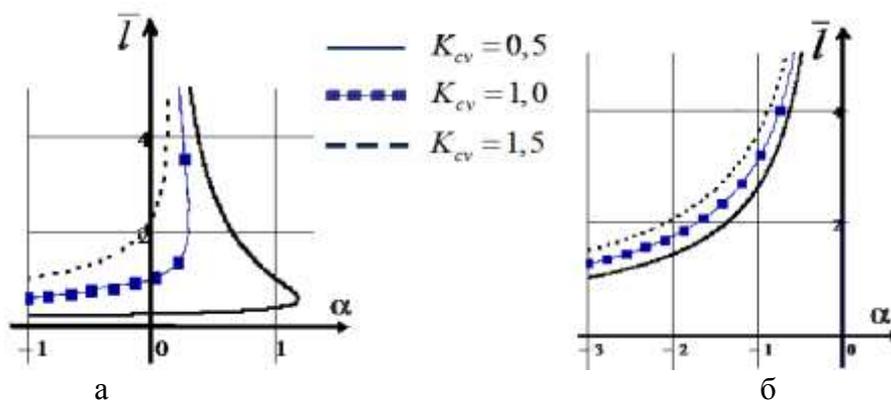


Рисунок 2 – Области  $\bar{l}$  и  $\alpha$ , в которых возможно инициирование страгивания трещины колебательной нагрузкой при различных значениях параметра  $K_{cv}$ : а)  $\sigma_0 \geq 0$ , б)  $\sigma_0 < 0$

Сравним значения длин страгиваемых трещин при статическом нагружении и при меняющихся квазистатических напряжениях. Для этого построим графики функций  $\bar{a}(\bar{l})$ , заданных по формуле (4), при выполнении условий (3) и (5), значения величин  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0,2$ , значение величины  $K_{cv}$  возьмем критическое, равное 1 [8] (Рис. 3).

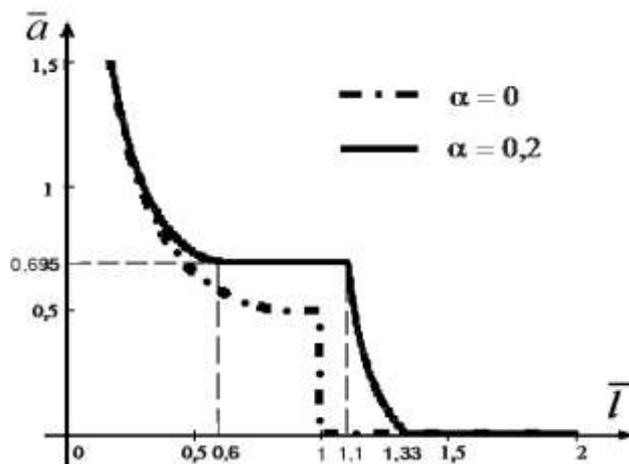


Рисунок 3 – Зависимости амплитуды колебаний  $\bar{a}$  от критической длины трещины  $\bar{l}$  при различных величинах  $\alpha$

Получаем: при изменении амплитуды колебаний  $\bar{a}$  от 0 до значения 0,695 длины страгиваемых трещин  $\bar{l}$  при стационарном нагружении ( $\alpha = 0$ ) меньше, чем длины страгиваемых трещин  $\bar{l}$  при росте квазистатических напряжений ( $\alpha = 0,2$ ) (рис. 3). Далее после скачка длин страгиваемых трещин ( $\alpha = 0,2$ ) длины страгиваемых трещин практически одинаковы ( $\bar{a} > 0,7$ ).

Скачок длин страгиваемых трещин представлен на рисунке 3 как часть графика функции  $\bar{a}(\bar{l})$  ( $\alpha = 0,2$ ), параллельная оси  $\bar{l}$ . Чтобы найти, при какой амплитуде колебаний  $\bar{a}$  происходит скачок длин страгиваемых трещин, решаем трансцендентное уравнение  $\frac{d\bar{a}}{d\bar{l}} = 0$  (искомое значение является локальным минимумом функции  $\bar{a}(\bar{l})$  на промежутке  $(0,1)$ ). Находим корень  $\bar{l} = 0,611$  этого уравнения на указанном промежутке. Далее вычисляем значение функции  $\bar{a}(\bar{l})$  при аргументе  $\bar{l} = 0,611$ , получаем  $\bar{a}(0,611) = 0,695$ .

Итак, скачок длин страгиваемых трещин при изменении квазистатических напряжений ( $\alpha = 0,2$ ) происходит, когда приведенная амплитуда колебаний  $\bar{a} = 0,695$ . Диапазон приведенных длин страгиваемых трещин  $0,611 \dots 1,102$ . Таким образом, практически в 2 раза увеличивается длина страгиваемых трещин при определенной постоянной амплитуде при изменении квазистатических напряжений ( $\alpha = 0,2$ ). Такого эффекта при статическом нагружении не наблюдалось.

На рисунке 4 отмечены точки А(0,2; 0,611) и В(0,2; 1,102), являющиеся концами отрезка. Координаты каждой точки понимаются как приведенная длина

страгиваемой трещины при  $\alpha = 0,2$ . Точки отрезка АВ лежат в области параметров (заштрихованная область на рисунке 4), в которой возможно страгивание трещины, инициируемого колебательной нагрузкой,  $K_{cv} = 1, \sigma_0 \geq 0$ .

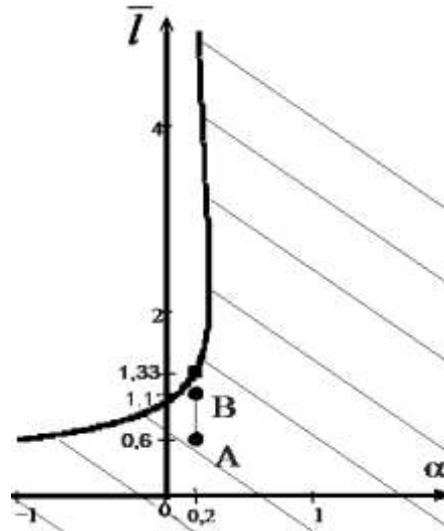


Рисунок 4 – Отрезок скачка длин страгиваемых трещин в области (заштрихована), в которой возможно страгивание трещины при колебательном нагружении,  $K_{cv} = 1, \sigma_0 \geq 0$

Из таблицы 1 получаем при  $K_{cv} = 1$  выражение  $\frac{8}{27K_{cv}^2} \Big|_{K_{cv}=1} = 0,296$ . Если

$\alpha = 0,2$ , то при колебательном нагружении приведенные длины страгиваемых трещин лежат в интервале  $\bar{l} \in (0, \bar{l}_3) \cup (\bar{l}_1, \infty)$ , где  $\bar{l}_1, \bar{l}_3$  находим по формулам (18), (24). Находим  $\bar{l}_3 = 1,33$ . Таким образом, при наличии колебательной нагрузки приведенные длины страгиваемых трещин лежат в интервале  $\bar{l} \in (0; 1,33)$ , что подтверждает рисунок 4, и точка  $(0,2; 1,33)$ , отмеченная на рисунке 4, лежит на границе раздела двух областей. Интервал приведенных длин страгиваемых трещин  $(\bar{l}_1, \infty)$  не рассматриваем, так как эти длины достаточно большие  $\bar{l}_1 > 2,2$  [2].

**Приложение полученных результатов.** Перейдем к размерным величинам (кроме безразмерной величины  $\alpha$ ). Рассмотрим известняк и песчаник (шахта «Горская»). Квазистационарное напряжение  $\sigma_0$  получено с помощью формулы (2) при значении параметра  $K_{cv} = 1$ , принятого как критическое значение [8] (табл. 2). Частота колебаний  $\mathcal{G} = 800 \text{ Hz}$  взята из «опасной» зоны частот. Такой зоной считаем диапазон частот  $700 - 1400 \text{ Hz}$  (Мирер, Масленников).

Из таблицы 2 видно, что в известняке при меньшем стационарном напряжении  $\sigma_0 = 0,19 \text{ МПа}$ , чем у песчаника, при колебательной нагрузке происходит страгивание трещин приблизительно такой же длины, что и в песчанике.

Увеличение амплитуды колебаний в массиве в 2 раза ведет к уменьшению длин страгиваемых трещин в 2,5 раз (начальное стационарное напряжение пород различно) (табл. 3).

Таблица 2 – Трещиностойкость  $K_{Ic}$ , скорость волн Релея  $c_R$ , квазистационарное напряжение  $\sigma_0$  и соответствующая область длины страгиваемой трещины  $l$  с учетом колебательной нагрузки для известняка и песчаника

|                              | Песчаник | Известняк | Источник |
|------------------------------|----------|-----------|----------|
| $K_{Ic}, MPa \cdot \sqrt{m}$ | 0,86     | 0,35      | [6]      |
| $c_R, m/c$                   | 1954     | 2073      | [2]      |
| $\sigma_0, MPa$              | 0,49     | 0,19      |          |
| $l, m$                       | (0;3,25) | (0;3,45)  |          |

Таблица 3 – Колебательное напряжение с амплитудой  $a_i$ , соответствующая длина страгиваемой трещины  $l_i$  в известняке и песчанике при различном росте квазистатических напряжений ( $i = 1, 2$ )

|            | $a_1, MPa$                              | $a_2, MPa$ | $\alpha=0$                         |          | $\alpha=0,2$                      |          |
|------------|---|------------|------------------------------------|----------|-----------------------------------|----------|
|            |   |            | $l_1, m$                           | $l_2, m$ | $l_1, m$                          | $l_2, m$ |
| песчаник   | 0,2                                     | 0,4        | 2,44                               | 0,98     | 2,93                              | 0,98     |
| известняк  | 0,08                                    | 0,16       | 2,6                                | 1,04     | 3,11                              | 1,04     |
| примечания | Увеличение амплитуды колебаний в 2 раза |            | Уменьшение длины трещины в 2,5 раз |          | Уменьшение длины трещины в 3 раза |          |

При росте квазистатических напряжений (величина  $\alpha = 0,2$ ) при одинаковых амплитудах колебаний могут страгиваться трещины с большей длиной  $l_1$  для каждой из пород по сравнению с ситуацией, когда действует только статическое напряжение (величина  $\alpha = 0$ ). Но после увеличения амплитуды колебаний в 2 раза страгиваются трещины с практически одинаковой длиной, равной 1 м (Рис. 4). Амплитуды колебаний  $a_1, a_2$  соответствуют приведенным амплитудам 0,4 и 0,8 соответственно. При изменении квазистатических напряжений с увеличением амплитуды колебаний в 2 раза длина страгиваемых трещин уменьшается в 3 раза (табл. 3).

Наконец, при приведенной амплитуде  $\bar{a} = 0,695$ , что соответствует  $a = 0,34 MPa$  для песчаника и  $a = 0,13 MPa$  для известняка, начинают одновременно страгиваться трещины, длины которых практически в 2 раза больше. Область длин страгиваемых трещин  $1,5 m \leq l \leq 2,7 m$  для песчаника,  $1,6 m \leq l \leq 2,9 m$  для известняка при соответствующих указанных амплитудах.

## Выводы

1. Определены области изменения значений параметров: длины трещины  $\bar{l}$  и величины  $\alpha$  (характеризует изменение квазистатического напряжения), при которых заданная гармоническая нагрузка может вызвать страгивание трещины.

2. Показано, что при росте квазистационарных напряжений увеличение амплитуды колебательной нагрузки может привести к одновременному страгиванию трещин длиной от  $l$  до  $3l$ , что следует интерпретировать как развитие динамических явлений. Определены значения параметров, при которых данный эффект наблюдается для песчаника и известняка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Правила ведення гірничих робіт на пластах схильних до газодинамічних явищ. Стандарт Мінвуглепрому України. - К.: 2005. – 224 с.
2. Головко, Ю.Н. Обобщенное условие страгивания трещины, инициированного колебаниями в породной напряженно-деформированной среде / Ю.Н. Головко, Е.А. Сдвижкова, Д.В. Клименко // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – 2017. – Вип. 1(102).
3. Morozov, N.F. Dynamics of fracture / N.F. Morozov, Y.V. Petrov // Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 2000. - P. 98
4. Николаевский, В.Н. Геомеханика и флюидодинамика / В.Н. Николаевский. - Москва: Недра, 1999. – 447 с.
5. Шашенко, А.Н. Геомеханические процессы в породных массивах / А.Н. Шашенко, Т. Майхерчик, Е.А. Сдвижкова. - Днепропетровск: НГУ, 2005. – 320 с.
6. Marcote, A. Dynamic elastic properties of coal / A. Markote, G. Mavko, M. Prasad // – Geophysics. – 2010. - Vol. 75. - № 6 (November-December 2010). – pp. E227 - E234.
7. Чеботарев, П.Н. Установление корреляционных взаимосвязей вязкости разрушения угольного массива с показателями его прочности / П.Н. Чеботарев // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2012. - Вып. 9. - С. 88-92
8. Studying a crack initiation in terms of elastic oscillations in stress strain rock mass. / O. Sdvyzhkova, Yu. Golovko, M. Dubytska, D. Klymenko. // Mining of Mineral Deposits. - Dnepr: National Mining University (Dnepr, Ukraine). 2016. - Vol.10. - Issue 2. - pp. 72-77
9. Гюнтер, Н.М. Сборник задач по высшей математике. // Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин. – 13-е изд. – М.: Лань, 2003. – 816 с.

## REFERENCES

1. Ministry of Coal Industry of Ukraine (2005), *SOU 10.100174088.011-2005 Pravyla vedennya girnychikh rodit na plastakh skhylnykh do gazodynamichnykh yavyshch* [SOU 10.100174088.011-2005. Rules of mining in seams prone to gas-dynamic phenomena], Kyiv, UA.
2. Golovko, Yu., Sdvyzhkova, E. and Klymenko, D. (2017), «The generalized criterion of a crack initiation in terms of oscillations in stress strain rock mass», *Bulletin M. Ostrogradsky KrNU*, no.1.
3. Morozov, N.F. and Y.V. Petrov (2000), «Dynamics of fracture», *Springer-Verlag.*, Berlin-Heidelberg-New York - pp. 98
4. Nikolaevsky, V. (1999), *Geodinamika i fluidodinamika* [Geodynamics and fluid dynamics], Nedra, Moscow, RU.
5. Shashenko, A., Mayherchik, T. And Sdvyzhkova, Ye. (2005), *Geomekhanicheskiye processy v porodnykh massivakh* [Geodynamic processes in rock massifs]. NMU, Dnepropetrovsk, UA.
6. Marcote, A., Mavko, G. and Prasad, M. (2010), «Dynamic elastic properties of coal», *Geophysics*, Vol. 75, no. 6. pp. E227 - E234.
7. Chebotarev, P.N. (2012), «The establishment of correlations crack resistance coal with indicators of its strength», *News TSU. Technical sciences*, - no. 9, pp. 88-92.
8. Sdvyzhkova, O., Golovko, Yu., Dubytska, M. and Klymenko, D. (2016), «Studying a crack initiation in terms of elastic oscillations in stress strain rock mass». *Mining of Mineral Deposits*, Vol.10, no. 2, pp. 72-77

9. Gunter, N.M. and Kuzmin, R.O. (2003), *Sbornik zadach po vysshey matematike* [Collection of problems in higher mathematics], Lan, Moscow, RU.

---

#### Об авторе

**Клименко Дина Владимировна**, магистр, старший преподаватель кафедры высшей математики, Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет» (ГБУЗ «НГУ»), Днепр, Украина, dinklim@mail.ru

#### About the author

**Klimenko Dina Vladimirovna**, Master of Science, Senior Lecturer of the Higher Mathematics Department, State Higher Educational Institution "National Mining University" (SHEI "NMU"), Dnepr, Ukraine, dinklim@mail.ru

---

**Анотація.** При шахтному видобутку корисних копалин одна з найбільших небезпек є раптове катастрофічно швидке руйнування гірської породи. Як правило, таке явище відбувається при впливі на породу різних видобувних механізмів, які є джерелом пружних коливань в породному масиві. Руйнування порід можна трактувати як процес утворення тріщин. Таким чином, гірська порода знаходиться під впливом квазістатичного напруження, що обумовлене наявністю вироблення, і мінливого коливального навантаження. Зареєстровані акустичні коливання в гірській породі аналізуються відповідно до нормативних сейсмоакустичних методів. Однак критерії, що використовуються при цьому для прогнозу динамічних явищ, носять локальний характер і формулюються за результатами попередніх спостережень в конкретних умовах. Оскільки динамічні явища пов'язані з розвитком тріщин в породному середовищі необхідно визначення досить загальних умов, при яких коливальне навантаження генерує руйнування середовища з певними структурними порушеннями (тріщинами). Раніше на основі просторово-часового підходу до опису процесу руйнування була отримана узагальнена умова старту тріщин. Умова враховує дію як квазістатичного, так і коливального навантажень, однак області параметрів, при яких саме коливальне навантаження може привести до зростання тріщин, не досліджувалися. Визначення таких областей найбільш важливо з позицій розвитку акустичного прогнозу динамічних явищ.

**Ключові слова.** Тріщина, старт тріщини, амплітуда, коефіцієнт тріщиностійкості, критична довжина тріщини.

**Abstract.** One of the greatest dangers is the sudden catastrophically rapid destruction of the rock during the mining minerals. As a rule, such a phenomenon occurs when different mining mechanisms work in mine. It is the source of elastic oscillations in the rock mass. The rock mass failure can be interpreted as a process of crack development. Thus, the rock is influenced by the quasistatic stress and the changing oscillational loading. Registered acoustic oscillations are analyzed in accordance with regulatory seismoacoustic methods in the rock. However, the used criterion for predicting dynamic phenomena is the local nature and is formulated according to the results of preliminary observations under specific conditions. Since the dynamic phenomena are associated with the development of cracks in the rock mass, it is necessary to define fairly general conditions under which the oscillational load generates the rock failure with certain structural joints (cracks). Early we got the generalized criterion of a crack initiation. The criterion takes into account the effect of both quasistatic and oscillational loadings. But the parameters regions for which the oscillation load can lead to the crack initiation have not been investigated. The determination of such regions is most important for development of an acoustic prediction of dynamic phenomena.

**Keywords.** Crack, crack initiation, amplitude, crack resistance, critical crack length.

*Статья поступила в редакцию 16.07.2016*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук С.А. Курносовым*