

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ З В'ЯЗКОПРУЖНИХ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ НА ОСНОВІ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

¹Мізерна О.Л., ²Гребенюк С.М., ²Клименко М.І.

¹Національний університет «Запорізька політехніка», ²Запорізький національний університет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

¹Мизерная Е.Л., ²Гребенюк С.М., ²Клименко М.И.

¹Национальный университет «Запорожская политехника», ²Запорожский национальный университет

DETERMINATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF STRUCTURES MADE OF VISCOELASTIC FIBROUS COMPOSITE MATERIALS BASED ON THE STIFFNESS MATRIX OF A SPATIO-TEMPORAL FINITE ELEMENT

¹Mizerna O.L., ²Grebenyuk S.M., ²Klymenko M.I.

¹Zaporizhzhia Polytechnic National University, ²Zaporizhzhia National University

Анотація. Збільшення сфери використання композиційних матеріалів призводить до необхідності вдосконалення методів розрахунку композитних конструкцій, підвищення їх ефективності і адекватності реальним процесам. Застосування волокнистих композиційних матеріалів створює ускладнення при визначенні напружено-деформованого стану конструкції через різні фізичні і механічні властивості компонентів матеріалу. Зазвичай волокнистий композит складається з двох компонентів: матриці і волокна. Матриця забезпечує монолітність матеріалу, фіксує форму виробу і взаємне розташування армувальних волокон. Волокна сприймають основні напруження, що виникають в процесі експлуатації, і забезпечують жорсткість і міцність композиту. Поєднання властивостей матриці і волокна дозволяє створювати спеціальні типи композитів для використання в різному устаткуванні, що спрощує його конструкцію і покращує експлуатаційні характеристики. Використання як матриці гуми надає конструкції в'язкопружних властивостей, які проявляються повзучістю деформації та релаксацією напружень у матеріалі, що значно ускладнює розрахунок напружено-деформованого стану всієї конструкції. У роботі запропоновано підхід, що є розвитком моментної схеми скінченних елементів у вигляді методу переміщень на основі варіаційного принципу Лагранжа. На основі цього підходу розроблено спеціальний просторово-часовий скінченний елемент, що враховує в'язкопружні властивості матриці матеріалу та пружні властивості волокон. Запропонований чисельний підхід дозволяє отримувати розв'язок задач в'язкопружності механіки композиційних матеріалів у тривимірній постановці. За допомогою створеного на базі даного підходу пакету прикладних програм зроблено розрахунок напружено-деформованого стану однопорожнинного пневмобалона з гумокордною оболонкою. Проведено аналіз впливу схеми армування та в'язкопружних властивостей гуми на параметри деформування пневмобалона. Зокрема, стає можливим регулювати жорсткісні характеристики конструкції за рахунок зміни орієнтації, типу і концентрації волокон, а також типу матриці та інших характеристик матеріалу.

Ключові слова: волокнистий композиційний матеріал, в'язкопружність, просторово-часовий скінченний елемент

Значні відмінності між фізико-механічними й хімічними властивостями та анізотропія властивостей складових композиту призводять до особливостей при деформуванні всієї конструкції, зокрема, використання як матриці еластомерів надає конструкції в'язкопружних властивостей. Поширення застосування композиційних матеріалів у різних галузях техніки зумовлює ускладнення геометричної форми конструкцій, що також додає труднощів при моделюванні та розрахунку напружено-деформованого стану, таким чином, використання

аналітичних методів розрахунку дуже обмежене. У зв'язку з цим останнім часом широко застосовують чисельні методи розрахунку, зокрема метод скінченних елементів. Проблема моделювання і розрахунку в'язкопружних композитних конструкцій присвячено ряд робіт. Зокрема, у [1] запропоновано математичну модель гумокордної оболонки, яка враховує розтягливість ниток корду та пружний опір гумової матриці без обмеження величини деформацій, що виникають. За допомогою принципу віртуальних переміщень побудовано визначальні співвідношення, описані гладкими функціями просторових координат, що відображають структурну неоднорідність матеріалу. У [2] для визначення в'язкопружних властивостей ортогонально армованого композиційного матеріалу зі скляними волокнами і епоксидним наповнювачем використано метод, що складається з серії чисельних експериментів на зонах розтягнення і деформуванні представницького об'єму композита з подальшим отриманням змінної в часі матриці жорсткості. Проаналізовано ступінь анізотропії в'язкопружних властивостей композита для різних відносних концентрацій волокон і отримано змінні в часі технічні константи матеріалу. У [3] розроблено метод і алгоритм, за допомогою яких проведена чисельна оцінка ефективних механічних властивостей гумовокордних композитів із урахуванням скінченних деформацій і низької стисливості гуми. Ефективні властивості виведено у вигляді квадратичної залежності між тензором деформацій Гріна та другим тензором напружень Піоли-Кірхгофа. Наведено результати чисельної оцінки ефективних механічних властивостей гумовокордного композиту при скінченних деформаціях. Числовий аналіз проведено з використанням методу скінченних елементів. У [4] запропоновано формулювання математичної моделі деформованого в'язкопружного композиту, засновану на узагальненому визначенні ефективних модулів із неоднорідних пружних сталих композитів і в'язкопружних тіл. Отримані співвідношення демонструють залежність механічних властивостей від тривалості дії навантаження. Математична модель гібридних ефективних модулів побудована на суперпозиції виразів для відомих ефективних модулів Фойгта і Рейсса, Хашина й Штрикмана. У [5] розглянуто питання визначення характеристик повзучості та релаксації полімерних композитів. Проведено аналіз різних моделей лінійного та нелінійного в'язкопружного процесу деформації. Досліджено вплив форми, розміру і концентрації армування на в'язкопружну поведінку полімерних композитів. У [6] запропоновано метод обчислення гомогенізованої поведінки лінійних в'язкопружних композитів. У [7] використано наближений алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану в'язкопружних тіл. Алгоритм засновано на виведенні виразів ефективних у часі модулів. Ці модулі отримано шляхом ітераційних перетворень верхньої і нижньої оцінки Фойгта-Рейсса.

При практичному використанні традиційних схем МСЕ у формі методу переміщень, побудованих на базі варіаційного принципу Лагранжа для розв'язування задач з особливостями (врахування слабкої стисливості, розрахунок пластин і оболонок на базі тривимірних скінченних елементів та ін.), виникають суттєві труднощі, для подолання яких використовуються інші варіаційні принципи, тобто змішані схеми МСЕ. Маючи позитивні особливості, змішані моделі мають

і низку недоліків, таких як збільшення порядку розв'язувальної системи рівнянь, порушення додатної визначеності матриці рівнянь. Тому для задач із зазначеними особливостями кращим є розвиток гібридних схем МСЕ у формі методу переміщень на базі варіаційного принципу Лагранжа.

Стандартна схема МСЕ у формі методу переміщень не враховує жорсткі зміщення скінченних елементів, а також «ефект хибного зсуву», тому для усунення цих недоліків скористаємося моментною схемою скінченних елементів [8]. При виведенні основних співвідношень МСЕ будемо слідувати методиці, що викладена у роботі [9].

Розглянемо ізопараметричний скінченний елемент у вигляді шестигранного паралелепіпеду. Припустимо, що об'єм V , який займає елемент, відображений на куб зі стороною 2. Помістимо у центр куба, віднесеного до базисної системи координат z^i , початок місцевої системи координат x^1, x^2, x^3 , спрямовуючи вісі вздовж ребер. Згідно з варіаційним принципом Лагранжа рівновага скінченного елемента визначена, якщо варіація повної потенціальної енергії приймає мінімальне значення, тобто:

$$\delta \tilde{\Pi} = \delta \tilde{W} - \delta A = 0, \quad (1)$$

де $\delta \tilde{W}$ – варіація енергії в'язкопружної деформації; δA – варіація роботи розподілених об'ємних і поверхневих сил.

Варіацію енергії в'язкопружної деформації можна представити у вигляді:

$$\delta \tilde{W} = \iiint_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (2)$$

де для опису в'язкопружних властивостей композиційного матеріалу скористалися спадковою теорією Больцмана-Вольтера, а тензор напружень приймемо у вигляді інтегрального оператора для якого параметрами є миттєві та тривалі механічні характеристики:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - (C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де C_0^{ijkl} – миттєвий тензор пружних сталей композиційного матеріалу; C_∞^{ijkl} – тривалий тензор пружних сталей.

Застосування інтегрального оператора саме в такому вигляді є цілком доцільним, зважаючи на те, що миттєві і тривалі модулі пружності можуть бути знайдені експериментальним шляхом, а отже відомі для більшості матеріалів, які використовують як матриці композитних матеріалів.

Далі будемо слідувати моментній схемі скінченного елемента. Для побудови матриці жорсткості необхідно провести всередині скінченного елемента апроксимацію полів переміщень та компонентів тензора деформацій. Проведемо спочатку часову дискретизацію, розіб'ємо часовий проміжок вузловими значеннями t_i . Для отримання матриці жорсткості скінченного елемента у момент часу t

всередині кожного часового проміжку проведемо апроксимацію переміщень у вигляді:

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1})N_{n-1}(t) + u_m(t_n)N_n(t), \quad (4)$$

де $u_m(t_{n-1})$, $u_m(t_n)$ – вектори переміщень у вузлах t_{n-1} і t_n відповідно у просторовому напрямі m ; $N_{n-1}(t)$ і $N_n(t)$ – базисні функції, що визначаються співвідношеннями:

$$N_{n-1}(t) = 1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad N_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (5)$$

Тоді

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1}) \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m(t_n) \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right). \quad (6)$$

Для визначення тензора деформацій скінченного елемента надамо переміщенням $u_m(t)$ такого вигляду:

$$u_m(t) = \sum_{s=1}^8 u_m^s(t, x_1^s, x_2^s, x_3^s) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) = u_m^s(t) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3). \quad (7)$$

Тоді

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} \left(C_l^m \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_l} \right). \quad (8)$$

Звідси, враховуючи, що

$$\begin{aligned} u_m(t) &= u_m^s(t_{n-1}) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m^s(t_n) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) = \\ &= \left(u_m^s(t_{n-1}) \cdot \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m^s(t_n) \cdot \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) \right) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) = \\ &= u_m^s(t) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (9)$$

отримаємо

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} u_m^s(t) \cdot \left(C_l^m \frac{\partial N_s(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_l} \right). \quad (10)$$

Підставляючи (3) і (10) у (2), отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{W} &= \iiint_V \left(\left(C_0^{ijkl} \cdot \frac{1}{2} u_m^s(t) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - (C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot \frac{1}{2} u_m^s(\tau) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) d\tau \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \delta \left(\frac{1}{2} u_m^s(t) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) \right) dV. \quad (11)$$

Прийнявши такі позначення:

$$K = \frac{1}{4} \iiint_V C_0^{ijkl} \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \quad (12)$$

$$\Delta K = \frac{1}{4} \iiint_V (C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \quad (13)$$

отримаємо

$$\delta \tilde{W} = \left(K u_m^s(t) - \int_0^t \Delta K u_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \right) \cdot \delta u_m^s(t), \quad (14)$$

де K і ΔK – шукані складові матриці жорсткості скінченного елемента. Таким чином бачимо, що варіація енергії в'язкопружної деформації містить пружну та спадкову складові.

Розглянемо побудову складових матриці жорсткості (12) та (13), для яких у загальному випадку процедури отримання співвідношень на основі моментної схеми скінченного елемента аналогічні. Для варіація енергії у пружному випадку (12) для скінченного елемента матимемо:

$$\delta W = \iiint_V C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (15)$$

Просторова апроксимація полів переміщень відносно базисної системи координат буде мати вигляд лінійного закону:

$$u_{k'} = \sum_{pqr} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (16)$$

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу; $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій вигляду:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p}{p!} \cdot \frac{(x^2)^q}{q!} \cdot \frac{(x^3)^r}{r!}, \quad (17)$$

де $p = 0, 1, \dots, l$; $q = 0, 1, \dots, m$; $r = 0, 1, \dots, n$ – степені апроксимуючого полінома за відповідними координатними напрямками. Після застосування підходів моментної схеми скінченного елемента компоненти тензора деформацій будуть відображатися такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{11}^{(011)} \psi^{(011)}, \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(110)} \psi^{(110)}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)}.\end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладу $e_{ij}^{(stg)}$ обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}e_{11}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'}; \\ e_{22}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'}; \\ e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'}; \\ e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} \right); \\ e_{13}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right); \\ e_{23}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right);\end{aligned}\tag{19}$$

де

$$b_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^{k'}}{(\partial x^1)^\mu (\partial x^2)^\nu (\partial x^3)^\eta} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}.\tag{20}$$

У матричному вигляді вираз (18) можна подати так:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\},\tag{21}$$

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\},\tag{22}$$

де матриця $[F_{ij}^{s'}]$ будується за допомогою співвідношень (19).

Підставляючи співвідношення (21) у (15), отримаємо:

$$\delta W = \iiint_V \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}^T [C_0^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \{e_{kl}\} dV = \{\delta e_{ij}\}^T [H_0^{ijkl}] \{e_{kl}\},\tag{23}$$

з урахуванням (22):

$$\delta W = \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H_0^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{\omega_{t'}\},\tag{24}$$

тут

$$[H_0^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{kl}\}^T [C_0^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,\tag{25}$$

де $[C_0^{ijkl}]$ – матриця миттєвих пружних сталей, що характеризує фізичні властивості анізотропного матеріалу з урахуванням метрики простору, елементами якого є компоненти метричного тензора \hat{g} . Для отримання складової (13) замість $[C_0^{ijkl}]$ у (25) підставляють матрицю $[C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}]$.

Матриці $[C_0^{ijkl}]$ та $[C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}]$ визначаються через ефективні пружні сталі волокнистого композиційного матеріалу

Для побудови матриці жорсткості композиційного матеріалу у апроксимації (16) необхідно перейти від коефіцієнтів розкладу $\{\omega_{k'}\}$ до вузлових значень переміщень у апроксимації:

$$u_i = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^L u_i^{(pqr)} \varphi^{(pqr)} = u_i^{(pqr)} N_{(pqr)}, \quad (26)$$

де $N_{(pqr)}$ – функції форми; $u_i^{(pqr)}$ – вузлові значення переміщень скінченного елемента; $\varphi^{(pqr)}$ – апроксимуюча функція, що задається за допомогою одномірних поліномів Лагранжа у вигляді:

$$N_{(pqr)} = \varphi^{(pqr)} = R_{1(p)}^M R_{2(q)}^N R_{3(r)}^L, \quad (27)$$

$$R_{i(j)}^k = \frac{\prod_{m=1}^k (x^i - x_{(m)}^i)}{(x^i - x_{(m)}^i) \prod_{r=1}^k (x_{(j)}^i - x_{(m)}^i + \delta_{(m)}^{(j)})}, \quad (28)$$

де M, N, L – максимальні степені апроксимуючих поліномів у (34) відносно осей координат x^1, x^2, x^3 відповідно.

Порівнюючи (16) і (26) будемо мати зв'язок між апроксимуючими функціями Лагранжа (27) і степеневими (17):

$$\{\omega_{k'}\} = [A] \{u_{k'}\}, \quad (29)$$

де $[A]$ – матриця перетворення.

Для подальшого відшукування матриці жорсткості підставимо (29) у (24) і отримаємо:

$$\delta W = \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H_0^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} = \delta \{u_{s'}\}^T [K^{s't'}] \{u_{t'}\}. \quad (30)$$

Матриця ΔK отримується аналогічним чином з використанням механічних сталей $[C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}]$.

Отримання розв'язувальних рівнянь. Підставляючи у варіаційний принцип Лагранжа (1) отриманий вираз (14) і прийнявши варіацію роботи поверхневих сил у вигляді

$$\delta A = \iint_S P_m \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \delta u_m^s(t) dS, \quad (31)$$

після математичних перетворень отримуємо систему розв'язувальних рівнянь вигляду:

$$Ku_m^s(t) - \int_0^t \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = P, \quad (32)$$

де

$$P = \iint_S P_m \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) dS \quad (33)$$

– вектор поверхневих сил.

Розіб'ємо період часу від 0 до t на $n-1$ часовий інтервал, тоді рівняння (32) можна записати у вигляді:

$$Ku_m^s(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = P. \quad (34)$$

Після математичних перетворень будемо мати таку систему розв'язувальних рівнянь:

$$\tilde{K}u_m^s(t_n) = P + \sum_{i=1}^{n-2} Q_i + \tilde{Q}_{n-1}, \quad (35)$$

де

$$\tilde{K} = K - \Delta K \left(1 - \frac{1}{t_n - t_{n-1}} (1 - e^{t_{n-1} - t_n}) \right) \quad (36)$$

– матриця жорсткості в'язкопружного матеріалу в момент часу t ;

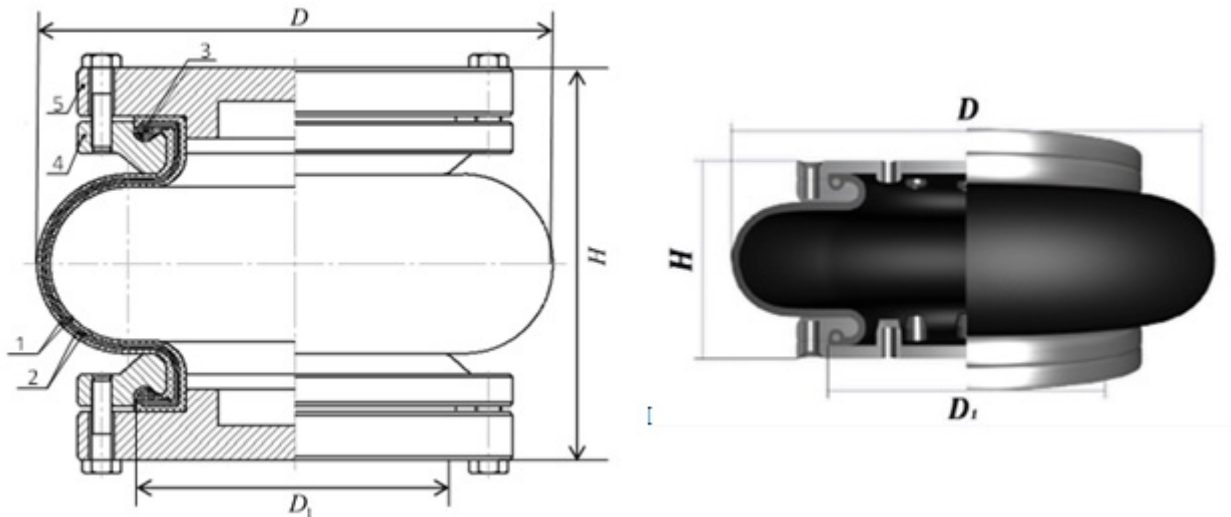
$$Q_i = \Delta K \left(u_m^s(t_i) \left(\frac{1}{t_{i+1} - t_i} (e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_{n-1} - t_n}) - e^{t_i - t_n} \right) + \right. \\ \left. + u_m^s(t_{i+1}) \left(e^{t_{i+1} - t_n} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} (e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_i - t_n}) \right) \right) \quad (37)$$

– вектор додаткового навантаження, що обумовлений впливом i -го часового скінченного елемента;

$$\tilde{Q}_{n-1} = \Delta Ku_m^s(t_{n-1}) \left(\frac{1}{t_n - t_{n-1}} (1 - e^{t_{n-1} - t_n}) - e^{t_{n-1} - t_n} \right) \quad (38)$$

– вектор додаткового навантаження, що обумовлений впливом $n - 1$ -го часового скінченного елемента.

Наведена методика реалізована у вигляді пакета прикладних програм програмного комплексу «МІРЕЛА+», за допомогою якого було розв'язано задачу про напружено-деформований стан однопорожнинного пневмобалона з гумовокордною оболонкою (рис. 1) [10].



1 – гума, 2 – шари корда, 3 – кільце бортове дротяне, 4, 5 – фланці притискні
Рисунок 1 – Конструкція однопорожнинного гумовокордного пневмобалона

Розміри пневмобалона: $D = 248$ мм, $H = 112$ мм, $D_1 = 150$ мм. Оболонка виготовлена з гуми (миттєвий модуль пружності $E_{R0} = 10$ МПа, тривалий модуль пружності $E_{R\infty} = 3,874$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu_R = 0,49$), армованої поліамідними волокнами с механічними характеристиками $E_C = 120$ ГПа, $\nu_C = 0,34$. Волокна розташовані у два шари і мають перехресну схему армування з кутами $\pm\gamma$ відносно меридіану конструкції. Оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску та осевого навантаження $Q = 5 \cdot 10^{-2}$ МПа.

Розрахунки були проведені для різного об'ємного вмісту волокон при меридіанному армуванні гумовокордної оболонки. Розподіл осевих переміщень у пневмобалоні при об'ємному вмісті волокна $f = 0,3$ представлено на рис. 2.

Вертикальна осадка амортизатора в залежності від часу показана на рис. 3.

Якісна картина при різному об'ємному вмісті волокна однакова: спочатку йде значне збільшення величини осадки (від 90 % при $f = 0$ до 70 % при $f = 0,3$), а потім процес стабілізується і з плином часу (20 с після навантаження) практично не змінюється. Гума має виражені в'язкопружні властивості, тому чим менше об'ємний вміст волокна, тим більший прояв в'язкопружних властивостей у гумовокордному композиті.

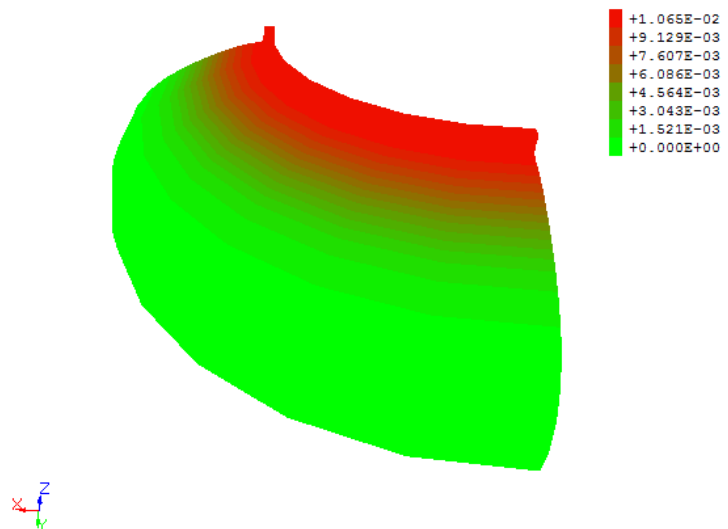


Рисунок 2 – Розподіл осевих переміщень оболонки

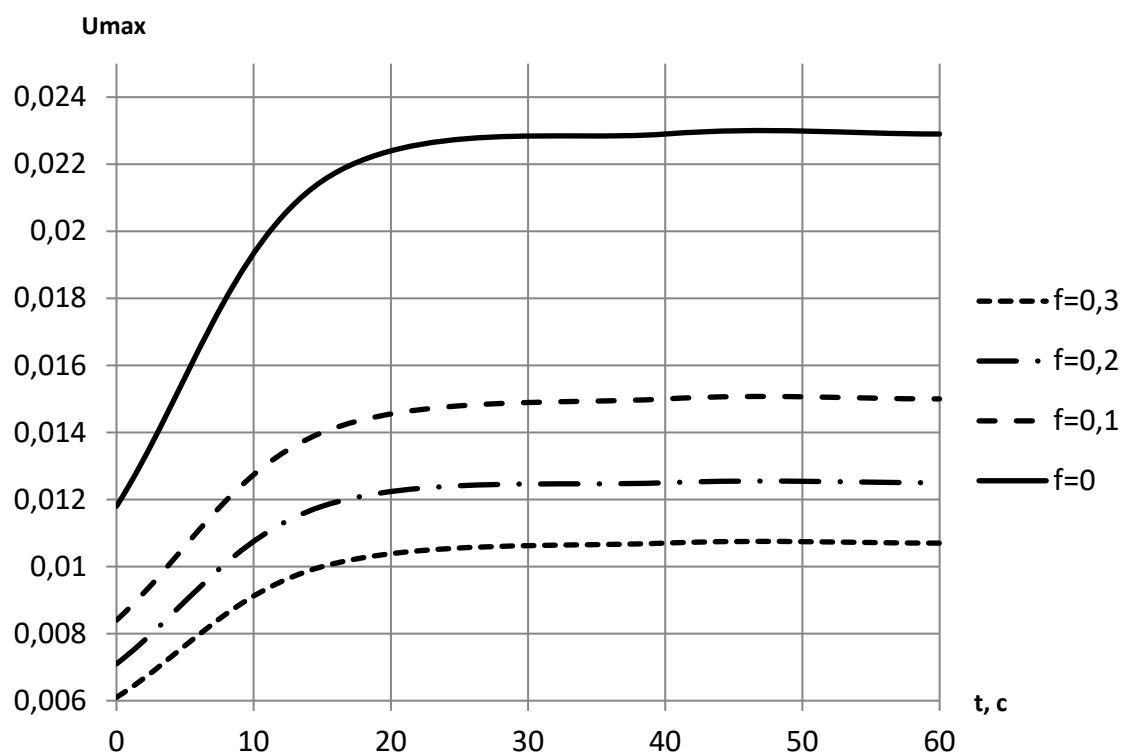


Рисунок 3 – Максимальні осьові переміщення в оболонці протягом часу в залежності від об'ємного вмісту волокон

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Корнеев В.С., Шалай В.В. Математическая модель резинокордной оболочки вращения для пневматических амортизаторов / Омский научный вестник. Серия «Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение». 2019. Т.3, №1. С. 22-41. <https://doi.org/10.25206/2588-0373-2019-3-1-22-41>
2. Мартиненко В.Г., Львов Г.І. Чисельна методика визначення анізотропних в'язкопружних властивостей ортогонально армованого композиційного матеріалу / Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ». Сер.: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. № 46 (1218). С. 44-51. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2016.46.88049>
3. Levin V.A. et al. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains / Composite Structures. 2015. Vol. 131. P. 25-36. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.037>
4. Svetashkov A. et al. The hybrid effective modules of viscoelastic composites / Key Engineering Materials. 2017. Vol. 743. P. 217-222. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.743.21>
5. Papanicolaou G.C., Zaoutos S.P. Viscoelastic constitutive modeling of creep and stress relaxation in polymers and polymer matrix composites / Creep and Fatigue in Polymer Matrix Composites. 2019. P. 3-59. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-102601-4.00001-1>
6. Yvonnet J. Linear viscoelastic materials / Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements. Solid mechanics and its applications. 2019. Vol. 258. P.123-144. https://doi.org/10.1007/978-3-030-18383-7_7
7. Kupriyanov N.A., Simankin F.A., Manabaev K.K. New effective moduli of isotropic viscoelastic composites. Part II. Comparison of approximate calculation with the analytical solution // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 124. P. 1-6. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/124/1/012100>
8. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. К.: Будівельник, 1992. 216 с.
9. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. К.: Наук. думка, 2002. 655 с.
10. Онуфриенко А.В. Виброизоляция агрегатов машин с использованием рукавных амортизаторов растяжения: дис. ... канд. тех. наук / Спец. 01.02.06. Омск, 2018. 169 с.

REFERENCES

1. Korneyev, V.S. and Shalay, V.V. (2019), "Mathematical model of rubber-cord shell of rotation for pneumatic shock absorbers", *Omsk Scientific Bulletin. Series "Aircraft missile and power engineering"*, vol. 3? no. 1, pp. 22-41. <https://doi.org/10.25206/2588-0373-2019-3-1-22-41>
2. Martynenko, V.H. and Lvov, H.I. (2016), "Numerical method for determining anisotropic viscoelastic properties of orthogonally reinforced composite material", *Bulletin of the National tech. KhPI University. Ser.: Dynamics and strength of machines*, no. 46 (1218), pp. 44-51. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2016.46.88049>

3. Levin, V.A. et al. (2015), "Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains", *Composite Structures*, vol. 131, pp. 25-36. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.037>
4. Svetashkov, A. et al. (2017), "The hybrid effective modules of viscoelastic composites", *Key Engineering Materials*, vol. 743, pp. 217-222. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.743.21>
5. Papanicolaou, G.C. and Zaoutsos, S.P. (2019), "Viscoelastic constitutive modeling of creep and stress relaxation in polymers and polymer matrix composites", *Creep and fatigue in polymer matrix composites*, pp. 3-59. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-102601-4.00001-1>
6. Yvonnet, J. (2019), "Linear viscoelastic materials", *Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements. Solid mechanics and its applications*, vol. 258, pp. 123-144. https://doi.org/10.1007/978-3-030-18383-7_7
7. Kupriyanov, N.A., Simankin, F.A. and Manabaev, K.K. (2016), "New effective moduli of isotropic viscoelastic composites. Part II. Comparison of approximate calculation with the analytical solution", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems*, Tomsk, Russia, 1-4 December 2015, vol. 124, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/124/1/012100>
8. Kirichevskiy, V.V. and Sakharov, A.S. (1992), *Nelineynyye zadachi termomekhaniki konstruktsiy iz slaboszhimayemykh elastomerov* [Nonlinear problems of thermomechanics of structures made of weakly compressible elastomers], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
9. Kirichevskiy, V.V. (2002), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [Finite element method in elastomer mechanics], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
10. Onufriyenko, A.V. (2018), *Vibration isolation of machine aggregates using sleeve stretch dampers*, Ph.D. Thesis, Dynamics, strength of machines, devices and equipment, Omsk, Russia.

Про авторів

Мізерна Олена Леонідівна, старший викладач кафедри прикладної математики, Національний університет «Запорізька політехніка» (НУ «Запорізька політехніка»), м. Запоріжжя, Україна, el_mi15@ukr.net

Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики, Запорізький національний університет, м. Запоріжжя, Україна, gsm1212@ukr.net

Клименко Михайло Іванович, доцент кафедри фундаментальної математики, Запорізький національний університет, м. Запоріжжя, Україна, m1655291@gmail.com

About the authors

Mizerna Olena Leonidivna, Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics, Zaporizhzhya Polytechnic National University, Zaporizhzhya, Ukraine, el_mi15@ukr.net

Grebenuk Serhii Mykolaiovych, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Head of the Department of Fundamental Mathematics in Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine, gsm1212@ukr.net

Klymenko Mykhailo Ivanovych, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine, m1655291@gmail.com

Аннотация. Увеличение сферы использования композиционных материалов приводит к необходимости совершенствования методов расчёта композитных конструкций, повышения их эффективности и адекватности реальным процессам. Применение волокнистых композиционных материалов создаёт осложнения при определении напряженно-деформированного состояния конструкции из-за различных физических и механических свойств компонентов материала. Обычно волокнистый композит состоит из двух компонентов: матрицы и волокна. Матрица обеспечивает монолитность материала, фиксирует форму изделия и взаимное расположение армирующих волокон. Волокна воспринимают основные напряжения, возникающие в процессе эксплуатации и обеспечивают жёсткость и прочность композита. Сочетание свойств матрицы и волокна позволяет создавать специальные типы композитов для использования в различном оборудовании, что упрощает его конструкцию и улучшает эксплуатационные характеристики. Использование в качестве матрицы резины придаёт конструкции вязкоупругие свойства, которые проявляются ползучестью деформации и релаксацией напряжений в материале, что значительно усложняет расчёт напряженно-деформированного состояния всей конструкции. В работе предложен подход, являющийся развитием моментной схемы конечных элементов в виде метода перемещений на основе вариационного принципа Лагранжа. На основе этого подхода разработан специальный пространственно-временной конечный элемент, учитывающий вязкоупругие свойства матрицы материала и упругие свойства волокон. Предложенный численный подход позволяет получать решение задач вязкоупругости механики композиционных материалов в трёхмерной постановке. С помощью созданного на базе данного подхода пакета прикладных программ произведён расчёт напряженно-деформированного состояния однополостного пневмобаллона с резинокордной оболочкой. Проведён анализ влияния схемы армирования и вязкоупругих свойств резины на параметры деформирования пневмобаллона. В частности, становится возможным регулировать жесткостные характеристики конструкции за счёт изменения ориентации, типа и концентрации волокон, а также типа матрицы и других характеристик материала.

Ключевые слова: волокнистый композиційний матеріал, вязкоупругость, пространственно-временной конечный элемент

Abstract. Increase in spheres of composite materials application leads to the need to improve the methods of composite structures calculation, increase their efficiency and adequacy to real processes. The use of fibrous composite materials creates difficulties in determining the stress-strain state of the structure due to the different physical and mechanical properties of the material components. As a rule, a fibrous composite consists of two components: a matrix and a fiber. The matrix ensures the material monolithicity fixing the shape of the product and the relative position of the reinforcing fibers. The fibers absorb the main stresses that occur during operation, and provide rigidity and strength of the composite. The combination of the matrix and fiber properties allows creating special types of composites to be used in various equipment. The use of rubber as a matrix gives the structure viscoelastic properties, which can be seen in the deformation creeping and stress relaxation in the material, which complicates the calculation of the stress-strain state of the whole structure greatly. The paper proposes an approach that is the development of a moment scheme of finite elements in the form of the displacements method based on the Lagrange principle. Using this approach, a special space-time finite element has been developed that takes into account the viscoelastic properties of the material matrix and the fiber elastic properties. The proposed numerical approach allows obtaining a solution to the problems of viscoelasticity of composite materials mechanics in three-dimensional model. Using the applications package created on the basis of this approach, the calculation of the stress-strain state of a single-cavity pneumatic cylinder with a rubber cord shell has been done. The influence of the reinforcement scheme and rubber viscoelastic properties on the parameters of the pneumatic cylinder deformation has been analyzed. In particular, it becomes possible to adjust the structure stiffness properties by changing the orientation, type and concentration of fibers, as well as the type of matrix and other material characteristics.

Keywords: fibrous composite material, viscoelasticity, space-time finite element

Стаття надійшла до редакції 12.02.2021