

УДК 621.039.51

В. В. Рязанов

Институт ядерных исследований НАН Украины, г. Киев

СТАТИСТИКА ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССЫ В ЯДЕРНОМ РЕАКТОРЕ

На основе теории иерархических структур установлено соответствие между динамикой для числа нейтронов, полученной из теории ветвящихся процессов, числом нейтронов n -го поколения, числом узлов на n -м уровне иерархии, скоростью изменения вероятности возникновения цепной реакции, видом интенсивности и силы иерархической связи, степенью критичности реактора, и траекториями нейтронов в реакторе. Найдена связь между вероятностями образования некоторого поколения числа нейтронов и вероятностью возникновения самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер. Показано, что описывающие эти процессы распределения Цаллиса и Реньи связаны соотношениями деформированной алгебры, а также при определенных условиях могут быть эскортными по отношению друг к другу.

Ключевые слова: перколяция иерархически соподчиненные системы, вероятность возникновения цепной реакции, распределения Цаллиса и Реньи.

В [1] строгими соотношениями теории перколяции на решетках Бете описывается поведение коэффициента размножения нейтронов. Критическая точка реактора соответствует порогу перколяции, интерпретируемой как вероятность возникновения самоподдерживающейся цепной реакции, и производных от этой величины. Ярким проявлением сложности и неравновесности цепных ядерных процессов в реакторе является их иерархическое строение. В настоящей работе статистика иерархических систем применяется к более подробному исследованию сложных цепочек деления.

Концепции иерархического соподчинения использовались при описании физических, биологических, экономических, экологических, социальных и других сложных систем. Одним из наиболее продуктивных приложений идеи иерархического строения являются сложные сети [5]. Реальные сети обладают высокой степенью кластеризации и самоподобным строением, проявляющимся в степенном распределении вероятностей по числу связей между разными соседями [3, 6]. Многие сети обладают блочной структурой, при наличии которой можно выделить группы узлов, сильно связанных между собой, но имеющих слабые связи (или вообще несвязанные) с узлами, не принадлежащими данной группе. Вызвано это тем, что фазовое пространство системы вдали от равновесия, когда теряется эргодичность, разбивается на кластеры, отвечающие структурным уровням, иерархически соподчиненным друг другу. Таким образом ведут себя цепочки деления в ядерных реакторах. Иерархически соподчиненные системы образуют ультраметрическое пространство [2-4, 11]. Его геометрическим образом служит дерево Кэйли (рис. 1).

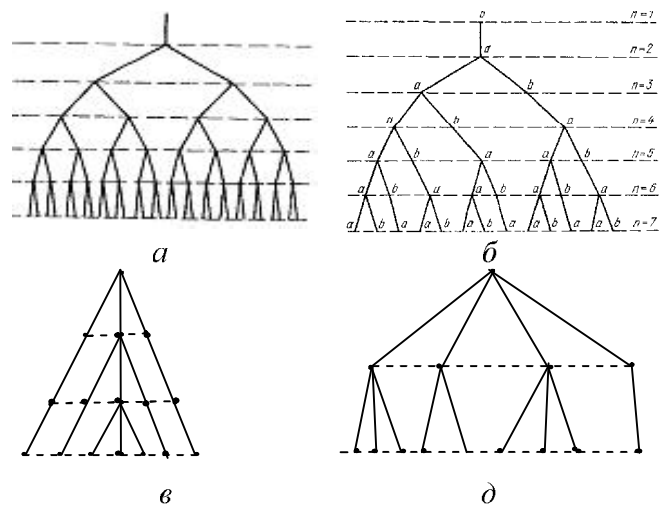


Рис. 1. а). Простейшее регулярное дерево Кейли с ветвистостью $s=2$;
 б). Нерегулярное дерево Фибоначчи с переменной ветвистостью;
 в). Вырожденное дерево с $s=3$;
 г). Нерегулярное дерево для $n=2$, $a=2$

В настоящей работе некоторые результаты теории иерархически соподчиненных систем вдали от равновесия применяются к описанию цепных ядерных реакций в ядерном реакторе. Во втором разделе обнаружена связь перколяционных особенностей поведения нейтронно-ядерных процессов в реакторах, рассмотренных в [1], с интенсивностью иерархического объекта на уровне n , которая для стохастической системы сводится к плотности вероятности, и со степенью иерархической связи объектов w , отвечающих узлам дерева на заданном уровне. Для различных иерархических деревьев находится явный вид этих величин, устанавливается соответствие с различными режимами работы реактора, с траекториями движения нейтронов в этих режимах. В третьем разделе рассмотрены процессы аномальной диффузии в ультраме-

трическом просторі, знайдені стаціонарні рішення в формі розподілу Цалліса [7], показано, що ці розподіли в частині випадку є ескортними по відношенню до розподілів, знайдених в попередньому розділі (они є розподілами Реньї), зв'язаними з ймовірностями перколяції та ймовірностями виникнення ланцюгової реакції ділення.

Зв'язь нейтронних режимів реактора з траєкторіями нейтронів. В [1] для ймовірності перколяції $P(n, c)$ було використано рекуррентне співвідношення виду:

$$P(n+1, c) = c[1 - (1 - P(n, c))^s], \quad P(0, c) = c \quad (1)$$

де $c = p\lambda / (\lambda_f + \lambda_c)$ - ймовірність ділення ядра нейтроном, інтенсивність гиніли нейтрона (поглинання середою або вихід з системи) за час $\Delta t \rightarrow 0$ позначена як $\lambda_c \Delta t + o(\Delta t)$, а інтенсивність ділення ядра нейтроном $\lambda_f \Delta t + o(\Delta t)$ ($\lambda_f = v \Sigma_f$, v - швидкість нейтронів, Σ_f - макроскопічне сечення ділення), $s = \bar{V}$, де \bar{V} - математичне очікування числа вторичних нейтронів в одному акті ділення. Ефективний коефіцієнт розмноження нейтронів $k_{\text{эф}} = p \bar{V}$. З ймовірністю $c = p$ з (1) зв'язана важлива величина порога протікання, сопоставляемая критичній точці реактора. Співвідношення (1), як показано в [1], дозволяють визначати критичну точку.

В [8] співвідношення виду (1) записується в формі

$$P_{n+1} = P_n + N_n^{-1} w(P_n), \quad (2)$$

де P_n - інтенсивність ієрархічного об'єкта на рівні n , котра для стохастическої системи зводиться до густоти ймовірності, це сумісна ймовірність утворення ансамблю ієрархічних рівнів, n -рівневої ієрархічної структури, w - ступінь ієрархічної зв'язі об'єктів, відповідаючих вузлам дерева на заданому рівні, N_n - число вузлів на рівні n . Ступінь ієрархічної зв'язі w об'єктів, відповідаючих вузлам дерева на заданому рівні, визначається числом кроків n до загального предка, котрий задає відстань в ультраметричному просторі. Величина n в нашому випадку відповідає числу поколінь нейтронів в ланцюговій реакції ділення. Величина w відповідає родству в генеалогії. Порівнюючи вираження (1) та (2), знаходимо, що

$$w(P_n) = N_n [1 - P_n (1 - P_n/c)^{1/s}], \quad s = \bar{V}. \quad (3)$$

В [9] та [1] величина $P(n, c)$ позначає ймовірність перколяції з кореневої вершини на відстань n . В [1] цій величині сопоставляється ймовірність виникнення самопідтримуваної ланцюгової реакції. Величина n , число поколінь нейтронів

в ланцюговій реакції, пропорційна часу з коефіцієнтом пропорційності, залежним від типу реактора. Для реакторів на теплових нейтронах час життя одного покоління нейтронів дорівнює 0,1 сек, для реакторів на швидких нейтронах час життя одного покоління нейтронів на 3—7 порядків менше. Величина N_n - число вузлів на рівні n , що відповідає числу нейтронів n -го покоління, для регулярного дерева (рис. 1а) дорівнює

$$N_n = \bar{V}^n. \quad (4)$$

Основною рисою ієрархічних систем є властивість самоподібності [8]. Розглянемо ступінь ієрархічної зв'язі $w(P_n)$ (3) при малих значеннях аргумента. Розкладаючи в ряд величину (3) в області малих значень $P_n \rightarrow 0$, у значення $P_{n0} \rightarrow 0$, $P_{n0} < P_n$, знайдемо максимальний член розкладу, котрий дорівнює

$$w(P_n) = N_n A P_n^{1/s}, \quad (5)$$

де $A = P_{n0}^{(s-1)/s} (1 - P_{n0}/c)^{(1/s)-1}/c$, P_{n0} - деяке фіксоване значення P_n , близьке до 0.

Якщо порівняти (5) з отриманим в [8] для випадку $n \gg 1$, коли $P_{n-1} \sim P_n$, вираженням

$$w(P) = W P^\beta, \quad P \rightarrow 0, \quad (6)$$

де $W = w(1)$ - позитивна постійна, $\beta = 1 - D$, $D \leq 1$ - фрактальна розмірність самоподібного об'єкта типу вирізанної берегової лінії [10, 11], то отримаємо, що $1/s = \beta$, $D = 1 - 1/s = \ln \bar{V} / \ln q$, $q < 1$ - параметр подібності, і $P_n \sim q^n$, функція зв'язі задовольняє умову однорідності $w(qP) = q^\beta w(P)$. Отримуємо, що $\ln q = \ln \bar{V} / (1 - 1/\bar{V}) \approx 1,500803549$, $q = (\bar{V})^{-1/(1-1/\bar{V})}$. Порівнявши (5) та (6), так як $W = w(1) = 1 - c$, отримуємо також, що

$$P_{n_0} = \frac{[(1-c)c]^{1/\bar{V}}}{(N_{n_0})^{1/\bar{V}} + \frac{1}{c} [(1-c)c]^{1/\bar{V}}}. \quad (7)$$

Позначаючи в рівняннях (2), (4), що при довільних значеннях P_n задовольняється скейлінгове співвідношення $P_n = x_n q^n = x_n s^{-n/D}$, приходимо до рекуррентного рівняння для функції x_n :

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad \Phi(x) = q(x + W x^{1-D}). \quad (7)$$

Зображення $\Phi(x)$ має дві стаціонарні точки, що відповідають умові $x = \Phi(x)$: стабільну $x_s = 0$ та критичну

$$x_c = (W/(q-1))^{1/D}, \quad q = s^{1/D}. \quad (8)$$

Поведение системы представляется однородными функциями

$$P_n = x_0 s^{-n/D}, \quad w_n = W^{1/D} (q^{-1} - 1)^{-\Delta s - \Delta n}, \quad (9)$$

где $\Delta = (1-D)/D$ — декремент, определяющий масштаб иерархической связи в ультраметрическом пространстве [8, 11], учитывающем вершины иерархических деревьев.

В [8] используется континуальный предел $n \rightarrow \infty$, конечная разность $P_n - P_{n-1}$ заменяется производной dP_n/dn , уравнение вида (2) записывается в непрерывном виде. Сравнение точного численного расчета и решений приближенных аналитических выражений показывает их сближение при росте n , и совпадение уже при значениях n порядка 10-20. Рассмотрим решения отдельно для различных видов иерархических деревьев с разным поведением функции N_n числа узлов на уровне n , соответствующего числу нейтронов n -го поколения. Для малых значений P , в асимптотике (6) для регулярного дерева с N_n вида (4) получено явное решение этого уравнения вида

$$\begin{aligned} P &= W^{1/(1-D)} [(1-u) + u e^{\zeta - \zeta_0}]^{1/D}, \\ u &= DW^{1/(1-D)} / \ln s, \\ \zeta &= (n_0 - n) \ln s, \\ \zeta_0 &= n_0 \ln s, \quad n \leq n_0, \\ w &= [(1-u) + u e^{\zeta - \zeta_0}]^\Delta, \\ \zeta &\leq \zeta_0, \quad w(\zeta_0) = 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где ζ — расстояние в ультраметрическом пространстве, $n_0 \gg 1$ — полное число иерархических уровней. Аргумент s из (1) входит в (10), (13), (14) через w из (3) и (5) и $W = w(1)$. При заданной конфигурации иерархического дерева важную роль играет фрактальная размерность D , величина которой определяет силу иерархической связи $w(\zeta)$. В нестационарных системах параметр подобия q меняется со временем, изменяется и $D(q)$. Для таких сложных систем, как система размножающихся нейтронов в реакторе, иерархическая связь носит мультифрактальный характер [12, 13]. Существенную роль играет спектр значений q , по которому сила связи $w_q(\zeta)$ распределена с плотностью $\rho(q)$. Полное значение силы связи определяется равенством $w(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_q(\zeta) \rho(q) dq$. В качестве ядра $w_q(\zeta)$ используется выражение вида (10) с переменным значением фрактальной размерности $D(q)$. Поведение этой функции для реактора, полученное расчетным путем, показано на рис.1 в [13] и рис.1 в [1]. Приведенные соотношения определяют только асимптотическое поведение

иерархической системы в пределе $1 \ll \zeta \leq \zeta_0$. Полученная асимптотика представляет качественный характер поведения иерархической системы. Чтобы получить точные решения, надо исходить из конечно-разностных уравнений вида (1), (2), используя, как используя, как в [1], численные методы. Распределение по иерархическим уровням исследовано в [8] и приводится ниже, показано, что стационарное распределение вероятности принимает форму Цаллиса. Отметим, что при использовании распределения, содержащего время жизни [14], можно получить более общие распределения, в частности, суперстатистики и их обобщения. Распределения Цаллиса представляют собой только частный случай суперстатистик и их обобщений. Вероятность образования самоподобной сети, в нашем случае, возникновения самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер — монотонно возрастает с уменьшением n , принимая максимальное значение на верхнем уровне $n=0$ (первоначальный нейтрон), отвечающем всей системе. У единственного первоначального нейтрона в реакторе максимальная вероятность возникновения цепной реакции, хотя реальные возможности для этого у него еще не такие значительные. Эволюция иерархических структур рассматривается в [8] как процесс диффузии на случайно ветвящихся деревьях, структура которых определяется параметром разнородности, являющимся мерой их сложности. Сложность системы по аналогии с энтропией характеризует беспорядок иерархической связи [8]. Но если энтропия характеризует беспорядок в распределении атомов, то при определении сложности их роль переходит к подансамблям, на которые подразделяется полный статистический ансамбль.

Соотношение (10) записано для числа узлов N_n на уровне n , соответствующего числу нейтронов n -го поколения вида (4), $N_n = s^n$, где $s = \bar{V}$ — показатель ветвистости дерева. Используем теперь отмеченную выше пропорциональность числа поколений нейтронов времени. Сопоставим выражения для числа узлов N_n на уровне n с временным поведением числа нейтронов, определенным, например, из теории ветвящихся процессов [15, 16]. Выражение (4) записано в [8] для случая регулярного дерева, показанного на рис.1а и, так как $n \sim t$, соответствует временному поведению для числа нейтронов экспоненциального вида e^{-at} , справедливого вне критической области [15]. В [16] показано, что в критической области зависимость степенная, t^α , что совпадает со степенной аппроксимацией вида

$$N_n = (1+n)^\alpha, \quad (11)$$

используемой в [8] для случая самоподобного нерегулярного дерева, рис.1г. Это соответствует зависимости степенного вида, полученной в [1] численно для границ критической области. Поведение, присущее простым статистическим системам, наблюдается при показателях ветвистости иерархического дерева, превышающих золотое сечение $a_+ = (5^{1/2} + 1)/2 \approx 1,61803$, а спадание сложности с ростом дисперсии иерархической связи, характерное для сложных систем, проявляется только при слабой ветвистости, ограниченной интервалом $1 < a < 1,618$. Для вырожденного дерева, рис.1в,

$$N_n = 1 + (s-1)n \approx sn, \quad (12)$$

что близко к (11) при $a=1$ и соответствует линейной зависимости от времени и временному поведению в критической точке [15, 16]. Открытым остается вопрос, соответствует ли какой-то физической ситуации в реакторах движение по дереву Фибоначчи, рис.1б [8]. Делящиеся ядра при этом должны быть такими, чтобы среднее число вторичных нейтронов, образующихся при их делении, было равно золотому сечению $\tau = (5^{1/2} + 1)/2 \approx 1,61803$.

Для вырожденного дерева с числом узлов (12), для поведения в критической точке, получаем вместо экспоненциальной зависимости в (10) логарифмическую зависимость вида

$$P = W^{1/(1-D)} [1 - u \ln(1 + (s-1)(\zeta_0 - \zeta)/lns)]^{1/D},$$

$$u = DW^{1/(1-D)}/(s-1),$$

$$\zeta = (n_0 - n)lns, \quad \zeta_0 = n_0 lns, \quad (13)$$

$$w = [1 - u \ln(1 + (s-1)(\zeta_0 - \zeta)/lns)]^\Delta, \quad \zeta \leq \zeta_0.$$

В промежуточном случае нерегулярного дерева со степенным ростом (11) числа узлов (и нейтронов) интенсивность и сила иерархической связи также ведут себя степенным образом в зависимости от расстояния ζ в ультраметрическом пространстве, пропорционального числу поколений нейтронов:

$$P = W^{1/(1-D)} [1 + u(1 - \zeta/\zeta_0)^{-(a-1)}]^{1/D},$$

$$u = DW^{1/(1-D)} n_0^{-(a-1)}/(a-1),$$

$$\zeta = (n_0 - n)lns, \quad \zeta_0 = n_0 lns, \quad n \leq n_0, \quad (14)$$

$$w = [1 + u(1 - \zeta/\zeta_0)^{-(a-1)}]^\Delta, \quad \zeta \leq \zeta_0.$$

Поведение вероятностей возникновения цепной реакции определяется вероятностями s , степенью критичности, близостью к критической точке. В зависимости от этой близости выделяется три

(точнее, четыре) основных режима поведения: подкритический и надкритический (в них законы поведения (4) и (10) отличаются только знаком), критический (11), (14), и критическая точка (12), (13). В традиционной теории ядерных реакторов исследуются только подкритический и надкритический режимы и критическая точка, хотя в общей теории фазовых переходов обязательно присутствует критическая область. Это связано с тем, что нейтроны не взаимодействуют, для них справедливы значения классических критических индексов (как для самосогласованного поля) [12]. В стационарном рабочем состоянии реакторов нейтронов много, можно их число считать бесконечно большим. Критическая область при этом стягивается в критическую точку. Отметим, что известен явный вид выражения $w(P_n)$ (2), и уравнение для P в континуальном пределе можно решить точно. Но интегралы сложные, и явно выразить функцию P сложно.

Сама критическая область имеет сложную трехчленную структуру. В [16] обнаружены три режима критического поведения YP , зависящих от знака управляющих воздействий и обратных связей, найдены границы этих режимов, показано, что в районе критической точки временное поведение степенное. Время пропорционально числу поколений, и такое поведение свойственно (11), самоподобным нерегулярным деревьям [8]. В самой критической точке общее число нейтронов пропорционально времени (12), что соответствует вырожденному дереву. Таким образом, траектории нейтронов изменяются в зависимости от вероятности s и коэффициента размножения. В подкритической (и надкритической) области движение идет по регулярным деревьям, в критической области — по самоподобным нерегулярным деревьям, в критической точке — по вырожденному дереву. Выше критической точки, но в критической области — снова по самоподобным нерегулярным деревьям. В надкритической области — снова по регулярным деревьям.

Вероятности образования иерархических уровней, распределение по иерархическим уровням и по поколениям нейтронов. Самоподобные распределения описываются степенным законом вида (11)

$$p(k) \propto k^{-\gamma} \quad (15)$$

с показателем $\gamma > 0$, где k — степень вершины дерева, которая играет роль масштаба в сложных сетях. Такого рода зависимости широко распространены в системах самой различной природы. Форма такой зависимости не изменяется при вариации масштаба переменной k ,

определяющей распределение по порядкам вершин иерархического дерева некоторого графа. Действительно, замена переменной k значением k/a , масштабированным положительной константой a , сохраняет неизменным вид распределения (15). Цепочки деления приводят к иерархической структуре, геометрическим образом которой является дерево Кейли (см. рис. 1).

В общем случае кластерная структура всех уровней определяет поведение иерархической системы, однако свойство самоподобия позволяет ограничиться заданием структуры минимального кластера и нахождением номера иерархического уровня. Иерархическое дерево является геометрическим образом ультраметрического пространства [17], и в [3] показано, что описание иерархических структур сводится к рассмотрению процесса диффузии в этом пространстве.

Эволюция сложных иерархических систем представляет аномальную диффузию по иерархическим уровням, которая приводит к стационарному распределению в форме Цаллиса (или распределения Реньи). Следуя [18], рассмотрим плотность вероятности $p_u = p_u(t)$ распределения системы по координатам ультраметрического пространства u в момент времени t . Это распределение подчиняется кинетическому уравнению [19, 20]

$$\tau \dot{p}_u = \sum_{u'} (f_{uu'} p_{u'} - f_{u'u} p_u), \quad (16)$$

где точка означает дифференцирование по времени, τ — время релаксации, $f_{uu'}$ представляет частоту переходов из u' в u . Для определения формы зависимостей от ультраметрических координат рассмотрим регулярное иерархическое дерево, которое характеризуется фиксированным показателем ветвимости $s > 1$ и переменным числом иерархических уровней $n \gg 1$. В этом случае ультраметрическая координата u представляет n -значное число в системе исчисления с основанием s : $u = u_0 u_1 \dots u_{n-1} u_n$, $u_m = 0, 1, \dots, s-1$. Интенсивность переходов может быть записана в виде степенного ряда $f_{uu'} = \sum_{m=0}^n f(u_m - u_{m'}) s^{n-m}$, где первое слагаемое ($m=0$) отвечает верхнему уровню иерархии, который определяет поведение всей системы — цепочки деления, тогда как последний член с $m=n$ отвечает низшему уровню, соответствующему наименьшим кластерам, последним ветвям цепочки. Согласно определению, расстояние между точками u и u' равно $0 \leq l \leq n$, если выполняются условия $u_m = u_{m'}$

для $m=0, 1, \dots, n-l$ и $u_m \neq u_{m'}$ для $m=n-l, n-l+1, \dots, n$ [11]. Таким образом, при фиксированном расстоянии l первые $n-l$ слагаемых указанного ряда равны нулю по определению, тогда как последние, количество которых равно l , содержат множитель s^{n-m} , значение которого при $s > 1$ намного меньше множителя s^l , являющегося первым из остальных слагаемых. В результате только слагаемое с $m=n-l$ и $f_{uu'} \sim s^l = s^{n-m}$ является значимым в рассматриваемом ряде. Подобным образом можно показать, что плотность вероятности оценивается как $p_u \sim s^{n-l} = s^m$. Для случайного дерева показатель ветвимости s становится переменным, в результате чего частота переходов $f_{uu'} \rightarrow f_{n-m}$ и плотность вероятности $p_u \rightarrow p_m$ принимают вид преобразования Меллина [20]

$$f_{n-m} \equiv \int_0^{\infty} f(s) s^{n-m} ds, \quad p_m \equiv \int_0^{\infty} p(s) s^m ds, \quad (17)$$

где $f(s)$ и $p(s)$ представляют весовые функции. Таким образом, от общих координат $u = u_0 u_1 \dots u_{n-1} u_n$, $u_m = 0, 1, \dots, s-1$ ультраметрического пространства мы переходим к координатам номера уровня, числа поколений нейтронов, которые использовались в предыдущем разделе.

В результате основное кинетическое уравнение уже для вероятности образования n -го иерархического уровня принимает вид

$$\tau \dot{p}_n = \sum_{m>n} f_{m-n} p_n - \sum_{m<n} f_{n-m} p_m, \quad (18)$$

где в отличие от выражения (16), представляющего континуальное ультраметрическое пространство, используется дискретное представление, отвечающее иерархическим деревьям типа показанных на рис. 1. Первое слагаемое правой части (18) учитывает иерархическую связь данного уровня n с нижними уровнями $m > n$, второе — с верхними $m < n$. Обращает на себя внимание тот факт, что правая часть уравнения (18) имеет знак, обратный имеющим место в обычных статистических системах [21]. Это связано с тем, что автономным системам присуще спонтанное установление иерархической связи, а не её разрушение [3].

Проводя в (18) разложение вероятности p_m в ряд по степеням разности $n-m$, в пределе $n \gg 1$ получаем

$$\tau \dot{p}_n = -D(\partial^2 p_n / \partial n^2) + D_n p_n, \quad (19)$$

где учтены низшие моменты $\sum_{m<n} (n-m) f_{n-m} = 0$ и $\sum_{m<n} (n-m)^2 f_{n-m} \equiv 2D$; оператор $D_n := \sum_{m>n} f_{m-n} - \sum_{m<n} f_{n-m}$ определяет разность интенсивностей переходов с данного уровня n на нижние и верхние уровни. Если нет иерархии, то нет и условий $m > n$, $m < n$ из (18), и оператор $D_n = 0$. В иерархических системах, интенсивности переходов существенно зависят от того, совершаются они вверх или вниз по иерархическому дереву. Используем далее предположение о форме функции D_n .

$$D_n = -dq p_n^{q-1} \partial / \partial n, \quad (20)$$

где q , d — положительные параметры. Формальной основой предположения является то, что с точностью до множителя $-d(q-1)$ интеграл $\int_n^{qn} D_n p_n^n dn$ сводится к производной Джексона

$$D_n p_n^q = \frac{p_{qn}^q - p_n^q}{q-1}, \quad (21)$$

представляющей архетип самоподобных иерархических систем [4]. В результате управляющее уравнение (19) принимает окончательный вид

$$\tau \dot{p}_n = -(\partial / \partial n) (dp_n^q + D_n (\partial p_n / \partial n)). \quad (22)$$

Стационарное решение этого уравнения записывается в форме распределения Цаллиса [7]

$$p_n = \left(p_0^{-(q-1)} + \frac{q-1}{\Delta} n \right)^{-1/q-1} p_0 \equiv \left(\frac{2-q}{\Delta} \right)^{1/2-q}, \quad \Delta \equiv D/d. \quad (23)$$

Согласно (23), с ростом номера уровня n вероятность его образования p_n спадает степенным образом от максимального значения p_0 , отвечающего верхнему уровню $n=0$.

С использованием деформированной экспоненты $\exp_q(x) = [1 + (1-q)x]_+^{1-q}$, $[y]_+ \equiv \max(y, 0)$ и эффективной энергии $\varepsilon_n = \left(\frac{2-q}{\Delta} \right)^{q-1} n$ вероятность (23) принимает каноническую форму Цаллиса

$$p_n = p_0 \exp_q \left(-\frac{\varepsilon_n}{\Delta} \right). \quad (24)$$

Согласно [22], эффективная температура Δ удовлетворяет стандартным термодинамическим соотношениям при условии, что распределение по уровням иерархического самоподобного множества определяется эскортной вероятностью

$$\mathcal{P}_i := \frac{p_i^q}{\sum_l p_l^q}, \text{ а не исходной } p_i. \text{ В [23] и [8] отмечено,}$$

что если положить $q=1/q$, то эскортное распределение Цаллиса совпадает с распределением Реньи, полученным применением принципа максимума энтропии к энтропии Реньи. В [24] показано, что энтропия Реньи служит отрицательным показателем степени конформного преобразования информационного расхождения (дивергенции). Эффективная температура Δ связана с вероятностью деления ядер c из (1).

Вероятность образования иерархического уровня и связанной с этим уровнем самоподобной цепи (цепной реакции) монотонно возрастает с уменьшением n . Расчет [8] демонстрирует, что рост дисперсии $\Delta = D/d$, определяемый отношением коэффициента диффузии D к энергии d , значительно расширяет разброс стационарной вероятности по иерархическим уровням. При $\Delta \gg 1$ распределение (23) незначительно отличается от экспоненциального на высоких уровнях $n < \Delta^{1/(2-q)}$, но с ростом n степенной хвост начинает проявляться все более существенным образом.

Сравнивая распределение (23) с распределением (14), видим, что одно является эскортным по отношению к другому при $a=0$; это распределения Цаллиса и Реньи. Как уже отмечалось, эти распределения будут совпадать при замене физического параметра деформации $Q=2-q$ на величину $2-q$, $q=1/q$. При этом дисперсия Δ распределения (23) и параметр W в выражении (14) связаны зависимостью $\Delta = 1/W$. Фрактальная размерность ультраметрического пространства в (14) выражается через параметр деформации Q :

$$D = q^{-1} - 1 = (Q-1)/(2-Q).$$

В общем случае $a \neq 0$, и указанные соотношения носят частный характер. В [18] показано, что вероятности ансамбля иерархических уровней P_n и вероятности образования каждого уровня p_n связаны выражениями так называемой деформированной (при помощи показателя q) алгебры, когда

$$\ln_q P_n = \sum_{m=0}^n \ln_q p_m,$$

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \quad P_n = p_0 \otimes_q p_q \otimes_q \dots \otimes_q p_n,$$

$$x \otimes_q y = [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}},$$

$$P_n = \exp_q \left(\frac{\sum_{m=0}^n p_m^{1-q} - (n+1)}{1-q} \right) = \left(\sum_{m=0}^n p_m^{1-q} - n \right)_+^{\frac{1}{1-q}},$$

$$P_{n-1}^{1-q} - P_n^{1-q} = 1 - p_n^{1-q}.$$

Нестационарный случай рассмотрен в [8] в автомодельном режиме, когда поведение системы определяется степенной зависимостью $n_c(t)$ характерного масштаба иерархии (например, числом поколений, при котором происходит перколяционный фазовый переход, критической точкой реактора), а распределение вероятности представляется однородной функцией $p_n(t) = n_c^{-\alpha}(t) \pi(n/n_c)$. Так как в нашем случае $n \sim t$, то в зависимости от вида $p_n(t)$ оказывается существенным именно автомодельный режим

Заключение. В работе проводится новый подход к исследованию сложных процессов в ядерном реакторе, основанный на синергетических методах, связанных с фрактальными и перколяционными способами описания сложных систем, теорией иерархического соподчинения. Новые методы исследования дают возможность обнаружить более детальные аспекты поведения реакторных систем. Их сопоставление с традиционными методами изучения нейтронно-ядерных процессов в реакторах позволит находить более тонкие аспекты поведения этих процессов, учитывать их и повышать безопасность реакторов.

Так, сложность иерархических деревьев в [25] характеризовалась силуэтом $s_l = \ln(M_l/M_{l-1})$, где M_l — число узлов на уровне l . Эти выражения даны в (4), (11), (12). В реакторе отношение M_l/M_{l-1} между числом нейтронов соседних поколений характеризует коэффициент размножения нейтронов. Для регулярных деревьев (4) $s_l = \ln \bar{V}$. В самой критической точке $M_l = M_{l-1}$, и $s_l = 0$, что соответствует одному рож-

дающемуся в каждом поколении нейтрону и картине вырожденного иерархического дерева. Для вырожденных деревьев где $s = \bar{V}$

$$s_l = \ln \left[1 + \frac{(s-1)}{1+(s-1)(n-1)} \right] \approx \frac{(s-1)}{1+(s-1)(n-1)}.$$

Эта величина стремится к нулю при $\bar{V} = 1$ или при $n \rightarrow \infty$. Для самоподобных деревьев (11) $s_l = \ln(1+1/l)^\alpha \approx \alpha/l$. Эта величина стремится к 0 при $l \rightarrow \infty$, что было отмечено в [1]. В [8] показано, что более адекватной характеристикой силуэта самоподобного дерева и коэффициента размножения нейтронов, соответствующего этой величине для размножающей реакторной системы, является производная Джексона (21).

Заметим еще, что мощным методом исследования такого рода сложных систем служит информационная геометрия вероятностных распределений [26, 27]. Рассмотренные выше распределения Реньи и Цаллиса получаются путем применения принципа максимума энтропии к энтропии Реньи вида

$$H^{(\alpha)}_R(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\int p^\alpha(x) d\mu(x) \right) \quad \text{и Цаллиса}$$

$$H^{(\alpha)}_T(p) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\int p^\alpha(x) d\mu(x) - 1 \right). \quad \text{Этим энтропиям соответствуют информационные уклонения (дивергенции) Реньи}$$

$$D^{(\alpha)}_R(p|q) = \frac{1}{\alpha-1} \log \left(\int q \left(\frac{p}{q} \right)^\alpha d\mu(x) \right)^{1/\alpha} \quad \text{и Цаллиса}$$

вида $D^{(\alpha)}_T(p|q) = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \int p^\alpha q^{1-\alpha} d\mu(x) \right)$ (p и q — распределения вероятностей). К этим величинам применима обобщенная теорема Пифагора [26, 27], к которой привязаны выражения для максимума энтропии и другие важные физические результаты, применение которых существенно для детального исследования реакторных систем.

Список использованной литературы

1. Рязанов В. В. Возможности перколяционного описания коэффициента размножения нейтронов. Ядерная энергетика и окружающая среда № 1 (5), 2015, с. 36-43.
2. Olemskoi A. I. Fractals in Condensed Matter Physics / A. I. Olemskoi ; [ed. by I. M. Khalatnikov] // Phys. Rev. - Vol. 18, Part 1. - London: Gordon and Breach, 1996. - P. 1-173.
3. Олемской А. И. Иерархическая картина супердиффузии / А. И. Олемской // Письма в ЖЭТФ. - 2000. - Т. 71. - С. 412-417.
4. Olemskoi A. I. Self-similarity degree of deformed statistical ensembles / A. I. Olemskoi, A. S. Vaylenko, I. A. Shuda // Physica A. - 2009. - Vol. 388. - P. 192938.
5. Ravasz E. Hierarchical organization in complex networks / E. Ravasz, A.-L. Barabási // Phys. Rev. E. - 2003. - Vol. 67. - P. 026112
6. Олемской А. И., Ющенко О. В. Коллективное движение активных частиц. Известия вузов. Физика 2004, №4, 101-107.
7. Gell-Mann M. Nonextensive Entropy: Interdisciplinary

- Applications / M. Gell-Mann, C. Tsallis. - Oxford: Oxford University Press, 2004. - 440 p.
8. Олемской А. И. Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория. — Москва: Кранд, 2009, 379 с.
 9. Антонова Е. С., Вирченко Ю. П. Непрерывность вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на однородных древесных графах. — Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 2010, т. 23(94), №21, с. 11-21.
 10. Stauffer D., Aharony A. Introduction to percolation theory. Taylor & Francis Inc.: 1994. 179 p.
 11. Олемской А. И., Флат А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды. — Успехи физических наук, 1993, т. 163, № 12, с. 1-50.
 12. Рязанов В. В. Фрактальные структуры и перколяция в ядерном реакторе. Problems of nuclear power plants' safety and of Chornobyl. — 2014, вып. 23, с. 13-21.
 13. Рязанов В. В. Мультифрактальность и цепные реакции. Problems of nuclear power plants' safety and of Chornobyl. — 2015, вып. 24, с. 5-15.
 14. Ryazanov V. Lifetime of statistical systems. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 252 p.
 15. Дорогов В. И., Чистяков В. П. Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988, 110 с.
 16. Бойко Р. В., Рязанов В. В. Стохастическая модель энергетического ядерного реактора. — Атомная энергия, 2002, т.93, вып.2, с.87-96.
 17. Rammal R. Ultrametricity for physicists / R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro // Rev. Mod. Phys. - 1986. - Vol. 58. - P. 765-788.
 18. Щуда И. А. Влияние иерархического строения и самоподобия на самоорганизацию сложных систем. Дисс.... докт. физ.-мат. наук. - Сумы. - 2011.
 19. von Ferber C. Complex networks / C. von Ferber, Yu. Holovatch, O. Olemskoi, T. Holovatch, O. Myrglod [et al.] // J. Phys. Stud. - 2006. - Vol. 10. - P. 247-289.
 20. Олемской О. И. Теорія самоподібних стохастичних систем. Частина I // О. И. Олемской, Д. О. Храченко // ЖФД. - 2002. - Т. 6. - С. 253-288.
 21. Risken H. The Fokker-Planck Equation / H. Risken. - Berlin: Springer-Verlag, 1984. - 454 p.
 22. Tsallis C. The role of constraints within generalized nonextensive statistics / C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino // Physica A. - 1998. - Vol. 261. - P. 534-554.
 23. Башкиров А. Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем. Теоретическая и математическая физика. Том 149, № 2, 2006, с. 299-317.
 24. Shun'ichi Amari, Atsumi Ohara, Hiroshi Matsuzoe. Geometry of deformed exponential families: Invariant, dually-flat and conformal geometries. Physica A 391 2012 4308-4319.
 25. Олемской А. И. Сложность самоподобных иерархически соподчиненных ансамблей Письма в ЖЭТФ, 2007, 85, 137-140.
 26. Chentsov N. Statistical Decision Rules and Optimal Inference (in Russian). Moscow, U.S.S.R.: Nauka, 1972. English translation: Providence, RI: AMS, 1982.
 27. Shun'ichi Amari, Hiroshi Nagaoka. Methods of information geometry, Translations of mathematical monographs; v. 191, American Mathematical Society, 2000

Получено 2.10.2015