

Л.Б. Лерман

СЛОИСТО–НЕОДНОРОДНЫЕ ОБЪЕКТЫ С ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА. ПРИМЕНЕНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ В НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

*Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко Национальной академии наук Украины
ул. Генерала Наумова, 17, Киев, 03164, Украина, E-mail: llerman@yandex.ru*

Исследуются неоднородные объекты: слоисто–неоднородные наночастицы и слоистые неограниченные среды. Приводится общая схема построения трансляционных матриц. С их применением решены задачи рассеяния электромагнитных волн на многослойных эллипсоидальных наночастицах (в электростатическом приближении), сферических частицах (в электростатическом и волновом приближении), найдены выражения для вычисления электрической энергии в слоях. Построено решение задачи на собственные значения для плоскостойкого тела, получены расчетные соотношения для определения собственных частот колебаний слоистой плиты с использованием уравнений трехмерной теории упругости. Приведены основные расчетные формулы и иллюстративный материал.

Ключевые слова: слоисто-неоднородные среды, наночастицы, трансляционные матрицы, электромагнитная энергия, теплопроводность, свободные колебания

ВВЕДЕНИЕ

Среди множества тем, которые особенно привлекают внимание физиков и математиков, инженеров–конструкторов и технологов, одно из главных мест занимают слоисто–неоднородные тела ограниченных размеров, многослойные конструкции, а также условно неограниченные неоднородные среды.

В природе практически не существует объектов, которые можно назвать полностью пространственно однородными, даже если отвлечься от атомарной структуры вещества. Неоднородности могут иметь различный характер, и тогда, в общем случае, приходится привлекать теории дисперсных сред (ДС) или гетерогенных систем (ГС) [1–10], теория расчета которых к настоящему времени разработана далеко не полностью. Слоисто–неоднородные среды и слоисто–неоднородные частицы, являющиеся частным случаем таких систем, гораздо проще поддаются экспериментальным исследованиям и теоретическому анализу [10, 11]. В данном случае можно считать, что исследователю известна (хотя бы ориентировочно) структура объекта, физические характеристики каждого слоя, условия взаимодействия слоев между собой и внешних поверхностей с окружающей

средой. Примерами таких объектов могут служить строительные, звукоизолирующие, радиопрозрачные и радиопоглощающие конструкции, диэлектрические линзы, структурно–неоднородные наночастицы, биологические клетки, бактерии и многие другие [11–25]. Общей их чертой является наличие поверхностей, которые разделяют слои с различными физическими характеристиками. Для решения соответствующих задач, в частности, нахождения характеристик распространения волн в слоистых средах используются различные методы: импедансный [16, 17], метод четырехполосников [25], метод трансляционных матриц (МТМ) [26, 27], методы конечных разностей (МКР) [28] или конечных элементов (МКЭ) [29–30] и некоторые другие [31].

В общем случае необходимо рассматривать прямые и обратные задачи [32–43]. Прямая задача состоит в том, как по заданному внешнему воздействию найти отклик объекта. Обратная задача состоит в определении структуры и физических параметров объекта при известных зависимостях внешних воздействиях и типа отклика [41–43].

В настоящей статье рассматриваются прямые задачи, и основное внимание уделяется применению МТМ. С этой целью излагается

общий алгоритм построения трансляционных матриц, основанный на сведениях уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В дополнение к известным результатам трансляционные матрицы построены для неоднородных дифференциальных уравнений, т.е. для физических систем с внутренними источниками. В последующих разделах приводятся решения конкретных прикладных задач электродинамики и, в частности, задач для частиц, составленных из конфокальных эллипсоидов и сферических частиц, состоящих из concentрических сфер. Для радиально-неоднородного шара решения получены как в электростатическом, так и в волновом приближении, и при этом показана возможность учета диэлектрической анизотропии. Приведены необходимые расчетные формулы и некоторые результаты расчетов для нахождения электромагнитной энергии, которая выделяется в слоях слоисто-неоднородных частиц при ее взаимодействии с электромагнитным излучением (ЭМИ). Построено решение задачи на собственные значения для слоистого тела и найдены собственные функции, позволяющие строить решения нестационарных задач. Построен алгоритм определения собственных частот колебаний слоистой плиты в модели трехмерной анизотропной теории упругости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ

Наиболее полно на примере систем обыкновенных дифференциальных уравнений идеология МТМ изложена в [26, 27], причем в [26] рассмотрены различные возможные связи между элементами составной системы, в том числе и нелинейные модели. В настоящей работе рассматриваются объекты, описываемые уравнениями в частных производных. Применение методов разделения переменных [44, 45] или конечных интегральных преобразований [47–49] приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, что и позволяет воспользоваться известными схемами МТМ.

Общая постановка задачи. Рассмотрим слоистое тело, отнесенное к системе криволинейных координат α, β, γ , где α, β – гауссовы координаты в срединных

поверхностях слоев, а γ – координата, направленная по нормали к граничной поверхности первого слоя (рис. 1).

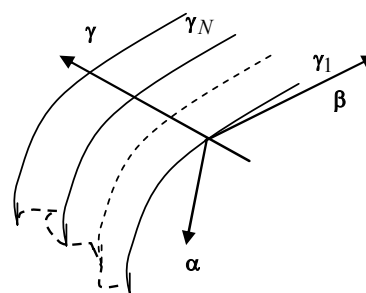


Рис. 1. Расчетная схема слоистого тела

Объект может быть замкнутым (например, конфокальный эллипсоид), ограниченный координатными поверхностями $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, или иметь бесконечную протяженность по этим координатам, когда третья координата изменяется в интервале $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_N$, $\gamma_1, \gamma_N < \infty$. Поверхности $\gamma_j = \text{const}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) задают поверхности, разделяющие слои трехмерного N -слоистого объекта. Каждый слой характеризуется своим набором физических характеристик, а физические поля в каждом из них описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathbf{M}_j u_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

где \mathbf{M}_j – матричный дифференциальный оператор, квадратная матрица которого имеет размерность $k \times k$, $k \geq 2$; $u_j = u_j(\alpha, \beta, \gamma)$, $f_j = f_j(\alpha, \beta, \gamma)$ – k -мерные векторные функции.

Задача рассматривается в линейной постановке. Операторы \mathbf{M}_j однотипны и отличаются друг от друга только коэффициентами в уравнениях, которые зависят от характеристик слоев. Предполагается, что системы (1) допускают разделение переменных. Зададим полную систему ортогональных функций $\Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta)$, которые на границах $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ удовлетворяют определенным граничным условиям. Такую систему можно построить, например, решив соответствующую задачу Штурма-Лиувилля [44–49]. Незвестные функции, правые части и граничные условия представляются в виде рядов

$$u_j = \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}^{(j)}(\gamma) \Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta), f_j = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}^{(j)}(\gamma) \Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Функции $\Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta)$ считаются известными, а функции $U_{mn}^{(j)} = U_{mn}^{(j)}(\gamma)$ подлежат определению. На поверхностях раздела слоев необходимо задать дополнительные условия «сопряжения», которые в рамках различных физических моделей могут задаваться различным образом. Наиболее часто используются условия непрерывности функций и их производных (с некоторыми коэффициентами) при переходе через поверхности раздела слоев. На поверхностях $\gamma = \gamma_1, \gamma = \gamma_N$ граничные условия могут быть заданы либо непосредственно, либо, как в случае неограниченных сред вне рассматриваемого объекта, как условия, описывающие взаимодействие с этими средами. Эти условия для конкретных физических задач будут выписаны ниже.

После подстановки рядов (2) в (1) приходим к совокупности систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{L}_{mn}^{(j)} U_{mn}^{(j)}(\gamma) = f_{mn}^{(j)}(\gamma) + G_{mn}^{(j)}, \quad \gamma_j < \gamma < \gamma_{j+1}, j=1, 2, \dots, N-1; m, n=0, 1, \dots, \infty, \quad (3)$$

где $\mathbf{L}_{mn}^{(j)}$ – матричный дифференциальный оператор, получающийся из оператора \mathbf{M}_j после разделения переменных. К системе (3) присоединяются определенные граничные условия. Слагаемые $G_{mn}^{(j)}$ могут появляться при использовании метода конечных интегральных преобразований в случае неоднородных граничных условий.

Построение трансляционных матриц для однородных уравнений. Рассмотрим однородные системы уравнений. Индексы mn в дальнейшем для краткости опускаем и вводим обозначения $\mathbf{L}_j = \mathbf{L}_{mn}^{(j)}, U_{mn}^{(j)}(\gamma) = U_j(\gamma)$ соответствующие системам (3):

$$\mathbf{L}_j U_j(\gamma) = 0, \quad \gamma_j < \gamma < \gamma_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, N-1. \quad (4)$$

Общее решение систем (4) для каждого слоя можно записать в виде

$$U_j(\gamma) = S_j(\gamma) \xi_j, \quad (5)$$

где $S_j(\gamma)$ – матрицы фундаментальных решений [47] систем (4), которые считаются известными, ξ_j – векторы произвольных постоянных.

При построении трансляционных матриц в рассмотрение вводятся функциональные матрицы $S_{0,j}(\gamma), S_{1,j}(\gamma)$. Для матрицы $S_{0,j}(\gamma)$ аргумент γ изменяется в пределах j -го слоя, т.е. в промежутках $\gamma_{j-1} \leq \gamma \leq \gamma_j$, а для матрицы $S_{1,j}(\gamma)$ – в пределах $(j+1)$ -го слоя, т.е. в промежутках $\gamma_j \leq \gamma \leq \gamma_{j+1}$. Индекс j принимает значения от 1 до $N-1$. Обозначим значения этих матриц (числовые матрицы) на поверхностях раздела γ_j через S_j^0, S_j^1 , т.е.

$$S_j^0 = S_{0,j}(\gamma_j), \quad S_j^1 = S_{1,j}(\gamma_j), \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Условие сопряжения внутренних слоев записывается в матричном виде

$$S_j^0 \xi_j = S_{j+1}^1 \xi_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, N-1. \quad (7)$$

Решая матричное уравнение (7) относительно ξ_{j+1} , можно получить соотношение, которое связывает произвольные постоянные соседних слоев

$$\xi_{j+1} = [S_{j+1}^1]^{-1} S_j^0 \xi_j = T_j \xi_j, \quad (8)$$

где $[S_{j+1}^1]^{-1}$ – обратная матрица, $T_j = [S_{j+1}^1]^{-1} S_j^0$ – матрица, получившая название матрицы перехода через j -ю поверхность раздела. Повторяя процедуру, можно записать

$$\xi_{j+2} = T_{j+1} \xi_{j+1} = T_{j+1} T_j \xi_j, \quad (9)$$

и для $(j+1)$ -го слоя

$$\xi_{j+1} = T(\gamma_j, \gamma_{j+1}) \xi_j, \quad (10)$$

где использовано обозначение

$$T(\gamma_j, \gamma_{j+l-1}) = T_{j+l-1} \cdot T_{j+l-2} \cdot \dots \cdot T_j.$$

Матрица $T(\gamma_j, \gamma_{j+k-1})$ называется матрицей перехода от j -го к $(j+l)$ -му слою. Эти преобразования показывают, что для каждого члена разложений (2) будет такое же количество независимых произвольных постоянных, как и в случае однослойного тела. Принимая $j=1$, $j+l=N$, находим связь между произвольными постоянными первого и последнего N -го слоя

$$T(\gamma_N, \gamma_1) = \prod_{j=1}^{N-1} T_{N-j}. \quad (11)$$

Полученные матрицы называют трансляционными (transfer matrix) [26, 27].

В результате применения трансляционных матриц для нахождения произвольных постоянных получается алгебраическая система того же порядка, как и для сплошного однослойного тела, в чем, собственно говоря, и состоит преимущество МТМ. Далее, как обычно, остается решить соответствующую алгебраическую систему, найти основные произвольные постоянные, после чего с помощью матриц перехода определить произвольные постоянные в слоях.

Построение трансляционных матриц для неоднородных уравнений. Будем считать, что решение однородной системы уравнений $\mathbf{A}_j(\gamma)$, полученное при определенных граничных условиях для слоистого тела, построено. Остается найти решение неоднородной системы (3). Это можно сделать различными способами, например, методом вариации произвольных постоянных для каждого слоя или с использованием матрицы Грина [47, 48]. Возможно и другое представление решений [47]. Альтернативный подход состоит в использовании метода конечных интегральных преобразований, который на примере задач теплопроводности для слоистых тел канонической формы изложен в [49]. Будем исходить из системы (3), для которой принимается, что слагаемые $G_{mn}^{(j)}$ отсутствуют:

$$\mathcal{L}_{mn}^{(j)} U_{mn}^{(j)}(\gamma) = f_{mn}^{(j)}(\gamma), \quad j=1, 2, \dots, N; m, n=0, 1, \dots, \infty, \quad (12)$$

где $f_{mn}^{(j)}(\gamma)$ – известные коэффициенты разложений функций внутренних источников.

Для каждого слоя общее решение системы (12) есть сумма общего $S_{mn}^{(j)}(\gamma)\xi_{mn}^{(j)}$ и частного $v_{lm}^{(j)}(\gamma)$ решений. Решения неоднородных уравнений (12) запишутся в виде

$$U_{mn}^{(j)}(\gamma) = S_{mn}^{(j)}(\gamma)\xi_{mn}^{(j)} + v_{lm}^{(j)}(\gamma). \quad (13)$$

Следует иметь в виду, что в равенстве (13) $\xi_{mn}^{(j)}, v_{lm}^{(j)}(\gamma)$ – это векторы размерности k . Как и для однородных систем, рассматриваем матрицы фундаментальных решений $S_{mn,0,j}(\gamma)$, $\gamma_{j-1} < \gamma < \gamma_j$, $S_{mn,1,j}(\gamma)$, $\gamma_j < \gamma < \gamma_{j+1}$ для однородных уравнений и вводим числовые матрицы

$$S_{mn,0,j}^0 = S_{mn,0,j}(\gamma_j), \quad S_{mn,j}^1 = S_{mn,1,j}(\gamma_j), \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Условия сопряжения в данном случае принимают вид

$$S_{mn,j}^0 \xi_{mn}^{(j)} + v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) = S_{mn,j}^1 \xi_{mn}^{(j+1)} + v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j), \quad j=1, 2, \dots, N-1. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(j+1)} &= \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} S_{mn,j}^0 \xi_{mn}^{(j)} + \\ &+ \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right] = \\ &= T_{mn}^{(j)} \xi_{mn}^{(j)} + \left[S_{mn,j}^{(1)} \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

в которых матрицы $T_{mn}^{(j)}$ связывают произвольные постоянные в представлении решений при переходе через j -ю поверхность раздела в граничащих слоях

$$T_{mn}^{(j)} = \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} S_{mn,j}^0, \quad T_{mn}^{(j)} = \begin{bmatrix} t_{11,mn}^{(j)} & t_{12,mn}^{(j)} \\ t_{21,mn}^{(j)} & t_{22,mn}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Полагая в (16) $j = j + 1$, получим

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(j+2)} &= T_{mn}^{(j+1)} \xi_{mn}^{(j+1)} + \\ &+ \left[S_{mn,j+1}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j+1)}(\xi_{j+1}) - v_{lm}^{(j+2)}(\xi_{j+1}) \right], \end{aligned}$$

а с учетом выражения (16)

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(j+2)} &= T_{mn}(\gamma_j, \gamma_{j+1}) \xi_{mn}^{(j)} + \\ &+ T_{mn}^{(j+1)} \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right] + \\ &+ \left[S_{mn,j+1}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j+1)}(\xi_{j+1}) - v_{lm}^{(j+2)}(\xi_{j+1}) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где $T_{mn}(\gamma_j, \gamma_{j+1}) = T_{mn}^{(j+1)} \cdot T_{mn}^{(j)}$ – матрица перехода от j -го к $(j+1)$ -му слою через j -ю поверхность раздела. Повторяя эту процедуру, при переходе от первой к N -й поверхности раздела получим

$$\xi_{mn}^{(N)} = T_{mn}(\gamma_N, \gamma_1) \xi_{mn}^{(1)} + Q_{mn}, \quad (19)$$

где

$$T_{mn}(\gamma_N, \gamma_1) = \prod_{j=1}^{N-1} T_{mn}^{(N-j)} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(mn)} & t_{12}^{(mn)} \\ t_{21}^{(mn)} & t_{22}^{(mn)} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Q_{mn} &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ T_{mn}^{(j+1)} \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right] + \right. \\ &\left. + \left[S_{mn,j+1}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j+1)}(\xi_{j+1}) - v_{lm}^{(j+2)}(\xi_{j+1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, трансляционные матрицы для неоднородных систем построены. Ее элементы находятся перемножением матриц перехода и суммированием частных решений по формулам (21). Имея выражение (21) и условия на внешней поверхности, получаем систему для нахождения основных неизвестных произвольных постоянных, через которые выражаются произвольные постоянные для каждого слоя.

ПРИМЕНЕНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛАЗМОНИКИ. СЛОИСТЫЕ ЭЛЛИпсоИД И ШАР В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Классификация и характеристики современных направлений нанотехнологий представлена в работах [50–53]. В начале 2000-х годов, благодаря значительному прогрессу в технологии изготовления наночастиц, был дан толчок к развитию новой области нанотехнологий, которая получила название плазмоники (наноплазмоники). Плазмоника изучает наноструктуры, которые поддерживают существование поверхностных плазмонов и поверхностных плазмонных резонансов (ППР). Современный интерес к металлическим наночастицам связан с оптическими резонансами в видимой части диапазона электромагнитных волн (ЭМВ) [2, 54]. Спектральное положение этих резонансов зависит от геометрических параметров и физических характеристик частиц [55–57]. Возможность управления плазмонными резонансами очень привлекательна для практического использования. Теоретический анализ показывает, что ППР наночастиц из благородных металлов можно сдвигать от ультрафиолетового и видимого участков спектра ЭМВ до инфракрасного диапазона путем изменения таких параметров как размер, форма и структура наночастиц, показатель преломления (ДП) окружающей среды [55–57] и композиции металлических наночастиц [58, 59]. Некоторые из этих вопросов рассмотрены в монографии [60] и диссертациях [61, 62].

Настоящий раздел посвящен применению МТМ к некоторым задачам плазмоники и основывается, в основном, на результатах работ [1–3, 10, 11, 22, 23, 40, 63, 64, 69–84]. Общая схема построения трансляционных матриц конкретизируется для радиально-неоднородных сферических частиц и малых частиц, составленных из конфокальных эллипсоидов. Для сферических частиц задача решена в электростатическом и волновом приближениях, а также с учетом анизотропии диэлектрических характеристик слоев. В таких частицах возникают дополнительные ППР [57, 58], количество которых определяется числом поверхностей раздела и формой частиц. Так,

например, для сплошного эллипсоида общего вида (с тремя различными полуосями) расчет указывает на три максимума поглощения, а для эллипсоида в оболочке – на шесть. Для сферической частицы число таких экстремумов сокращается до одного и двух соответственно. Это позволяет управлять сдвигом экстремумов в спектрах поглощения и экстинкции и проектировать новые типы наноструктур и метаматериалов. Для анализа таких объектов при большом числе слоев раздела МТМ оказывается особенно удобным в тех случаях, когда основной задачей является определение отклика частицы на внешнее возбуждение и не возникает необходимости исследования физических полей в слоях.

Эллипсоидальные частицы. Рассмотрены малые частицы (наночастицы), образованные n конфокальными эллипсоидами (рис. 2). Диэлектрические проницаемости (ДП), точнее диэлектрические функции, слоев $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\omega)$ считаются комплексными и зависящими от частоты ω , а для окружающей среды ДП $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_m$ – принимается действительной. Задача состоит в нахождении характеристик взаимодействия частицы с электромагнитным излучением (светом): сечений рассеяния C_{sca} , поглощения C_{abs} и экстинкции C_{ext} или их эффективностей Q_{sca} , Q_{abs} , Q_{ext} . Эффективностей (или факторы эффективности) оптических характеристик определяются соотношениями [2]

$$Q_{ext} = C_{ext} / F, \quad Q_{sca} = C_{sca} / F, \quad Q_{abs} = C_{abs} / F,$$

где F – площадь проекции частицы на плоскость (для шара радиуса a , площадь $F = \pi a^2$), перпендикулярную направлению распространения волны. Сечения оптических характеристик имеют размерность площади, а их эффективности – это безразмерные величины. В электростатическом приближении они выражаются через поляризуемость частицы α , а в волновом – через коэффициенты ряда рассеяния [2, 85].

Обозначим полуоси эллипсоидов $a_j > b_j > c_j$, где j – номер слоя ($j = 1, 2, \dots, n$), и нумерация начинается с внутреннего сплошного эллипсоида (ядра). Задача решается в эллипсоидальных координатах ξ, η, ζ [2, 48],

связанных с геометрическим центром частицы. Уравнение поверхности внутреннего эллипсоида задается координатой $\xi = \xi_1 = 0$. При этом полуоси связаны с координатами ξ_j соотношениями

$$\xi_j = a_j^2 - a_1^2 = b_j^2 - b_1^2 = c_j^2 - c_1^2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

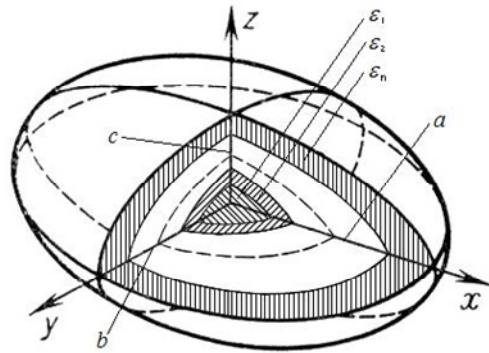


Рис. 2. Слоистая частица, образованная конфокальными эллипсоидами

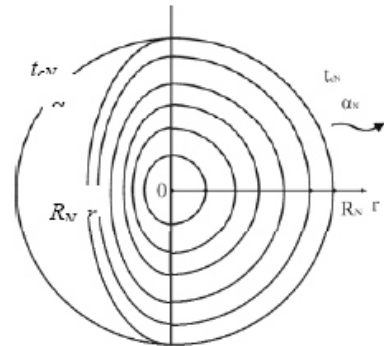


Рис. 3. Слоистая частица, образованная концентрическими сферами

Внешнее поле с потенциалом Φ_0 считается однородным и направленным вдоль оси z . Все потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta\Phi_j = 0$, которое необходимо записать в эллиптических координатах. Потенциалы в начале координат и на бесконечности внешней среды должны быть ограничены, а на поверхностях раздела слоев $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) имеют место условия

$$\Phi_j = \Phi_{j+1}, \quad \varepsilon_j \partial\Phi_j / \partial\xi = \varepsilon_{j+1} \partial\Phi_{j+1} / \partial\xi, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (22)$$

В области, окружающей частицу при $\xi \geq \xi_n$ следует положить

$$\Phi_{n+1} = \Phi_0 + \Phi_p,$$

$$\partial\Phi_{n+1} / \partial\xi = \partial\Phi_0 / \partial\xi + \partial\Phi_p / \partial\xi,$$

где Φ_p – возмущенный потенциал, возникающий за счет присутствия частицы, и тогда при $\xi = \xi_n$ имеют место граничные условия

$$\Phi_n = \Phi_0 + \Phi_p,$$

$$\varepsilon_n \partial\Phi_n / \partial\xi = \varepsilon_m \partial\Phi_0 / \partial\xi + \varepsilon_m \partial\Phi_p / \partial\xi \quad (23)$$

В результате решения задачи электростатики найдена матрица [51, 52] T_j при переходе через j -ю поверхность раздела

$$T_j = \frac{1}{\Delta_j} \begin{bmatrix} 1 + L_3^{(j)} \left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} - 1 \right) & L_3^{(j)} (1 - L_3^{(j)}) \left(1 - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} \right) \\ \frac{v_j}{v_{j+1}} \left(1 - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} \right) & \frac{v_j}{v_{j+1}} \left[1 + L_3^{(j)} \left(1 - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} \right) \right] \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где Δ_j – определитель матрицы S_j , используемый при построении обратной матрицы, $L_3^{(j)}$ – фактор деполаризации [2], v_j – относительный объем эллипсоида, ограниченного j -й поверхностью раздела.

Трансляционная матрица имеет вид

$$T = T_n(\xi_n, \xi_1) = \prod_{j=1}^{n-1} T_{n-j}, \quad T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Следует отметить, что элементы матрицы будут комплексными, а в расчетах используются только элементы первого столбца.

Для нахождения поляризуемости слоистого эллипсоида получено выражение [63]

Элементы матриц перехода от слоя к слою $T_l^{(j)}$ для каждого l имеют вид

$$\alpha_3 = \frac{4\pi}{3} (a_n b_n c_n)^\times \times \frac{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)(a_n b_n c_n) t_{11} + 2(\varepsilon_n - \varepsilon_m)(L_3^{(n)} - \varepsilon_n) t_{21}}{[(\varepsilon_n - \varepsilon_m)L_3^{(n)} + \varepsilon_m](a_n b_n c_n) t_{11} + 2(\varepsilon_n - \varepsilon_m)L_3^{(n)}(L_3^{(n)} - 1) t_{21}}. \quad (26)$$

В случае системы невзаимодействующих между собой, случайно ориентированных в пространстве эллипсоидов, эффективности характеристик светорассеяния в соответствии с [2] в электростатическом приближении можно найти по формулам

$$\langle Q_{abs} \rangle = \frac{k}{3\pi a^2} \text{Im}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

$$\langle Q_{sca} \rangle = \frac{k^4}{(18\pi)\pi a^2} (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2), \quad (27)$$

де α_i ($i = 1, 2, 3$) – поляризуемости эллипсоида в направлении главных осей.

Слоистый шар с диэлектрически–изотропными слоями. Далее рассмотрим слоистый шар (см. рис. 3). Следует отметить, что шар является частным случаем эллипсоида, когда все полуоси равны, т.е. $a = b = c = R$. Поэтому результаты можно получить, используя расчетные формулы для эллипсоида. Однако удобнее использовать формулы для шара непосредственно, как это сделано в [65, 66]. В сферических координатах r, θ, φ разложения потенциалов в слоях имеют вид

$$u_j(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l-1} \left[A_{lm}^{(j)} (r/a)^l + B_{lm}^{(j)} (a/r)^{l+1} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$j = 2, 3, \dots, n, \quad (28)$$

где $a = r_n$ – внешний радиус шара, $Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}$ – сферические функции, $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра. Для ядра шара следует принять $B_{lm}^{(1)} = 0$.

$$T_j^{(l)} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(l)} & t_{12}^{(l)} \\ t_{21}^{(l)} & t_{22}^{(l)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_l^{(j)}} \begin{bmatrix} -\varepsilon_{j+1}(l+1)(a/r_j)^2 - \varepsilon_j l (a/r_j)^2 & -\varepsilon_{j+1}(l+1)(a/r_j)^{2l+3} - \varepsilon_j(l+1)(a/r_j)^{2l+3} \\ -\varepsilon_{j+1}l(a/r_j)^{2l-1} + \varepsilon_j l (a/r_j)^{2l-1} & -\varepsilon_{j+1}l(a/r_j)^2 + \varepsilon_j(l+1)(a/r_j)^2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Уместно отметить, что определитель $\Delta_l^{(j)} = -\varepsilon_{j+1}(2l+1)(a/r_j)^2$ с точностью до множителя ε_{j+1} – это определитель Вронского фундаментальных решений, который вычислен на границах раздела слоев, и поэтому не может обращаться в нуль. Трансляционная матрица находится по формулам (11), (25).

Примеры расчетов. Приведем некоторые результаты, полученные для постоянного поля, действующего вдоль оси z . Сначала рассмотрим биметаллические наночастицы с серебряным ядром и золотой оболочкой с различными размерами ядра и оболочки. Спектральная зависимость эффективности поглощения от объемной доли v , которую составляет серебряное ядро в частице, показана на рис. 4. Расчеты выполнены для частицы с внешним радиусом $r_2 = 10$ нм, который при расчетах сохранялся постоянным, а изменялся только радиус ядра r_1 . Для описания ДП ядра и оболочки в данном примере использована модель Друде [2] $\varepsilon_j = \varepsilon_{j,\infty} - \omega_{j,p}^2 / (\omega^2 + i\omega\gamma_{j,p})$, $j = 1, 2$, где $\omega_{j,p}$ – плазменная частота сплошного материала, $\gamma_{j,p}$ – частота поглощения. В классической модели Друде считается, что $\varepsilon_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = 1$. Более точная аппроксимация экспериментальных данных получается, если принять для серебра $\varepsilon_{1,\infty} = 4.5$ и для золота $\varepsilon_{2,\infty} = 10.0$ [82]. При этом предполагалось, что частицы помещены в воду (в оптическом диапазоне $\varepsilon_m = 1.77$). Возможно также использование экспериментальных зависимостей ДП для сплошного материала, приведенных в работах [67, 68], как это сделано при рассмотрении некоторых примеров в [3, 10]. Так как данные для сплошных материалов приведены в [67, 68] в виде таблиц, то для получения непрерывных

зависимостей используется сплайн-аппроксимация. Дополнительно для малых частиц вводится размерная поправка, как, например, это сделано в [40].

Из графиков следует, что начальная длина волны $\lambda_{1,p} = 366$ нм поверхностного плазмона сплошной серебряной частицы при увеличении размеров оболочки расщепляется на две и стремится к длине волны $\lambda_{2,p} = 506$ нм поверхностного плазмона сплошной золотой частицы.

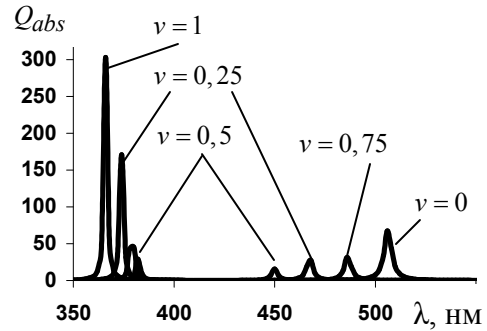


Рис. 4. Спектры эффективности поглощения биметаллической сферической наночастицы для разных значений объемного соотношения серебряного ядра и золотой оболочки

Также рассмотрены двухслойные сферические и эллипсоидальные частицы, которые состоят из стекла и серебра. Принято, что частицы размещены в воздухе. Характеристики серебра те же, что и выше, а для стекла $\varepsilon' = 2.25$ и $\varepsilon'' = 0$ не зависят от частоты. При расчетах для эллипсоидальной частицы принято, что полуоси ядра $a_1 = 19.500$ нм, $b_1 = 13.000$ нм, $c_1 = 6.500$ нм, а полуоси внешней наноболочки $a_2 = 20.928$ нм, $b_2 = 15.058$ нм, $c_2 = 10.000$ нм. Геометрические факторы для этих значений полуосей частицы, вычисленные с помощью численного интегрирования несобственных интегралов методом Гаусса, составили: $L_1^{(1)} = 0.1563$,

$L_2^{(1)}=0.2671$, $L_3^{(1)}=0.5760$, $L_1^{(2)}=0.2021$, $L_2^{(2)}=0.3080$, $L_3^{(2)}=0.4894$, где верхний индекс 1 соответствует ядру, а верхний индекс 2 – внешней оболочке. Размеры выбраны таким образом, что объемы ядра и оболочки приблизительно равны. При этом радиус шара равного объема $R=14.7$ нм при радиусе сферического ядра 11.7 нм.

Расчеты выполнены в диапазоне 300–700 нм. При этом характеристики прохождения электромагнитного излучения (эффективности поглощения и рассеяния) отнесены к площади большого круга эквивалентного шара. Результаты представлены на рис. 5–7, и поглощение на графиках уменьшено в 10 раз.

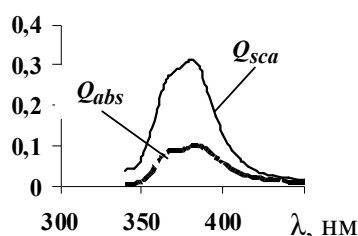


Рис. 5. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для двухслойного шара (серебряное ядро)

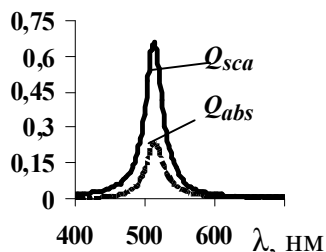


Рис. 6. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для двухслойного шара (серебряная оболочка)

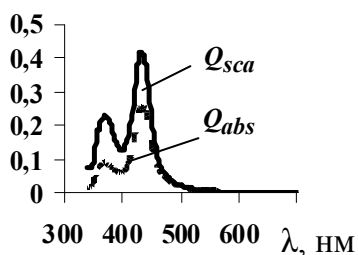


Рис. 7. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для серебряного эллипсоидального ядра

На рис. 8, 9 приведены спектры для эллипсоидальной частицы в оболочке с параметрами, указанными выше. Рассмотрены два случая: серебряное ядро – стеклянная оболочка и, наоборот, стеклянное ядро – серебряная оболочка.

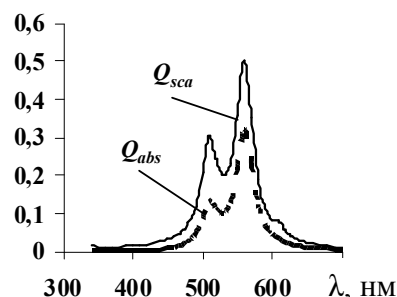


Рис. 8. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для двухслойного эллипсоида (серебряная оболочка)

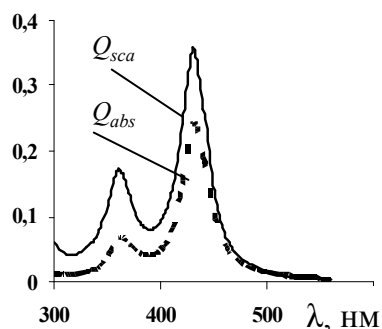


Рис. 9. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для двухслойного эллипсоида (серебро внутри частицы)

Также были рассмотрены наночастицы из стекла и алюминия. Для алюминия константы в формуле Друде в соответствии с [2] находятся из равенств $\hbar\gamma_p = 15$ эВ, $\gamma_p\hbar = 0.6$ эВ (\hbar – редуцированная постоянная Планка).

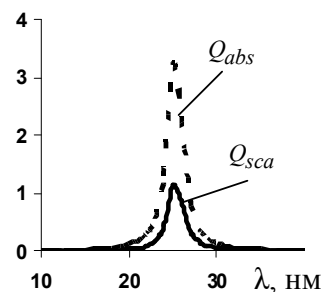


Рис. 10. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для сплошного алюминиевого шара

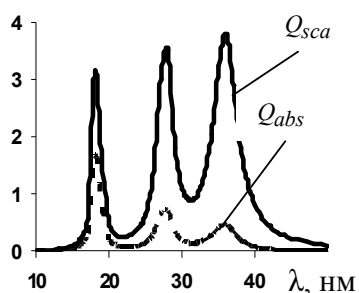


Рис. 11. Зависимости эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для сплошного алюминиевого эллипсоида

Некоторые результаты расчетов для шара и эллипсоида с ядром из алюминия приведены на рис. 10–13: на рис. 10, 11 для сплошных частиц, а на рис. 12, 13 – для частиц с оболочкой. При этом размеры частиц уменьшены в десять раз по сравнению с данными, использованными в предыдущих примерах.

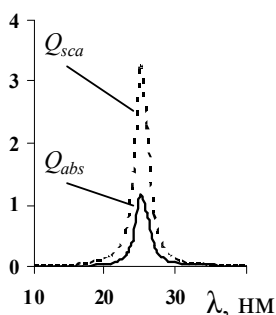


Рис. 12. Зависимость эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для двухслойного шара с алюминиевым ядром

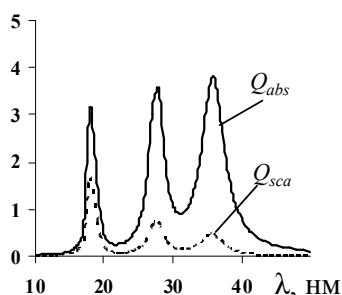


Рис. 13. Зависимость эффективности поглощения и рассеяния от длины волны для двухслойного эллипсоида с алюминиевым ядром

Из приведенных результатов следует, что спектры поглощения и рассеяния для шара и эллипсоида принципиально отличаются. Так, для сферических частиц имеем одну резонансную длину волны, соответствующую максимуму поглощения, в то время как для

эллипсоидов наблюдается несколько экстремумов. Для эллипсоидов общего вида резонансных частот должно быть три, что и наблюдается для частиц из алюминия.

Для серебряных частиц имеем только две частоты, и это объясняется тем, что третий экстремум не попадает в рассмотренный диапазон длин волн (в расчетах для серебра использована формула Друде с уточненным значением ϵ_∞ и введена размерная поправка [40]). Присутствие диэлектрической оболочки, в данном случае полностью в соответствии с теоретическим анализом, выполненным в [69, 70], не дает дополнительных максимумов.

Слоисто–неоднородный шар с диэлектрически анизотропными слоями. Приведенные выше результаты просто обобщаются на слоистые шары, для которых ДП слоев различна в нормальном и тангенциальном направлениях, т.е. в случае трансверсальной анизотропии ДП. В этом случае вместо уравнения Лапласа будем иметь

$$\operatorname{div}(\epsilon_j \operatorname{grad} u_j) = 0 \Leftrightarrow \epsilon_r^{(j)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial u_j}{\partial \rho} \right] + \epsilon_t^{(j)} \left\{ \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} \right\} = 0, \quad (30)$$

где $\epsilon_r^{(j)}$, $\epsilon_t^{(j)}$ – ДП j -го слоя в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно, и введена безразмерная координата $\rho = r/a$ (a – внешний радиус шара).

Приведем основные расчетные формулы, полученные в [66]. Решения представлены в виде разложений по сферическим гармоникам

$$u_j(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_{lm}^{(j)}(\rho) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (31)$$

После разделения переменных получено семейство независимых дифференциальных уравнений вида

$$\rho^2 \frac{d^2 U_{lm}^{(j)}(\rho)}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dU_{lm}^{(j)}(\rho)}{d\rho} - \xi_j l(l+1) U_{lm}^{(j)}(\rho) = 0, \quad (32)$$

где отношение $\xi_j = \epsilon_t^{(j)} / \epsilon_r^{(j)}$ определяет степень диэлектрической анизотропии материала.

Заметим, что в случае более общей анизотропии переменные в уравнениях не разделяются. Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$U_{lm}^{(j)}(\rho) = A_{lm}^{(j)} \rho^{v_{1l}^{(j)}} + B_{lm}^{(j)} \rho^{v_{2l}^{(j)}}, \quad (33)$$

где

$$v_{1l}^{(j)} = -1/2 + \sqrt{1/4 + \xi_j l(l+1)},$$

$$T_l^{(j)} = \frac{1}{\Delta_l^{(j)}} \begin{bmatrix} [\varepsilon_{j+1} v_{2l}^{(j+1)} - \varepsilon_j v_{1l}^{(j)}] \rho_j^{[v_{1l}^{(j)} + v_{2l}^{(j+1)} - 1]} \\ [-\varepsilon_{j+1} v_{1l}^{(j+1)} + \varepsilon_j v_{2l}^{(j)}] \rho_j^{v_{1l}^{(j)} + v_{1l}^{(j+1)} - 1} \end{bmatrix}$$

где $\Delta_l^{(j)} = \varepsilon_{j+1}(v_{2l}^{(j+1)} - v_{1l}^{(j+1)}) / \rho_j^2$.

Трансляционные матрицы по–прежнему определяются по формулам (20).

Приведем примеры расчетов при нахождении поляризуемости. Рассмотрена сферическая частица в оболочке, помещенная в однородное поле, действующее вдоль оси z . Ядро частицы диэлектрически изотропное, и ДП его материала действительная $\varepsilon' = 10$. Материал оболочки считается диэлектрически трансверсально изотропным, для которого степень анизотропии характеризуется отношением $\xi = \varepsilon_t / \varepsilon_r$. Для отношения радиусов принято значение $r_1/r_2 = 0.8$ (при этом внешний радиус $a = r_2 = 1$ условных единиц), а $\varepsilon_r = 5 + i$ и $\varepsilon_r = 10 + 2i$ (рис. 14, 15). Зависимость действительной и мнимой частей поляризуемости от степени анизотропии показана на рис. 14, 15, и при этом мнимая часть увеличена в 10 раз. Значение $\xi = 1$ соответствует изотропному случаю.

Из приведенных графиков следует, что анизотропия ДП материала оболочки существенно влияет на поляризуемость частицы. При этом, если с ростом $\xi = \varepsilon_t / \varepsilon_r$ действительная часть поляризуемости возрастает, то мнимая часть – уменьшается. С увеличением абсолютного значения ДП оболочки в два раза мнимая часть поляризуемости уменьшается также приблизительно в два раза. Наиболее существенное влияние анизотропии наблюдается в интервале

$$v_{2l}^{(j)} = -1/2 - \sqrt{1/4 + \xi_j l(l+1)}. \quad (34)$$

Если материалы слоев диэлектрически изотропные ($\xi_j = 1$), то решение (33) переходит в обычное. В общем случае ДП может быть комплексной величиной, следовательно, и решения (33) будут комплексными. Матрица перехода $T_l^{(j)}$ от j -го к $(j+1)$ -му слою имеет вид

$$\begin{bmatrix} [\varepsilon_{j+1} v_{2l}^{(j+1)} - \varepsilon_j v_{2l}^{(j)}] \rho_j^{[v_{2l}^{(j)} + v_{2l}^{(j+1)} - 1]} \\ [-\varepsilon_{j+1} v_{1l}^{(j+1)} + \varepsilon_j v_{2l}^{(j)}] \rho_j^{v_{2l}^{(j)} + v_{1l}^{(j+1)} - 1} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$0 < \xi < 2$, а когда $\xi > 4$, значения и действительной и мнимой частей практически не изменяются, но одновременно существенно отличаются от изотропного случая. Имея зависимости поляризуемости, нетрудно найти и характеристики светорассеяния, так как спектр поглощения повторяет зависимость мнимой части от длины волны в соответствии с формулой $Q_{abs} = 8\pi(a/\lambda) \text{Im} \alpha$.

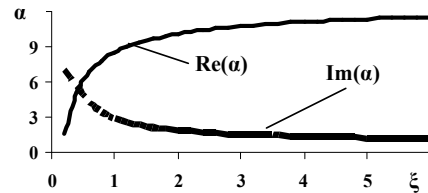


Рис. 14. Зависимость поляризуемости от степени анизотропии диэлектрической проницаемости материала оболочки в двухслойном шаре: для ядра $\varepsilon = 10$, для оболочки $\varepsilon_r = 5 + i$

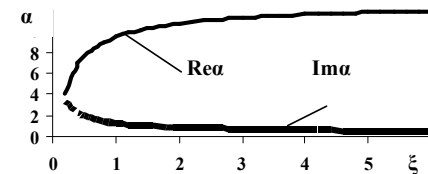


Рис. 15. Зависимость поляризуемости от степени анизотропии диэлектрической проницаемости материала оболочки в двухслойном шаре: для ядра $\varepsilon = 10$, для оболочки $\varepsilon_r = 10 + 2i$

Нахождение энергии, выделяющейся в слоях частицы при действии электрического поля. Приведем основные расчетные соотношения, полученные в [22]. Для потенциалов в слоях имеем формулы

$$u_j(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} \left[t_{11,1j}^{(lm)} (r/a)^l + t_{21,1j}^{(lm)} (a/r)^{l+1} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (36)$$

где $A_{lm}^{(1)}$ – постоянная, которая выражается из граничных условий, элементы трансляционных матриц условий при переходе от первого к

j -му слою обозначены через $t_{11,1j}^{(lm)}$, а символом $t_{21,1j}^{(lm)}$ обозначены элементы трансляционных матриц.

Для нахождения напряженности в j -м слое используется формула

$$|\mathbf{E}_j|^2 = (\partial u_j / \partial r)^2 + (\partial u_j / \partial \theta)^2 + (\partial u_j / \partial \varphi)^2, \quad (37)$$

и для частных производных по координатам для произвольного поля имеем выражения

$$\frac{\partial}{\partial r} u_j(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} \left[t_{11,1j}^{(lm)} l (r/a)^{l-1} - t_{21,1j}^{(lm)} (l+1) (a/r)^{l+2} \right] P_{lm}(\cos \theta) (\cos m\varphi + \sin m\varphi), \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u_j(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} \left[t_{11,1j}^{(lm)} (r/a)^l + t_{21,1j}^{(lm)} (a/r)^{l+1} \right] \left[\partial P_{lm}(\cos \theta) / \partial \theta \right] (\cos m\varphi + \sin m\varphi), \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} u_j(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} m A_{lm}^{(1)} \left[t_{11,1j}^{(lm)} (r/a)^l + t_{21,1j}^{(lm)} (a/r)^{l+1} \right] P_{lm}(\cos \theta) (\cos m\varphi - \sin m\varphi). \quad (40)$$

Для однородного поля задача существенно упрощается, и в результате имеет место формула

$$|\mathbf{E}_j|^2 = S(r, \theta) = S_0(r) + S_2(r) \cos 2\theta, \quad (41)$$

где

$$S_0(r) = (A^2 / a^2) \left\{ a^{-2} \left[t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} (a/r)^3 \right]^2 + \left[t_{11,1j}^{(1)} r/a + t_{21,1j}^{(1)} (a/r)^2 \right]^2 \right\}, \quad (42)$$

$$S_2(r) = (A^2 / 2) \left\{ a^{-2} \left[t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} (a/r)^3 \right]^2 - \left[t_{11,1j}^{(1)} (r/a) + t_{21,1j}^{(1)} (a/r)^2 \right]^2 \right\}. \quad (43)$$

Выражение для квадрата напряженности можно выразить через полиномы Лежандра, что в некоторых случаях оказывается при проведении расчетов более удобным:

$$|\mathbf{E}_j|^2 = [S_0(r) - \frac{1}{3} S_2(r)] P_0 + \frac{4}{3} S_2(r) P_2. \quad (44)$$

Выражения (41), (44) показывают, что поле будет четным по θ и иметь чисто радиальную составляющую и составляющую пропорциональную полиному Лежандра с индексом 2.

Заметим, что внешнее поле не является симметричным.

Плотность $W_j(t)$ потока энергии, которая выделяется в слоях, пропорциональна $|\mathbf{E}_j|^2$ (единица измерения Вт/м²) и задается формулами

$$W_j = \frac{|\mathbf{E}_j|^2 \varepsilon_0 \varepsilon_j' \omega \operatorname{tg} \delta_j}{4\pi} = \frac{|\mathbf{E}_j|^2 \varepsilon_0 \varepsilon_j'' c}{2\lambda}, \quad (j=1,2),$$

если $t > 0$ и $W(t) = 0, t < 0$, (45)

где $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь, ω – угловая частота излучения, $\lambda = 2\pi c / \omega$ – длина волны, c – скорость света.

Далее рассмотрим биметаллические частицы с серебряным ядром, находящиеся в однородном поле с напряженностью E_0 . Напряженности в ядре и оболочке выражаются через потенциалы u_1, u_2 и находятся по формуле

$$|\mathbf{E}_j|^2 = (\partial u_j / \partial r)^2 + ((1/r) \partial u_j / \partial \theta)^2. \quad (46)$$

Если в (46) выразить производные потенциалов через полиномы Лежандра, получим из формул для n -слойного шара

$$|\mathbf{E}_1|^2 = A_1^2 P_0 / a^2, \quad 0 < r < r_1 \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a^2 |\mathbf{E}_2|^2 &= [(A_2)^2 + 2(B_2)^2 (a/r)^6] P_0 - \\ &- [4A_2 B_2 (a/r)^3 - 2(B_2)^2 (a/r)^6] P_2, \\ r_1 < r < r_2, \end{aligned} \quad (48)$$

где все произвольные постоянные выражаются через одну и определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)}{3\epsilon_2} A_1, \quad B_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{3\epsilon_2} (r_1/a)^3 A_1, \\ B_3 &= \left[\frac{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)}{3\epsilon_2} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{3\epsilon_2} (r_1/a)^3 \right] A_1 + E_0 a, \end{aligned} \quad (49)$$

$$A_1 = \frac{9\epsilon_m a E_0}{\left\{ (2\epsilon_m + \epsilon_2)(2\epsilon_2 + \epsilon_1) - 2(\epsilon_m + \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1)(r_1/a)^3 \right\}}. \quad (50)$$

Приведем некоторые результаты расчетов. Принято, что для серебра $\epsilon_\infty = 4.5$, $\gamma_p = 1.46 \times 10^{16} \text{c}^{-1}$, $\gamma_p = 0.24 \times 10^{14} \text{c}^{-1}$, для золота – $\epsilon_\infty = 10.0$, $\gamma_p = 1.37 \times 10^{16} \text{c}^{-1}$, $\gamma_p = 0.34 \times 10^{14} \text{c}^{-1}$, а для среды ДП такая же, как у воды ($\epsilon_{\text{med}} = 1.77$). Расчеты выполнены для двух значений длин волн, приблизительно соответствующих частотам поверхностных плазмонов золота и серебра: $\lambda_{Au} = 526$ нм, $\lambda_{Ag} = 326$ нм. На рис. 16, 17 показано распределение квадрата напряженности электрического поля вдоль координаты r

внутри частицы для меридионального угла $\theta = 0$.

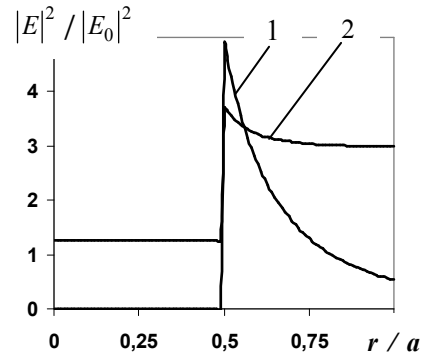


Рис. 16. Распределение энергии по толщине частицы для $\lambda = 526$ нм: 1 – функция при P_0 , 2 – функция при P_2

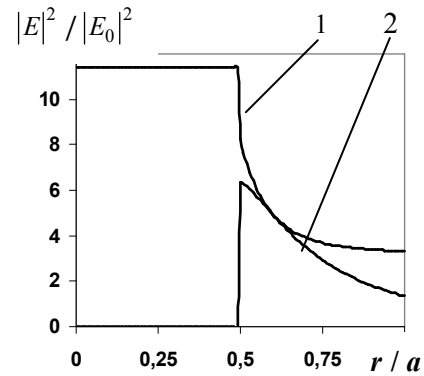


Рис. 17. Распределение энергии по толщине частицы для $\lambda = 326$ нм: 1 – функция при P_0 , 2 – функция при P_2

Из приведенных результатов, в частности, следует, что в ядре частицы энергия сохраняет постоянное значение, как это следует из (37). В оболочке частицы энергия быстро убывает, и при этом спад функции $D_3^{(0)}(a/r)$ происходит быстрее, чем $D_3^{(2)}(a/r)^3$. Уровень энергии существенно зависит от длины волны лазерного излучения. На частоте поверхностного плазмона серебра уровень энергии в серебряном ядре превышает уровень энергии в оболочке, а на частоте поверхностного плазмона золота – наоборот.

Полученные результаты могут быть использованы в различных областях, в частности, для определения температурных полей при лазерном нагреве наночастиц в медицинских целях [73].

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ МИ НА
СЛОИСТЫЙ ШАР

Обобщение решения Ми на двухслойный шар (шар в оболочке) получено в работах [2, 74–84] и др. В [84] приведено аналитическое решение для трехслойного шара. В работе [70] рассмотрен многослойный шар и использован МТМ. Эти решения позволяют найти коэффициенты ряда рассеяния, после чего становится возможным найти сечения и эффективности поглощения, рассеяния и экстинкции. Для решения задачи взаимодействия слоистого шара с электромагнитным полем построены трансляционные матрицы. Считается, что на шар падает плоская волна единичной амплитуды. Задача решена с использованием потенциалов Дебая для электрического и магнитного потенциалов плоской волны. Решения задач для электрической и магнитной составляющих поля независимы и полностью аналогичны.

В j -м слое ($j = 2, 3, \dots, N$) разложения для потенциалов имеют вид

$$U_j = \frac{1}{rk_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} [A_l^j \zeta_l(k_j r) + B_l^j \Psi_l(k_j r)] P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi, \quad (51)$$

$$V_j = \frac{m_j}{rk_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} [C_l^j \zeta_l(k_j r) + D_l^j \Psi_l(k_j r)] P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi. \quad (52)$$

где k_j – волновые числа, $\zeta_l(k_j r)$, $\Psi_l(k_j r)$ – сферические функции Бесселя, m_j – показатель преломления j -го слоя.

Далее используются обозначения: (индекс « T » означает транспонирование), параметры дифракции $\rho_j = k_j r$, вектор неизвестных функций $E_j = [k_j^2 r U_j, (k_j^2 / m_j) \partial / \partial r (r U_j)]^T$, вектор произвольных постоянных $\gamma_{lj} = [A_l^j, B_l^j]^T$ и функциональные матрицы

$$S_l^{(j)}(r) = \begin{bmatrix} \zeta_l(\rho_j) & \Psi_l(\rho_j) \\ (1/m_j) \zeta_l'(\rho_j) & (1/m_j) \Psi_l'(\rho_j) \end{bmatrix}.$$

Электрическое поле в j -м слое представлено в виде

$$E_j = (1/k_j^2) \sum_{l=1}^{\infty} S_l^{(j)}(r) \gamma_{lj} P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi.$$

Для записи условий сопряжения введены числовые матрицы, в данном случае имеющие вид

$$S_{lj}^0 = \begin{bmatrix} \zeta_l(k_j r_j) & \Psi_l(k_j r_j) \\ \frac{1}{m_j} \zeta_l'(k_j r_j) & \frac{1}{m_j} \Psi_l'(k_j r_j) \end{bmatrix},$$

$$S_{lj}^1 = \begin{bmatrix} \zeta_l(k_{j+1} r_j) & \Psi_l(k_{j+1} r_j) \\ \frac{1}{m_{j+1}} \zeta_l'(k_{j+1} r_j) & \frac{1}{m_{j+1}} \Psi_l'(k_{j+1} r_j) \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода $T_l^{(j)}$ для j -й поверхности раздела

$$T_j^l = [S_{lj}^1]^{-1} S_{lj}^0.$$

Далее применяется общая схема, изложенная выше. Решение задачи для магнитного поля полностью аналогично, но при этом матрицы $S_l^{(j)}(r)$ заменяются матрицами $Q_l^{(j)}(r)$

$$Q_l^{(j)}(r) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_j} \zeta_l(k_j r) & \frac{1}{m_j} \Psi_l(k_j r) \\ \zeta_l'(k_j r) & \Psi_l'(k_j r) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Соответственно матрицы, задающие граничные условия:

$$Q_{lj}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_j} \zeta_l(k_j r_j) & \frac{1}{m_j} \Psi_l(k_j r_j) \\ \zeta_l'(k_j r_j) & \Psi_l'(k_j r_j) \end{bmatrix},$$

$$Q_{lj}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{j+1}} \zeta_l(k_{j+1} r_j) & \frac{1}{m_{j+1}} \Psi_l(k_{j+1} r_j) \\ \zeta_l'(k_{j+1} r_j) & \Psi_l'(k_{j+1} r_j) \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Практический интерес представляет сравнение спектров, найденных в электростатическом и волновом приближениях. Результаты расчетов для той же самой двухслойной сферической частицы с серебряным ядром показаны на рис. 18, 19 для

эффективностей поглощения и рассеяния. Сплошные линии соответствуют волновому решению, штриховые – электростатическому приближению. Из представленных результатов следует, что электростатическое приближение дает завышенные значения характеристик (приблизительно на 25 %) в зоне максимальных значений поглощения и рассеяния, однако резонансную длину волны определяет правильно.

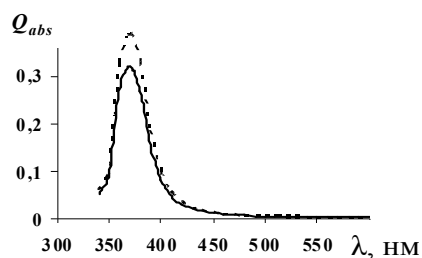


Рис. 18. Зависимость эффективности поглощения от длины волны для двухслойного шара с серебряным ядром и стеклянной оболочкой в воздухе:

— волновое решение
 - - - электростатическое приближение

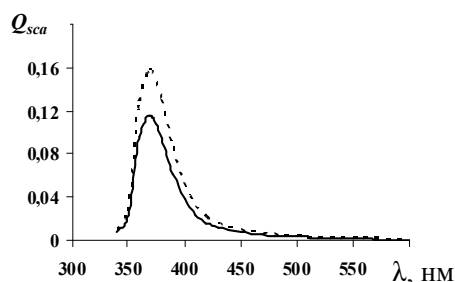


Рис. 19. Зависимость эффективности рассеяния от длины волны для двухслойного шара с серебряным ядром и стеклянной оболочкой в воздухе:

— волновое решение
 - - - электростатическое приближение

Приведенные на рис. 20, 21 спектры экстинкции и поглощения позволяют проследить влияние размеров частиц на резонансную длину волны (поверхностный плазмон). Приведем результаты расчетов для сферической частицы с серебряным ядром и стеклянной оболочкой в воде. Рассмотрено три размера частиц (по внешнему радиусу): 4, 10 и 16 нм. При этом отношение r_1 / r_2 сохранялось постоянным и равным 0.9. На рис. 20, 21 треугольниками и квадратами промаркированы кривые для радиусов 16 и 10 нм

соответственно; линия без маркеров соответствует радиусу 4 нм.

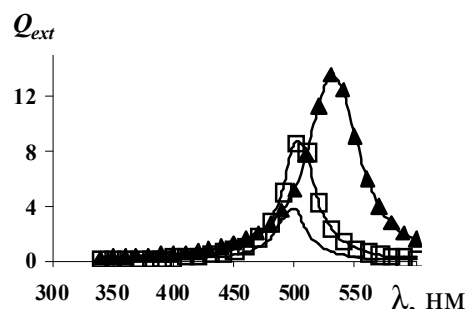


Рис. 20. Спектры экстинкции для двухслойной частицы с серебряным ядром и стеклянной оболочкой в воде;

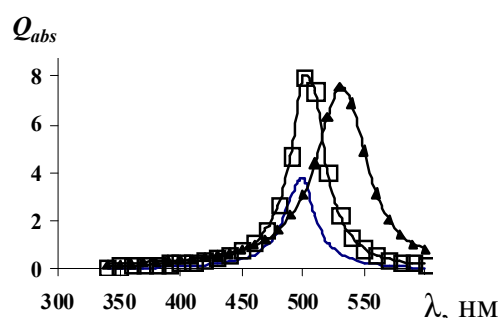


Рис. 21. Спектры поглощения для двухслойной частицы с серебряным ядром и стеклянной оболочкой в воде

Из графиков следует, что увеличение размеров частиц приводит к сдвигу резонансной частоты в область более длинных волн. При этом этот сдвиг становится заметным для частиц, больших, чем 10 нм. Заметим также, что максимум экстинкции наблюдается для самой большой частицы, в то время как максимум поглощения имеет место для частиц с радиусом 10 нм.

Далее приведем некоторые результаты расчетов в диапазоне СВЧ. В качестве простейшего примера рассмотрена сплошная диэлектрическая сферическая линза, а в качестве второго – трехслойный шар. Параметры слоев последнего подобраны таким образом, чтобы смоделировать так называемую линзу Лунеберга, которая имеет особые свойства [70] и используется в радиотехнике. На рис. 22 показана зависимость интенсивности углового рассеяния $\sigma = C_{sca} / (\pi a^2)$ от угла падения относительно волнового вектора на сплошном стеклопластиковом шаре с характеристиками $\epsilon = 3.98$, $\text{tg} \delta = 0.02$. На рис. 23 приведены зависимости интенсивности

экстинкции, рассеяния и поглощения от параметра дифракции при следующих значениях комплексных показателей преломления или диэлектрической проницаемости: для ядра принималось, что $n_1 = 3.0$, $k_1 = 0.01$, для второго стеклопластикового слоя, что $\varepsilon_2 = 3.98$, $\text{tg}\delta_2 = 0.02$ и для внешней оболочки из полистирола – $n_3 = 1.05$, $k_3 = 0.001$. Отношения внешних радиусов слоев к радиусу ядра составляли $r_2/r_1 = 0.5$, $r_3/r_1 = 0.9$.

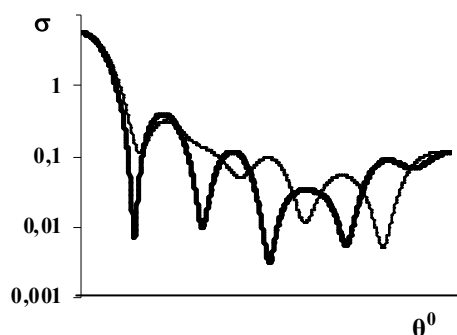


Рис. 22. Интенсивность углового рассеяния на диэлектрическом шаре:
 — параллельная поляризация;
 - - перпендикулярная поляризация

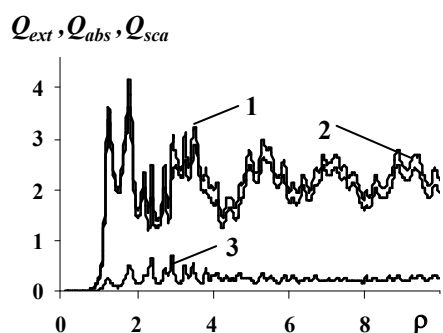


Рис. 23. Зависимость интенсивности экстинкции, рассеяния и поглощения от параметра дифракции: 1 – экстинкция; 2 – рассеяние; 3 – поглощение

Приведенные результаты демонстрируют высокую эффективность применения трансляционных матриц при рассмотрении задач для слоистых частиц.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Алгоритм решения задач на собственные значения изложим на примере задач теплопроводности [46, 49]. Рассмотрим слоистую стенку, показанную на рис. 24, находящуюся в условиях лазерного нагрева.

Обозначения параметров слоев на рис. 24 соответствуют задачам теплопроводности: скалярные температурные поля в каждом слое T_j , коэффициенты теплопроводности λ_j , удельные теплоемкости c_j и плотности ρ_j слоев ($j = 1, 2, \dots, N$).

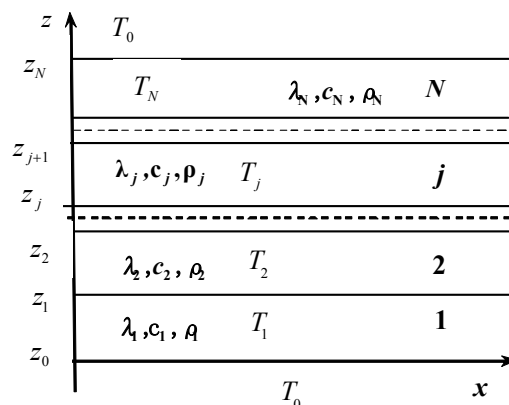


Рис. 24. Плоскостроистая структура

Рассматривается периодическая задача с полупериодами разложений $\lambda_k = (k\pi) / a$, $\mu_m = (m\pi) / b$, $k, m = 0, 1, 2, \dots, \infty$, т.е. используется разложение по системе ортогональных функций $\{\cos(\lambda_k x) \cos(\mu_m y)\}$. Применение схемы разделения переменных к стационарному уравнению теплопроводности (уравнению Лапласа) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - (\lambda_k^2 + \mu_m^2) A = -\eta^2 A. \quad (55)$$

В уравнении (55) η – собственное число, $A = A(z)$ – собственная функция, подлежащая определению. Для каждой пары чисел k, m собственные функции будут различными и, в общем случае, $A = A^{(km)}$. Для сокращения записи в дальнейшем верхние индексы опускаются.

Для слоистой стенки (рис. 24), состоящей из N слоев, функцию $A(z)$ представим в виде

$$A = \begin{cases} Z_1(z), & z_0 < z < z_1 \\ Z_2(z), & z_1 < z < z_2 \\ \dots & \dots \\ Z_N(z), & z_{N-1} < z < z_N \end{cases}. \quad (56)$$

По координате z примем следующие граничные условия. На поверхностях раздела слоев при $z = z_j$ в модели уравнений теплопроводности потребуем выполнение условий идеального теплового контакта [49], т.е. равенства температур и тепловых потоков в направлении оси z на поверхностях $z = z_j$. Тогда для функции $\mathbf{A}(z)$ эти условия сводятся к следующим:

$$Z_j = Z_{j+1}, \quad \lambda_j (dZ_j / dz) = \lambda_{j+1} (dZ_{j+1} / dz),$$

$$(j = 1, 2, \dots, N-1). \quad (57)$$

В силу линейности уравнений, не умаляя общности, можно принять температуру окружающей среды $T_0 = 0$, и тогда условия равенства температур и теплообмена на лицевых поверхностях приводят к соотношениям

$$\mathbf{A}|_{z=z_0} = Z_1|_{z=z_0} = 0,$$

$$\left[\lambda_N (\partial \mathbf{A} / \partial z) + \alpha \mathbf{A} \right]_{z=z_N} =$$

$$= \left[\lambda_N (\partial Z_N / \partial z) + \alpha Z_N \right]_{z=z_N} = 0, \quad (58)$$

где α – коэффициент теплообмена.

Представление общего решения уравнения (55) зависит от знака выражения $\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2$. Если $\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2 < 0$, то общее решение уравнения записывается в виде

$$\mathbf{A} = A \exp\left(z \sqrt{\lambda_k^2 + \mu_m^2 - \eta^2}\right) +$$

$$+ B \exp\left(-z \sqrt{\lambda_k^2 + \mu_m^2 - \eta^2}\right), \quad (59)$$

если $\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2 > 0$, то

$$\mathbf{A} = A \cos\left(z \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) +$$

$$+ B \sin\left(z \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right), \quad (60)$$

$$t_{11,j} = \cos^2\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) + (\lambda_j / \lambda_{j+1}) \sin^2\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right),$$

и если $\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2 = 0$, то

$$\mathbf{A} = A + Bz, \quad (61)$$

где A, B – произвольные постоянные.

Из возможных представлений следует выбрать представление (60). При этом собственные числа попадают в промежутки $\eta > \sqrt{\lambda_k^2 + \mu_m^2}$ (в противном случае условие нарушается), и будут различными для различных k, m .

Приведем общие формулы для этого случая. Решение сформулированной задачи строится с применением МТМ. Для записи условий сопряжения слоев в данной задаче вводятся числовые матрицы ($j = 1, 2, \dots, N-1$)

$$S_j^0 = \begin{bmatrix} \cos\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) & \sin\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \\ -\lambda_j \sin\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) & \lambda_j \cos\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \end{bmatrix},$$

$$(62)$$

$$S_j^1 = \begin{bmatrix} \cos\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) & \sin\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \\ -\lambda_{j+1} \sin\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) & \lambda_{j+1} \cos\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \end{bmatrix}.$$

$$(63)$$

Определитель матрицы (63) – это с точностью до множителя λ_{j+1} определитель Вронского $\det[S_j^1] = \lambda_{j+1} \neq 0$. Следовательно, при любом j матрица S_j^1 будет невырожденной, и обратная матрица $[S_j^1]^{-1}$ всегда существует. Тогда матрица перехода T_j и трансляционная матрица $T_N(z_N, z_1)$

$$T_j = [S_j^1]^{-1} S_j^0,$$

$$T_N(z_N, z_1) = \prod_{j=1}^{N-1} T_{N-j}. \quad (64)$$

Элементы матрицы определяются по формулам

$$t_{12,j} = 0,5(1 - \lambda_j / \lambda_{j+1}) \sin\left(2z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right), \quad t_{21,j} = 0,5(1 - \lambda_j / \lambda_{j+1}) \sin\left(2z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right),$$

$$t_{22,j} = \left[\sin^2\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) + (\lambda_j / \lambda_{j+1}) \cos^2\left(z_j \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \right]. \quad (65)$$

Из первого граничного условия (58) следует, что $A_{n,1} = 0$. В этом случае решения принимают вид

$$Z_{n,1} = B_{n,1} \sin\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right), \quad Z_{n,N} = B_{n,1} [t_{12} \cos\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) + t_{22}] \sin\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right).$$

Условие нетривиальности решений при удовлетворении граничных условий на поверхности z_N приводит к уравнению для нахождения собственных значений

$$F(\eta) = \lambda_N \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2} \left[t_{22} \sin\left(z_N \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) - t_{12} \cos\left(z_N \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \right] +$$

$$+ \alpha \left[t_{12} \cos\left(z_N \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) + t_{22} \sin\left(z_N \sqrt{\eta^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) \right] = 0, \quad (66)$$

где t_{12}, t_{22} – элементы трансляционной матрицы.

Трансцендентное уравнение в задаче Штурма-Лиувилля должно иметь счетное множество корней, которые расположим в порядке возрастания $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n < \dots$. Собственные функции A_n , соответствующие собственным числам η_n , при принятых граничных условиях имеют вид

$$A_n = \begin{cases} Z_{n,1} = B_{n,1} \sin\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right), & z_0 < z < z_1 \\ Z_{n,2} = B_{n,1} \left[t_{12,1} \cos\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) + t_{22,1} \right] \sin\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right), & z_1 < z < z_2 \\ \dots \\ Z_{n,N} = B_{n,1} \left[t_{12} \cos\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right) + t_{22} \right] \sin\left(z \sqrt{\eta_n^2 - \lambda_k^2 - \mu_m^2}\right), & z_{N-1} < z < z_N \end{cases}, \quad (67)$$

а квадрат нормы определяется по формуле

$$\|A_n\|^2 = \sum_{j=1}^N \int_{z_{j-1}}^{z_j} Z_{n,j}^2(z) dz. \quad (68)$$

Система собственных функций для слоистой стенки построена. Такая система обладает свойствами ортогональности и полноты в промежутке $[z_0, z_N]$. Для различных значений индексов k, m собственные функции и собственные числа будут различными.

Рассмотрим подробнее случай $k = 0, m = 0$, соответствующий одномерной задаче. В этом случае в соответствии с формулой (59) для j -го слоя можно записать

$$Z_j = A_j \cos(\eta z) + B_j \sin(\eta z). \quad (69)$$

Матрицы S_j^0, S_j^1 запишутся в виде

$$S_j^0 = \begin{bmatrix} \cos(\eta z_j) & \sin(\eta z_j) \\ -\lambda_j \sin(\eta z_j) & \lambda_j \cos(\eta z_j) \end{bmatrix},$$

$$S_j^1 = \begin{bmatrix} \cos(\eta z_j) & \sin(\eta z_j) \\ -\lambda_{j+1} \sin(\eta z_j) & \lambda_{j+1} \cos(\eta z_j) \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Формулы (64) сохраняются, а уравнение (66) для нахождения собственных значений запишется в виде

$$F(\eta) = \lambda_2 \eta [t_{22} \cos(\eta z_2) - t_{12} \sin(\eta z_2)] +$$

$$+ \alpha [t_{12} \cos(\eta z_2) + t_{22} \sin(\eta z_2)] \eta B_{n,1} = 0. \quad (71)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим подробнее двухслойное нанопокрывание. Решение этой задачи нетрудно построить непосредственно и использовать полученный результат для контроля общей схемы. В этом

случае трансляционная матрица совпадает с матрицей перехода от первого к второму слою,

$$\text{т.е. } T_2(z_2, z_1) = T_{n,1},$$

$$T_{n,1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\eta_n z_1) + (\lambda_1 / \lambda_2) \sin^2(\eta_n z_1) & 0,5(1 - \lambda_1 / \lambda_2) \sin(2\eta_n z_1) \\ 0,5(1 - \lambda_1 / \lambda_2) \sin(2\eta_n z_1) & \sin^2(\eta_n z_1) + \lambda_1 / \lambda_2 \cos^2(\eta_n z_1) \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Решая уравнение (66) при $N = 2$, находим собственные числа. Из граничных условий при $z_0 = 0$ следует, что $A_{n,1} = 0$. Тогда собственные функции с учетом граничных условий запишутся в виде

$$Z_{n,1} = B_{n,1} \sin(\eta_n z), \quad Z_{n,2} = [t_{12} \cos(\eta_n z) + t_{22} \sin(\eta_n z)] B_{n,1}, \quad (73)$$

$$A_n = B_{n,1} \begin{bmatrix} Z_{n,1}, 0 \leq z \leq z_1 \\ Z_{n,2}, z_1 \leq z \leq z_2 \end{bmatrix} = B_{n,1} \begin{bmatrix} \sin(\eta_n z), 0 \leq z \leq z_1 \\ t_{12} \cos(\eta_n z) + t_{22} \sin(\eta_n z), z_1 \leq z \leq z_2 \end{bmatrix}.$$

Квадрат нормы в соответствии с (68) определится (постоянную $B_{n,1}$ опускаем) выражением

$$\|A_n\|^2 = \int_0^{z_1} \sin^2(\eta_n z) dz + \int_{z_1}^{z_2} [t_{12} \cos(\eta_n z) + t_{22} \sin(\eta_n z)]^2 dz. \quad (74)$$

После вычисления интегралов получим явное выражение для квадрата нормы

$$\|A_n\|^2 = \frac{1}{2} z_1 - \frac{1}{4\eta_n} \sin(2\eta_n z_1) + \frac{1}{2} (t_{12}^2 + t_{22}^2) (z_2 - z_1) + \frac{1}{4\eta_n} (t_{12}^2 - t_{22}^2) [\sin(2\eta_n z_2) - \sin(2\eta_n z_1)]. \quad (75)$$

Численные расчеты выполнены для двухслойного нанопокрyтия из золота и серебра. Примем, что толщина слоев одинакова и $z_1 = 20$ нм, $z_2 = 40$ нм, коэффициенты теплопроводности равны для золота $\lambda_1 = 312$ Вт/(м·град) и для серебра $\lambda_2 = 418.7$ Вт/(м·град), а коэффициент теплообмена $\alpha = 40$ Вт/(м²·К). Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 25, 26. На рис. 25 показана зависимость функции $F(\eta)$, нули которой определяют собственные числа, а на рис. 26 – первые три собственные функции.

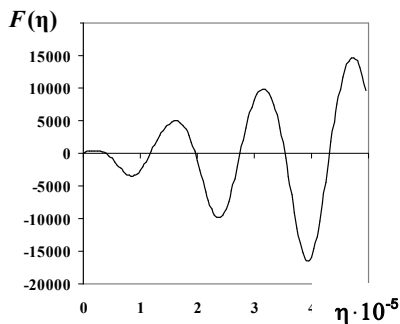


Рис. 25. График функции для нахождения собственных значений

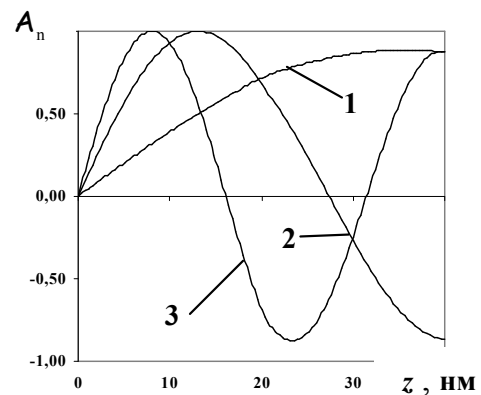


Рис. 26. Первые три собственные функции

Из этих результатов, в частности, следует, что собственные числа по мере возрастания η сгущаются, а существенный рост абсолютных значений экстремумов функции $F(\eta)$ объясняется присутствием слагаемого, пропорционального η . Столь большие значения η связаны с тем, что рассматриваются нанослои, а аргументом тригонометрических функций является выражение $\eta z \leq \eta z_2$. На графиках собственных функций видно, что непрерывность собственных функций при

переходе через поверхность раздела сохраняется.

Ввиду аналогии, существующей в математической физике между задачами различной физической природы [44, 45], полученные результаты непосредственно применимы при рассмотрении акустических колебаний или для определения собственных частот и собственных форм колебаний слоистой тонкой мембраны, которые описываются уравнением

$$N\Delta U = -\rho\omega^2,$$

где ρ – плотность, N – натяжение мембраны.

Также уместно отметить, что построенные собственные функции могут быть использованы при решении нестационарных задач в качестве ядра интегрального преобразования по координатам x, y, z для получения соответствующих модальных уравнений.

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ПЛИТ

Построение аналитических решений прикладных задач трехмерной теории упругости для слоистых анизотропных тел представляет определенные трудности, что следует, например, из результатов монографий [18–20]. При рассмотрении динамических задач, в частности колебаний, желательнее иметь аналитическое представление решений. Результаты, полученные в трехмерной постановке, позволяют точно учесть физические характеристики каждого слоя и позволяют оценить пределы применимости двумерных моделей теории пластин и оболочек, в которых свойства каждого слоя учитываются только интегрально. В частности,

в работах автора [86, 87] приведено решение задачи о колебаниях толстостенной слоистой плиты с промежуточными опорами в рамках плоской теории упругости. В статье частотное уравнение получено МТМ и последующем специальном преобразовании клеточной матрицы, учитывающей присутствие опор. В настоящем разделе приводится аналитическое решение задачи в трехмерной постановке, и рассматриваются только собственные колебания слоистой плиты. Получены расчетные формулы, позволяющие построить алгоритм для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм. Задача решается с использованием МТМ, и в данном случае трансляционные матрицы имеют шестой порядок.

Рассматривается плита, состоящая из K слоев. Динамическое деформирование i -го слоя ($i=1, 2, \dots, K$) описывается системой дифференциальных уравнений движения ортотропного тела в перемещениях, аналог уравнений Ламе), имеющих для каждого слоя (индекс опускаем) вид

$$c_{11}u_{x,xx} + c_{55}u_{z,zz} + (c_{13} + c_{55})u_{z,xz} = \rho u_{x,tt},$$

$$(c_{13} + c_{55})u_{x,xz} + c_{55}u_{z,xx} + c_{33}u_{z,zz} = \rho u_{z,tt}, \quad (76)$$

$$(c_{13} + c_{55})u_{x,xz} + c_{55}u_{z,xx} + c_{33}u_{z,zz} = \rho u_{z,tt}.$$

В системе (76) c_{ij} – коэффициенты жесткости [18–20], ρ – плотность, u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}(x, y, z)$, частные производные обозначены двойными переменными в индексах после запятой. Векторы перемещений представим в виде

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \sum_{k,n} \begin{bmatrix} \sin \lambda_k x \cos \mu_n y & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_k x \sin \mu_n y & 0 \\ 0 & 0 & \sin \lambda_k x \sin \mu_n y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{kn}(z) \\ v_{kn}(z) \\ w_{kn}(z) \end{bmatrix}, \quad (77)$$

где $\lambda_k = (k\pi/a)$, $\mu_n = (n\pi/b)$, a, b – размеры плиты, $k, n = 1, 2, \dots, \infty$. Представление (77) предполагает выполнение на краях плиты

условий, соответствующих условиям шарнирного опирания в теории пластин.

Переходим от уравнений движения к уравнениям колебаний

$$\begin{cases} (s_{11} + \rho\omega^2 + c_{55} \frac{d^2}{dz^2})u_{kn} + s_{12}v_{kn} + s_{13} \frac{d}{dz}w_{kn} = 0 \\ s_{12}u_{kn} + (s_{22} + \rho\omega^2 + c_{44} \frac{d^2}{dz^2})v_{kn} + s_{23} \frac{d}{dz}w_{kn} = 0 \\ -s_{13} \frac{d}{dz}u_{kn} - s_{23} \frac{d}{dz}v_{kn} + (s_{33} + \rho\omega^2 + c_{33} \frac{d^2}{dz^2})w_{kn} = 0 \end{cases}, \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= -\lambda_k^2 c_{11} - \mu_n^2 c_{66}, & s_{12} &= -\lambda_k \mu_n (c_{12} + c_{66}), \\ s_{13} &= -\lambda_k (c_{13} + c_{55}), & s_{22} &= -\lambda_k^2 c_{66} - \mu_n^2 c_{22}, \\ s_{12} &= -\mu_n (c_{22} + c_{44}), & s_{33} &= -\lambda_k^2 c_{55} - \mu_n^2 c_{44}. \end{aligned}$$

Представление решений системы (78) с постоянными коэффициентами в виде

$$\begin{bmatrix} u_{kn}(z) \\ v_{kn}(z) \\ w_{kn}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{kn} \\ V_{kn} \\ W_{kn} \end{bmatrix} \exp(\xi z)$$

$$\alpha_{kn,m}^{(i)} = \frac{s_{12}s_{13}\xi_{kn,m}^{(i)} - s_{13}\xi_{kn,m}^{(i)}(s_{22} + \rho\omega^2 + c_{44})\xi_{kn,m}^{(i)}}{\left[s_{11} + \rho\omega^2 + c_{55}(\xi_{kn,m}^{(i)})^2 \right] \cdot \left[s_{22} + \rho\omega^2 + c_{44}(\xi_{kn,m}^{(i)})^2 \right] - s_{12}^2},$$

$$\beta_{kn,m}^{(i)} = \frac{s_{12}s_{13}\xi_{kn,m}^{(i)} - s_{23}\xi_{kn,m}^{(i)}(s_{11} + \rho\omega^2 + c_{55})\xi_{kn,m}^{(i)}}{\left[s_{11} + \rho\omega^2 + c_{55}(\xi_{kn,m}^{(i)})^2 \right] \cdot \left[s_{22} + \rho\omega^2 + c_{44}(\xi_{kn,m}^{(i)})^2 \right] - s_{12}^2}.$$

Используя соотношения закона Гука с учетом представлений для перемещений, можно записать следующие выражения для компонент тензора напряжений, которые входят в условия сопряжения слоев и должны быть непрерывны при переходе границ слоев

$$\begin{aligned} \sigma_{zz, kn}^{(i)}(z) &= \sum_{m=1}^6 a_{kn,m}^{(i)} \gamma_{kn,m}^{(i)} \exp[\xi_{kn,m}^{(i)} z], & \sigma_{xz, kn}^{(i)}(z) &= \sum_{m=1}^6 b_{kn,m}^{(i)} \gamma_{kn,m}^{(i)} \exp[\xi_{kn,m}^{(i)} z], \\ \sigma_{yz, kn}^{(i)}(z) &= \sum_{m=1}^6 c_{kn,m}^{(i)} \gamma_{kn,m}^{(i)} \exp[\xi_{kn,m}^{(i)} z]. \end{aligned} \quad (81)$$

Вводим в рассмотрение векторы-столбцы неизвестных функций $\sigma_{kn}^{(i)}(z)$ и постоянных $\gamma_{kn}^{(i)}$

$$\sigma_{kn}^{(i)}(z) = \left[u_{kn}^{(i)}(z), v_{kn}^{(i)}(z), w_{kn}^{(i)}(z), \sigma_{zz, kn}^{(i)}(z), \sigma_{yz, kn}^{(i)}(z), \sigma_{xz, kn}^{(i)}(z) \right]^T, \quad \gamma_{kn}^{(i)} = \left[\gamma_{kn,1}^{(i)}, \gamma_{kn,2}^{(i)}, \dots, \gamma_{kn,6}^{(i)} \right]^T \quad (82)$$

и 6×6 матрицу фундаментальных решений $S_{kn}^{(i)}(z)$, составленную из коэффициентов при экспонентах в развернутой записи решений (80), (81). Также в соответствии с общей

приводит к характеристическому уравнению шестой степени вида

$$\xi_{kn}^6 + a_1 \xi_{kn}^4 + a_2 \xi_{kn}^2 + a_3 = 0, \quad (79)$$

где $a_s = a_s(k, n, \omega)$ – коэффициенты, зависящие от номера слоя, частоты и номеров гармоник. Уравнение (79) имеет шесть комплексных корней $\xi_{kn,m}^{(i)}$ ($m = 1, 2, \dots, 6$), среди которых всегда присутствует пара либо действительных, либо чисто мнимых корней в силу того, что кубическое уравнение относительно ξ^2 всегда имеет один действительный корень. Общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} u_{kn}^{(i)}(z) \\ v_{kn}^{(i)}(z) \\ w_{kn}^{(i)}(z) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^6 \gamma_{kn,m}^{(i)} \begin{bmatrix} \alpha_{kn,m}^{(i)} \\ \beta_{kn,m}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \exp(\xi_{kn,m}^{(i)} z), \quad (80)$$

где $\alpha_{kn,m}^{(i)}, \beta_{kn,m}^{(i)}$ определяются по формулам

схемой введем матрицы $S_{kn,i}^0(z), S_{mn,i}^1(z)$. Для матрицы $S_{kn,i}^0(z)$ аргумент z изменяется в пределах i -го слоя, т.е. $z_{i-1} < z < z_i$, а для матрицы

$S_{kn,i}^1(z)$ в пределах $(i+1)$ -го слоя, т.е. $z_i < z < z_{i+1}$. Соответственно числовые матрицы для записи условий сопряжения обозначим

$$S_{kn,i}^0 = S_{kn,i}^0(z_i), S_{kn,i}^1 = S_{kn,i}^1(z_i), i=1,2,\dots,K-1.$$

Соотношение, связывающее произвольные постоянные для соседних слоев, как и ранее

$$\gamma_{kn}^{(i+1)} = [S_{kn,i}^1]^{-1} S_{kn,i}^0 \gamma_{kn}^{(i)} = T_{kn,i} \gamma_{kn}^{(i)}, \quad (83)$$

где $[S_{kn,i}^1]^{-1}$ – обратная матрица;

$T_{mn,i} = [S_{kn,i}^1]^{-1} S_{kn,i}^0$ – матрица перехода для i -ой границы раздела. Индекс i принимает значения от 1 до $K-1$. Далее в соответствии с общей схемой определяется трансляционная матрица $T = T(z_1, z_K)$.

Для записи граничных условий на лицевых поверхностях, которые в случае собственных колебаний состоят в отсутствии поверхностных нагрузок, вводятся в рассмотрение прямоугольные 3×6 матрицы $R_{0,kn}$ и $R_{1,kn}$. Матрицы состояются соответственно из трех последних строк матрицы $S_{mn}^0(z)$, если в них положить $z = z_K$, и матрицы $S_{mn}^1(z)$, если в них положить $z = z_0$. Получим

$$R_{0,kn} T_{kn}(z_1, z_{K-1}) \gamma_{kn}^{(1)} = 0,$$

$$R_{1,kn} \gamma_{kn}^{(1)} = 0. \quad (84)$$

Эти условия приводят к семейству независимых систем линейных алгебраических уравнений, порядок которых не зависит от числа слоев и равен шести. Приравнивая определители этих систем к нулю, для каждого k, n приходим к частотному уравнению вида

$$\det \begin{bmatrix} R_{0,kn} \cdot T_{kn}(z_1, z_{K-1}) \\ R_{1,kn} \end{bmatrix} = 0. \quad (85)$$

Порядок определителя не зависит от числа слоев и всегда равен шести. Для каждой пары чисел k, n при форме волнообразования по координатам x, y , заданной выбором представлений решений в виде (69), уравнение (85) определяет спектр частот ω_{knl} слоистой плиты. При этом влияние слоистости

учитывается трансляционной матрицей, элементы которой зависят от характеристик составляющих слоев.

Так как определение собственных частот колебаний эквивалентно задаче на собственные значения, то решение задачи аналогично решению, построенному в предыдущем разделе. Вместе с тем она намного сложнее, и не только из-за шестого порядка системы. Формально это система с постоянными коэффициентами, которая после разделения переменных сводится к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение последних, в принципе, не должно вызывать затруднений. Однако вид фундаментальных решений существенно зависит от типа корней характеристического уравнения. В общем случае, четыре из них будут комплексными, и поэтому все операции придется выполнять в комплексном пространстве. В частности это приводит к необходимости отыскания действительных корней (частот) уравнения (85) с комплексными коэффициентами. Типы корней характеристического уравнения (79) будут определяться соотношениями между коэффициентами жесткости (упругих характеристик) слоев. Для ортотропного тела – это шесть независимых параметров, поэтому проведение полного исследования задачи оказывается весьма трудоемким и выходит за рамки настоящей работы.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящую статью следует рассматривать как систематическое изложение результатов исследований, выполненных автором ранее. В дополнение к ним представленная общая схема построения трансляционных матриц для однородных и неоднородных дифференциальных операторов произвольного (конечного) порядка применима для полей различной физической природы и их взаимодействия на поверхностях раздела. Следует отметить, что решения дифференциальных уравнений, описывающих поля, справедливы только во внутренних областях [44–48], а вывод условий на их границах требует специального рассмотрения. Именно вид граничных условий на поверхностях раздела характеризует физические свойства поверхностей контакта. Например, наличие переходного слоя, взаимная диффузия контактирующих тел, дрейф

свободных электронов, возникновение индукционных токов в переменном электромагнитном поле и другие явления в математических моделях будут приводить к различным типам граничных условий. Однако при этом алгоритм построения трансляционных матриц формально будет оставаться неизменным.

В приведенных примерах для построения фундаментальных матриц используются аналитические решения дифференциальных уравнений, однако общая схема полностью сохраняется и при использовании численных методов типа МКР, МКЭ или граничных интегральных уравнений, которые необходимы при рассмотрении уравнений с переменными коэффициентами. Это связано с тем, что фактически для нахождения трансляционных матриц необходимы только значения фундаментальных матриц на поверхностях раздела.

Материал, изложенный в настоящей статье, наглядно демонстрирует возможности метода трансляционных матриц. Его применение в прикладных задачах, которые могут относиться к различным разделам математической физики, как показано в статье при рассмотрении конкретных задач, существенно упрощает процедуру построения решений и получения новых результатов. Метод позволяет переносить граничные условия со слоя на слой и избежать необходимости рассмотрения алгебраических систем, порядок которых зависит от числа слоев N . Формально задача обращения матриц высокого порядка сводится к задаче перемножения матриц, порядок

которых в N раз меньше. В алгебраических системах, которые соответствуют однослойным объектам, появляются только дополнительные множители в представлении решений для слоев, а порядок матриц граничных условий не изменяется. Эти множители как раз и являются элементами трансляционных матриц и содержат всю информацию о физических характеристиках слоев рассматриваемого объекта.

Метод оказывается особенно удобным в тех задачах, когда исследователя интересует только отклик объекта на внешнее возмущение. Это обстоятельство позволяет существенно упростить решение актуальной в настоящее время задачи создания новых типов метаматериалов [88–90] с требуемыми свойствами, которые могут состоять из десятков слоев. При использовании разложений по ортогональным функциям произвольные постоянные войдут в коэффициенты разложений.

Следует отметить также, что изложенный алгоритм легко программируется, позволяет использовать стандартное математическое обеспечение и контролировать точность численных результатов. Построенные для рассмотренных задач трансляционные матрицы непосредственно могут быть использованы в расчетно-исследовательской практике и существенно упрощают решение обратных задач и задач синтеза. Полученные выражения для электромагнитной энергии позволяют рассчитывать нагрев наночастиц для их использования в термотерапии.

Шарувато–неоднорідні об'єкти з поверхнями поділу. Застосування трансляційних матриць у прикладних задачах

Л.Б. Лерман

*Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка Національної академії наук України
вул. Генерала Наумова, 17, Київ, 03164, Україна, lerman@yandex.ru*

Досліджуються неоднорідні об'єкти: шарувато–неоднорідні наночастинки і шаруваті необмежені середовища. Наводиться загальна схема побудови трансляційних матриць. Із їх застосуванням розв'язані задачі розсіяння електромагнітних хвиль на багатошарових еліпсоїдальних наночастинках (в електростатичному наближенні), сферичних частинках (в електростатичному і хвильовому наближенні), знайдені вирази для визначення електричної енергії в шарах. Побудовано розв'язок задач на власні значення

для плоскошаруватого тіла, отримано розрахункові співвідношення для визначення власних частот коливань шаруватої плити з використанням рівнянь тривимірної теорії пружності. Наведено основні розрахункові формули і ілюстративний матеріал.

Ключові слова: шарувато-неоднорідні середовища, наночастинки, трансляційні матриці, електромагнітна енергія, теплопровідність, вільні коливання

Lamellar heterogeneous objects with interfaces. Using transfer matrices in applications

L.B. Lerman

Chuiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine
17 General Naumov Str., Kyiv, 03164, Ukraine, llerman@yandex.ru

In this paper heterogeneous subjects are investigated, namely laminated nanoparticles and flat-layered media. Common feature of objects under consideration is presence of surfaces divided into slabs with different physical characteristics. The aim of the work is to demonstrate large possibilities and certain preferences of transfer matrices method for solution different problems of applied physics and generalization of the results taken out by author early. The method is especially convenient for analysis of such systems under action of different external physical fields. The method makes possible to transfer boundary conditions from slab to slab, to avoid the necessity of consideration of high order algebraical systems and matrices inversion problem is reduced to theirs simple multiplication. We presented a general scheme of building transfer matrices based on conversion of partial differential equations to ordinary differential equations with using expansion by a system of orthogonal functions. In addition to known results, the transfer matrices for inhomogeneous differential equations are constructed, i.e. those for physical systems with internal energy sources.

Transfer matrix method has been used to solve some applied problems, especially problems of electromagnetic scattering on ellipsoidal nanoparticles (electrostatic approximation), spherical particles (electrostatic and wave approximations), expressions for calculations of electrical energy in slabs are found. Solution of Eigen value problems for multilayer panels is constructed, design formulas for determination of oscillation Eigen frequencies of multilayer panel with using three-dimensional elasticity theory are also obtained. Design formulas and some typical artwork are presented.

Keywords: layered inhomogeneous media, nanoparticles, transfer matrix, electromagnetic energy, thermal conductivity, free vibration

ЛИТЕРАТУРА

1. Венгер Е.Ф., Гончаренко А.В., Дмитрук М.Л. Оптика малих частинок і дисперсних середовищ. – Київ: Наук. думка, 1999. – 348 с.
2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – Москва: Мир, 1986. – 664 с.
3. Гапоненко С.В., Розанов Н.Н., Ивченко Е.Л. и др. Оптика наноструктур. / Под редакцией А.В. Федорова. – СПб: Недра, 2005. – 326 с.
4. Bruggeman D.A.J. Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterigenen Substanzen. P. II // Ann. Phys. (Leipzig). – 1935. – V. 24, N 8. – P. 665–679.
5. Lichtenecker K. Die Dielectrizitatskonstante naturlicher und Kunstlicher Mischkorper // Physik Z. – 1926. – V. 27. – P. 115–255.
6. Криворучко Я.С. Визначення ефективної діелектричної проникності дисперсних середовищ та застосування радіометрії для визначення вмісту вологи // Поверхность. – 2011. – Вип. 3(18). – С. 22–28.
7. Pecharrómán C., Iglesias E. Effective dielectric properties of insulator particles // Phys. Rev. B. – 1994. – V. 49, N 11. – P. 7137–7146.
8. Jayannavar A.M., Kumar N. Generalization of Bruggeman's unsymmetrical effective-medium theory to a three-component composite // Phys. Rev. B. – 1991. – V. 44, N 21. – P. 12014–12015.
9. Wang J.R., Schmugge T.J. An Empirical Model for the Complex Dielectric Permittivity of Soils as a Function of Water Content // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 1980. – V. GE-18, N 4. – P. 288–295.

10. Лерман Л.Б., Грищук О.Ю., Шкода Н.Г., Шостак С.В. Особливості взаємодії електромагнітного випромінювання з малими частинками: теоретичні аспекти // *Успехи физики металлов*. – 2012. – Т. 13. – С. 71–100.
11. Лерман Л.Б., Люценко М.О., Криворучко Я.С. Взаємодія електромагнітного випромінювання з металевими наночастинами на поверхні твердого тіла // *Поверхность*. – 2009. – Вып. 1(16). – С. 271–277.
12. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – Москва: Наука, 1970. – 855 с.
13. Андреев Л.В., Дашко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – Москва: Машиностроение, 1988. – 200 с.
14. Аморо И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. Динамика ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1983. – 204 с.
15. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1975. – 376 с.
16. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – Москва: Наука, 1973. – 343 с.
17. Бреховских Л.М., Годик О.А. Акустика слоистых сред. – Москва: Наука, 1989. – 416 с.
18. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
19. Hutchinson J.R. Vibration of plates // *Boundary Elements*. – 1988. – V. 4. – P. 415–430.
20. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Вища школа. Гл. изд-во, 1985. – 190 с.
21. Asami K., Hanai T., Koizumi N. Dielectric Analysis of Escherichia Coli Suspension in the Light of the Theory of Interfacial Polarization // *Biophys. J.* – 1980. – V. 31, N 2. – P. 215–228.
22. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Водоп'янов Д.Л., Шостак С.В. Поляризованість структурно–неоднорідних кульових частинок // *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.–мат.* – 2007. – № 1. – С. 416–425.
23. Gurwich I., Kleiman M., Shiloah N., Cohen A. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure // *Appl. Opt.* – 2000. – V. 39, N 3. – P. 470–477.
24. Путилин Э.С. Оптические покрытия. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 227 р.
25. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. – Санкт-Петербург, Из-во Лань, 7-е издание, 2009. – 259 р.
26. He B., Rui X., Zhang H. Transfer Matrix Method for Natural Vibration Analysis of Tree System // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2012. – V. 2012. – Article ID 393204. – 19 p.
27. Khorasani S., Adibi A. Analytical solution of linear ordinary differential equations by differential transfer matrix method // *Electronic J. of Differential Equations*. – 2003. – V. 2003, N 79. – P. 1–18.
28. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
29. Adams V., Askenazi A. Building Better Products with Finite Element Analysis PDF. – On Word Press; 1st edition (October 1, 1998). – 585 p.
30. Ainsworth M., Oden J., Tinsley A. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. – DJVU – John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 264 p.
31. Канторович Л.В., Крылов А.И. Приближенные методы высшего анализа. – Ленинград, Москва: Гостехиздат, 1949. – 695 с.
32. Зуев В.Е., Наац И.Э. Обратные задачи лазерного зондирования. – Новосибирск: Наука, 1982. – 242 с.
33. Kokurin M.Yu., Paimerov S.K. Inverse Coefficient Problem for a Wave Equation in a Bounded Domain // *Comput. Math. Math. Phys.* – 2008. – V. 48, N 1. – P. 109–120.
34. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. – Moscow: Nauka, 1980. – (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1986). – 290 p.
35. Romanov V.G. Stability of Inverse Problems. – Moscow: Nauchnyi Mir. 2005 – 296 p.
36. Denisov A.M. Introduction to the Theory of Inverse Problems. – Moscow: Mosk. Gos. Univ., 1994. [in Russian].
37. Лерман Л.Б., Люценко М.А., Криворучко Я.С. и др. Обратные задачи оптической и диэлектрической спектроскопии суспензий наночастиц и увлажненных пористых сред // *Химия, физика и технология поверхности*. – 2008. – Вып. 14. – С. 101–117.
38. Криворучко Я.С. Визначення ефективної діелектричної проникності гетерогенних середовищ та оцінка вмісту вологи в ґрунтах // *Поверхность*. – 2011. – Вып. 3(18). – С. 22–28.
39. Криворучко Я.С., Лерман Л.Б., Люценко М.О., Якимів Р.Я. Визначення вологості пористих середовищ з використанням методів радіометрії (обернені задачі) // *Вісн. Національного техн. ун-ту «Київськ. політехнічний ін-т».* Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. – 2007. – Вып. 35. – С. 49–53.
40. Гречко Л.Г., Єременко А.М., Крилова Г.В., Лерман Л.Б. та ін. Оптичні властивості малих частинок срібла в колоїдних розчинах // *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.–мат.* – 2004. – № 4. – С. 450–458.
41. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1986. – 288 с.
42. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. – Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1951. – 288 с.

43. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1971. – 416 с.
44. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 355с.
45. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высш. Школа, 1970. – 712 с.
46. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Известия РАН. Энергетика. – 1993. – № 2. – С. 99–127.
47. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
48. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – Москва: Наука, 1973. – 831 с.
49. Туголуков Е.Н. Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований. Учебное пособие. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. – 116 с.
50. Drexler K.E. Nanosystems. Molecular Machinery, Manufacturing, and Computation. – New York: Wiley, 1992. – 560 p.
51. Kik P.G. Surface Plasmon Nanofotonics. – Springer, 2007. – 268 p.
52. Жихарев И.В., Ляшенко В.И. Нанотехнологии в мире и Украине // Менеджмент інновацій. Економічний вісник Донбасу. – 2007. – Т. 1. – С. 117–145.
53. Крушенко Г.Г. Некоторые аспекты применения нанотехнологий // Нанотехника. – 2008. – № 1(13). – С. 9–21.
54. Hutter B.E., Fendler J.H. Exploitation of localized surface plasmon resonance // Adv. Mater. – 2004. – V. 16, N 19. – P. 1685–1706.
55. Kelly K.L., Coronado E., Zhao L.L., Schatz G.C. The optical properties of metal nanoparticles: the influence of size, shape, and dielectric environment // J. Phys. Chem. B. – 2003. – V. 107, N 3. – P. 668–677.
56. Noguez C. Surface plasmons on metal nanoparticles: the influence of shape and physical environment // J. Phys. Chem. C. – 2007. – V. 111, N 14. – P. 3606–3619.
57. Lee K.S., El-Sayed M.A. Gold and silver nanoparticles in sensing and imaging: sensitivity of plasmon response to size, shape, and metal composition // J. Phys. Chem. B. – 2006. – V. 110, N 39. – P. 19220–19225.
58. Motl N.E., Ewusi-Annan E., Sines I.T. et al. Au-Cu alloy nanoparticles with tunable compositions and plasmonic properties: experimental determination of composition and correlation with theory // J. Phys. Chem. C. – 2010. – V. 114, N. 45. – P. 19263–19269.
59. Blaber M.G., Arnold M.D., Ford M.J. A review of the optical properties of alloys and intermetallics for plasmonics // J. Phys.: Condens. Matter. – 2010. – V. 22, N 14, Article ID 143201.
60. Mischenko M.I., Hovenier I.V., Travis L.D. Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements, and Applications. – New York: Academic press, 2000. – 690 p.
61. Wen-Chi Hung. A Steady of Surface Plasmon Effect Exited on Metal Nanoparticles. – A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. – Inst. of electro-Optical Engineering National Sun Yat-sen University Kaohsiung. – Taiwan, R.O.C., 2008. – 113 p.
62. Мищенко М.И. Электромагнитное рассеяние в случайных дисперсных средах: фундаментальная теория и приложения. Дис. ... докт. физ.-мат наук. – Киев–Нью-Йорк, 2007. – 315 с.
63. Гречко Л.Г., Лерман Л. Б., Шкода Н.Г. Багатошаровий еліпсоїд в електричному полі // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. Науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 386–394.
64. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Білокриницька Л.М., Шостак С.В. Поверхневі моди в багатошарових частинках еліпсоїдальної форми // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 4. – С. 416–425.
65. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Шкода Н.Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багатошаровій кулі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. Науки. – 2004. – Вип. 3. – С. 376–384.
66. Jonson P.V., Christy R.W. Optical Constants of the Noble Metals // Phys. Rev. B. – 1972. – V. 6, N 12. – P. 4370–4379.
67. Palik E.D. Handbook of Optical Constants of Solids. – New York: Academic Press, 1985. – 806 p.
68. Лерман Л.Б. Виникнення додаткових плазмових резонансів у шаруватих малих частинках // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2009. – Т. 7. – С. 37–47.
69. Лерман Л.Б. Возникновение дополнительных плазмонных резонансов в малых частицах с оболочкой // Химия, физика и технология поверхности. – 2008. – Вып. 14. – С. 91–100.
70. Породько Л.В., Лерман Л.Б. Электродинамическая энергия в сферических слоистых наночастицах // Технологический аудит и резервы производства. – 2013. – № 6/1 (14). – С. 41–44.
71. Люценко М.О., Лерман Л.Б., Криворучко Я.С. Взаємодія електромагнітного випромінювання з шаруватою сферичною лінзою // Вісн. Національного техн. ун-ту “Київськ. політехнічний ін-т. Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. – 2007. – В. 34. – С. 54–58.
72. Prashant K.J., Ivan H. El-Sayed, Mostafa A. El-Sayed. Au nanoparticles target cancer // Nanotoday. – 2007. – V. 2, N 1. – P. 18–29.

73. Hongxing Xu. Surface plasmon Photonics // Thesis for the degree of doctor of philosophy. Goteborg University. – 2002. – 92 p.
74. Chatterjee K., Banerjee S., Chakravorty D. Plasmon resonance shifts in oxide-coated silver nanoparticles // Phys. Rev. B. – 2002. – V. 66. – P. 085421-1–085421-7.
75. Zhu J. Theoretical study of the optical absorption properties of Au–Ag bimetallic nanospheres // Physica E. – V. 27, N 1–2. – 2005. – P. 296–301.
76. Huazhong S., Lide S., Weiping C. Composition modulation of optical absorption in Ag_xAu_{1-x} alloy nanocrystals in suti within pores of nanopores silica // J. Appl. Phys. – 2000. – V. 87, N 3. – P. 1572–1575.
77. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Корецький С.Л. та ін. Поглинання електромагнітного випромінювання біметалевими частинками та матрично–дисперсними системами на їх основі // Вісн. Київськ. університету. Сер. фіз.-мат. – 2008. – № 4. – С. 260–264.
78. Лерман Л.Б., Люценко М.О., Криворучко Я.С. Взаимодействие электромагнитного излучения с биметаллическими частицами, расположенными вблизи поверхности твердого тела // Химия, физика и технология поверхности. – 2009. – Вып. 15. – С. 51–54.
79. Moroz A. A recursive transfer–matrix solution for a dipole radiating and outside a stratified sphere // Annal. Phys. – 2005. – V. 315, N 2. – P. 352–418.
80. Wu Z.S., Wang Y.P. Electromagnetic scattering for multi-layered sphere: recursive algorithm // Radio Sci. – 1991. – V. 26, N 6. – P. 1393–1401.
81. Gurwicz I., Kleiman M., Shiloah N. et al. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure // Appl. Opt. – 2000. – V. 39, N 3. – P. 470–477.
82. Averitt R.D., Sarcar D., Halas N.J. Plasmon Resonance Shifts of Au-Coated Au_2S Nanoshells: Insight into Multicomponent Nanoparticle Growth // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 78, N 22. – P. 4217–4220.
83. Roth J., Digman M.J. Scattering and extinction sections for a spherical particles coated with an oriented molecular layer // J. Opt. Soc. Am. – 1973. – V. 63, N 3. – P. 308–311.
84. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. – Новосибирск: Наука, 1988. – 240 с.
85. Barber P.W. Light Scattering by Particles: Computational Methods. V.2. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1990. – 253 p.
86. Lerman L.B. Oscillation of flat layered shells with local elastic supports // Int. Appl. Mech. – 1994. – V. 30, N 2. – P. 129–134.
87. Lerman L.B. Application of planar elasticity equations to the investigation of vibrations of extended multilayered slabs with internal line supports // Int. Appl. Mech. – 1994. – V. 30, N 7. – P. 530–534.
88. Silveirinha M.G., Alu A., Engheta N. Parallel Plate Metamaterials for Cloaking Structures // Phys. Rev. E. – 2007. – V. 75. – P. 1–16.
89. Tricarico, S., Bilotti F., Vegni L. Scattering cancellation by metamaterial cylindrical multilayers // JEOS: RP. – 2009. – V. 4. – P. 0921-1–0921-10.
90. Qiu Ch.-W., Yao H.-Y., Burocur S.-N. et al. Electromagnetic Scattering Properties in a Multilayered Metamaterial Cylinder // IEICE Trans. Commun. – 2007. – V. E90-B, N 9. – P. 2423–2429.

REFERENCES

1. Venger E.F., Goncharenko A.V., Dmitruk M.L. *Optics of small particles and dispersive media*. (Kyiv: Naukova dumka, 1999). [in Ukrainian].
2. Boren C.F., Huffman D.R. *Absorption and scattering of light by Small Particles*. (New York: Wiley, 1983).
3. Gaponenko S.V., Rozanov N.N., Ivchenko E.L., Fedorov A.V., Baranov A.V., Bonch-Bruевич A.M., Vartanyan T.A., Przhibelsky S.G. *Optics of nanostructures*. (St. Petersburg: Nedra, 2005). [in Russian].
4. Bruggeman D.A.J. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. P.II. *Ann. Phys. Leipzig*. 1935. **24**(8): 665. [in German].
5. Lichtenecker K. Die Dielectrizitätskonstante natürlicher und Kunstlicher Mischkörper. *Physik Z.* 1926. **27**: 115. [in German].
6. Krivoruchko Ya.S. Determination of effective permeability of disperse media and use of radiometry to finding moisture content. *Surface*. 2011. **3**(8): 22. [in Ukrainian].
7. Pecharromán C., Iglesias E. Effective dielectric properties of insulator particles. *Phys. Rev. B*. 1994. **49**(11): 7137.
8. Jayannavar A.M., Kumar N. Generalization of Bruggeman’s unsymmetrical effective–medium theory to a three–component composite. *Phys. Rev. B*. 1991. **44**(21): 12014.

9. Wang J.R., Schmugge T.J. An Empirical Model for the Complex Dielectric Permittivity of Soils as a Function of Water Content. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 1980. **GE-18**(4): 2885.
10. Lerman L.B., Grischuk O.Yu., Shkoda N.G., Shostak S.V. Features of interaction electromagnetic radiation with small particles: theoretical aspects. *Usp. Fiz. Met.* 2012. **13**: 73. [in Ukrainian].
11. Lerman L.B., Luschenko M.O., Krivoruchko Ya.S. Interaction electromagnetic radiation with metal nanoslabs on surface of a solid. *Surface*. 2009. **1**(16): 271. [in Ukrainian].
12. Born M., Wolf E. *Principles of optics. Second edition*. (Oxford: Pergamon press, 1964).
13. Andreev L.V., Dashko A.L., Pavlenko I.D. *Dynamics of plates and shells with concentrated masses*. (Moscow: Mashinostroenie, 1988). [in Russian].
14. Amiro I.Ya., Zarutsky V.A., Palamarchuk V.G. *Dynamics of ribbed shells. Layered mediums*. (Moscow: Nauka, 1973). [in Russian].
15. Karmishin A.V., Lyaskovec V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statics and dynamics of thin-walled shell constructions*. (Moscow: Mashinostroenie, 1975). [in Russian].
16. Brehovskih L.M. *Waves in layered mediums*. (Moscow: Nauka, 1973). [in Russian].
17. Brehovskih L.M., Godik O.A. *Acoustics of layered mediums*. (Moscow: Nauka, 1989). [in Russian].
18. Grigorenko Ya.M., Bepalova A.T., Kitaigorodsky A.B., Shinkar' A.I. *Free vibrations of shell constructions elements. layered mediums*. (Kyiv: Naukova Dumka, 1986). [in Russian].
19. Hutchinson J.R. Vibration of plates. *Boundary Elements*. 1988. **4**: 415.
20. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. *Statics of anisotropic thick-walled shells*. (Kiev: Vyscha Shkola, 1985). [in Russian].
21. Asami K., Hanai T., Koizumi N. Dielectric Analysis of Escherichia Coli Suspension in the Light of the Theory of Interfacial Polarization. *Biophys. J.* 1980. **31**(2): 215.
22. Grecko L.G., Lerman L.B., Vodopianov D.L., Shostak S.V. Polarizability structural-nonuniform spherical particles. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2007. **1**: 416. [in Ukrainian].
23. Gurwich I., Kleiman M., Shiloah N., Cohen A. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure. *Appl. Opt.* 2000. **39**(3): 470.
24. Putilin E.S. *Optical coatings. School-book on course «Optical coatings»*. (St. Petersburg: SPbGUITMO, 2005). [in Russian].
25. Atabekov G. *Theoretical footings of electrical engineering. Linear electric circuits*. (Publishing house. Lan. 7th edition, 2009). [in Russian].
26. He B., Rui X., Zhang H. Transfer Matrix Method for Natural Vibration Analysis of Tree System. *Mathematical Problems in Engineering*. 2012. **2012**: Article ID 393204.
27. Khorasani S., Adibi A. Analytical solution of linear ordinary differential equations by differential transfer matrix method. *Electronic J. of Differential Equations*. 2003. **2003**(79): 1.
28. Samarsky A.A., Nikolaev E.S. *Methods of grid equations solutions*. (Moscow: Nauka, 1978). [in Russian].
29. Adams V., Askenazi A. *Building Better Products with Finite Element Analysis PDF*. (On Word Press; 1st edition. October 1, 1998).
30. Ainsworth M., Oden J., Tinsley A. *Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis* DJVU. (John Wiley & Sons, Inc., 2000).
31. Kantorovich L.V., Krylov A.I. *Approximate methods of higher analysis*. (Leningrad, Moscow: Gostechisdat, 1949). [in Russian].
32. Zuev V.E., Naats I.E. *Inverse problems of laser probing*. (Novosibirsk: Nauka, 1982). [in Russian].
33. Kokurin M.Yu., Paimirov S.K. Inverse Coefficient Problem for a Wave Equation in a Bounded Domain. *Comput. Math. Math. Phys.* 2008. **48**(1): 109.
34. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. (Moscow: Nauka, 1980. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1986).
35. Romanov V.G. *Stability of Inverse Problems*. (Moscow: Nauchnyi Mir, 2005).
36. Denisov A.M. *Introduction to the Theory of Inverse Problems*. (Moscow: Mosk. Gos. Univ., 1994). [in Russian].
37. Lerman L.B., Luschenko M.A., Krivoruchko Ya.S., Skoda N.G., Shostak S.V. Inverse problems of optical and dielectrical spectroscopy of nanoparticles and dewy porous media. *Chemistry, physics and technology of surface*. 2008. **14**: 101. [in Russian].
38. Krivoruchko Ya.S. Determination of effective permittivity of heterogeneous media and estimation of moisture content in soils. *Surface*. 2011. **3**(18): 22. [in Ukrainian].
39. Krivoruchko Ya.S., Lerman L.B., Luschenko M.A., Yakymiv R.Ya. Determination of soils humidity of porous media (inverse problems). *Bulletin of National Technical university "Kyivsky politechnichesky institut". Seria: Radio engineering. Radioinstrument-making*. 2007. **35**: 49. [in Ukrainian].

40. Grechko L.G., Eremenko A.M., Krylona G.V., Lerman L.B., Smirnova N.P., Shkoda N.G. Optical properties of small silver particles in colloidal solutions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2004. **4**: 450. [in Ukrainian].
41. Tichonov A.N., Arsenin V.Ya. *Soution methods of incorrectly formulated problems*. (Moscow: Nauka, 1986). [in Russian].
42. Shifrin K.S. *Light scattering in turbid medium*. (Moscow-Leningrad: GITTL, 1951). [in Russian].
43. Godunov S.K. *Equations of mathematical physics*. (Moscow: Nauka, 1982). [in Russian].
44. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of mathematical physics*. (Moscow: Nauka, 1972). [in Russian].
45. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Equations in partial derivatives of mathematical physics*. (Moscow: Vishaya shkola, 1970). [in Russian].
46. Kartashov E.M. Integral transform method in analytical theory of heat conduction of solids. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Energy*. 1993. **2**: 99.
47. Kamke E. *Gewöhnliche differentialgleichungen*. (Leipzig, 1959). [in German].
48. Korn G.A., Korn M.S. *Mathematical handbook for scientists and engineers. Second, enlargend and reviesed edition*. (New York: McGraw Hill Book Company, 1968).
49. Tugolukov E.N. *Solving of thermal conductivity problems by finite integral transform method. School-book*. (Tambov: Publishing house of Tambov State Technical University, 2005). [in Russian].
50. Drexler K.E. *Nanosystems. Molecular Machinery, Manufacturing, and Computation*. (New York: Wiley, 1992).
51. Kik P.G. *Surface Plasmon Nanofotonics*. (Springer, 2007).
52. Giharev I.V., Lyashenko V.I. Nanotechnology in the world and in the Ukraine. *Donetsk Reional Economics Bulletin*. 2007. **1**: 117. [in Russian].
53. Krushenko G.G. Some aspects of use of nanotechnology. *Nanotechnology*. 2008. **1(13)**: 9.
54. Hutter B.E., Fendler J.H. Exploitation of localized surface plasmon resonance. *Advanced Materials*. 2004. **16(19)**: 1685.
55. Kelly K.L., Coronado E., Zhao L.L., Schatz G.C. The optical properties of metal nanoparticles: the influence of size, shape, and dielectric environment. *J. Phys. Chem. B*. 2003. **107(3)**: 668.
56. Noguez C. Surface plasmons on metal nanoparticles: the influence of shape and physical environment. *J. Phys. Chem. C*. 2007. **111(14)**: 3606.
57. Lee K.S., El-Sayed M.A. Gold and silver nanoparticles in sensing and imaging: sensitivity of plasmon response to size, shape, and metal composition. *J. Phys. Chem. B*. 2006. **110(39)**: 19220.
58. Motl N.E., Ewusi-Annan E., Sines I.T., Jensen L., Schaak R.E. Au-Cu alloy nanoparticles with tunable compositions and plasmonic properties: experimental determination of composition and correlation with theory. *J. Phys. Chem. C*. 2010. **114(45)**: 19263.
59. Blaber M.G., Arnold M.D., Ford M.J. A review of the optical properties of alloys and intermetallics for plasmonics. *J. Phys. Condens. Matter*. 2010. **22(14)**: Article ID 143201.
60. Mischenko M.I., Hovenier I.V., Travis L.D. *Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements, and Applications*. (New York: Academic press, 2002).
61. Wen-Chi Hung. *A Steady of Surface Plasmon Effect Exited on Metal Nanoparticles*. – A thesis submitted in partical Sulilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. (Inst. of Electro–Optical Engineering National Sun Yat-sen University Kaohsiung, Taivan, R.O.C., 2008).
62. Mischenko M.I. Doctor (Doctor of Physics and Mathematics Science). Thesis. (Kyiv–New York, 2007).
63. Grecko L.G., Lerman L.B., Shkoda N.G. Multi-layered ellipsoid in electrical field. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2004. **1**: 386. [in Ukrainian].
64. Grecko L.G., Lerman L.B., Bilokrinithka L.M., Shostak S.V. Surface modes in multi-layered particles of ellipsoidal form. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2006. **4**: 416. [in Ukrainian].
65. Grecko L.G., Lerman L.B., Shkoda N.G. Scattering of electromagnetic radiation on multi-layered sphere. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2004. **3**: 376. [in Ukrainian].
66. Jonson P.B., Christy R.W. Optical Constants of the Noble Metals. *Phys. Rev. B*. 1972. **6(12)**: 4370.
67. Palik E.D. *Handbook of Optical Constants of Solids*. (New York: Academic Press, 1985).
68. Lerman L.B. Generation of additional plasmon resonances in layered small particles. *Nanosystems, nanomaterials, nanotechnologies*. 2009. **7**: 37.
69. Lerman L.B. Generation of additional plasmon resonances in small particles with shell. *Chemistry, Physics and Technology of Surface*. 2008. **14**: 91.
70. Porod'ko L.V., Lerman L.B. Electrodynamic energy in spherical layered particles. *Technological audit and production reserves*. 2013. **6/1(14)**: 41.

71. Luschenko M.A., Lerman L.B., Krivoruchko Ya.S. Interaction electromagnetic radiation with alyered spherical lens. *Bulletin of National Technical univercity "Kyivsky politechnichesky institut". Seria: Radio engineering. Radioinstrument-making.* 2007. **34**: 54. [in Ukrainian].
72. Prashant K.J., Ivan H.El-Sayed, Mostafa A.El-Sayed. Au nanoparticles target cancer. *Nanotoday.* 2007. **2**(1). 18.
73. Hongxing Xu. *Surface plasmon Photonics. Thesis for the degree of doctor of philosophy.* (Geteborg University, 2002).
74. Chatterjee K., Banerjee S., Chakravorty D. Plasmon resonance shifts in oxide-coated silver nanoparticles. *Phys. Rev. B.* 2002. **66**: 085421-1.
75. Zhu J. Theoretical study of the optical absorption properties of Au-Ag bimetallic nanospheres. *Physica E.* 2005. **27**(1-2): 296.
76. Huazhong S., Lide S., Weiping C. Composition modulation of optical absorption in Ag_xAu_{1-x} alloy nanocrystals in suti within pores of nanopores silica. *J. Appl. Phys.* 2000. **87**(3): 1572.
77. Grechko L.G., Lerman L.B., Koretskyi S.L., Krivoruchko Ya. S., Shostak S.V. Absorption of electromagnetic irradiation by bimetal particles and matrix disperse systems with such inclusion. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* 2008. **4**: 260. [in Ukrainian].
78. Lerman L.B., Luschenko M.A., Krivoruchko Ya.S. Interaction of electromagnetic irradiation with bimetallic particles near surface of solid. *Chemistry, physics and technology of surface.* 2009. **15**: 15. [in Russian].
79. Moroz A. A recursive transfer-matrix solution for a dipole radiating and outside a stratified sphere. *Annal. Phys.* **2005. 315**: 352.
80. Wu Z.S., Wang Y.P. Electromagnetic scattering for multi-layered sphere: recursive algorithm. *Radio Sci.* 1991. **26**: 1393.
81. Gurwich I. Kleiman M., Shiloah N., Cohen A. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure. *Appl. Opt.* 2000. **39**(3): 470.
82. Averitt R.D., Sarcar D., Halas N.J. Plasmon Resonance Shifts of Au-Coated Au_2S Nanoshells: Insight into Multicomponent Nanoparticle Growth. *Phys. Rev. Lett.* 1997. **78**(22): 4217.
83. Roth J., Digman M.J. Scattering and extinction sections for a spherical particles coated with an oriented molecular layer. *J. Opt. Soc. Am.* 1973. **63**(3): 308.
84. Lopatin V.N., Sydko F.Ya. *Introduction to optics cell suspensions.* (Novosibirsk: Nauka, 1988). [in Russian].
85. Barber P.W. *Light Scattering by Particles: Computational Methods. V.2.* (Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1990).
86. Lerman L.B. Oscillation of flat layered shells with local elastic supports. *Int. Appl. Mech.* 1994. **30**(2): 129.
87. Lerman L.B. Application of planar elasticity equations to the investigation of vibrations of extended multilayered slabs with internal line supports. *Int. Appl. Mech.* 1994. **30**(7): 530.
88. Silveirinha M.G., Alu A., Engheta N. Parallel Plate Metamaterials for Cloaking Structures. *Phys. Rev. E.* 2007. **75**(036603): 1.
89. Tricarico S., Bilotti F., Vegni L. Scattering cancellation by metamaterial cylindrical multilayers. *JEOS: RP.* 2009. **4**: 0921-1.
90. Qiu Ch.-W., Yao H.-Y., Burocur S.-N. Electromagnetic Scattering Properties in a Multilayered Metamaterial Cylinder. *IEICE Trans. Commun.* 2007. **E90-B**(9): 2423.

Поступила 09.06.2015, принята 16.06.2016