КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.6:539.3
DOI:10.34229/2707-451X.20.1.4

А.А. АРАЛОВА

ПРО ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЩІЛЬНОСТІ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ ТЕМПЕРАТУРНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОРОЖНИНОЮ

Розглянуто деякі питання розв'язання, з допомогою градієнтних методів, обернених задач теплопровідності складеного циліндру. Представлено результати розв'язання деяких модельних прикладів.

Ключові слова: *температурний стан, градієнтні методи, циліндричні тіла.*

Вступ. В умовах активного застосування композитних матеріалів, а також при задачах подовження ресурсу експлуатації існуючих конструкцій, виникають задачі відновлення невідомих параметрів складових їх частин при наявності даних на їх поверхнях. У роботах [1–4] для розв'язання задач ідентифікації параметрів широкого кола запропоновано будувати явні вирази градієнтів функціоналів нев'язок за допомогою відповідних спряжених задач, отриманих з теорії оптимального керування станами багатокомпонентних розподілених систем, яка є розвитком відповідних досліджень Ж.Л. Ліонс. У роботах [5–7] ця технологія поширена на задачі термопружного деформування багатокомпонентних тіл.

У даній статті розглянуто деякі проблеми оптимального керування температурним станом циліндричного тіла з порожниною. Представлені результати розв'язання модельної задачі з ідентифікації потужності теплового потоку при відомих спостереженнях.

1. Оптимальне керування температурним станом циліндричного тіла з порожниною.

Розглянемо довгий товстий ізотропний круговий циліндр з порожниною. Розподіл температури T задовольняє рівнянню [8, 9]:

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)=f(r),\ r\in\Omega, \qquad (1)$$

де $\Omega=(r_1,r_2)$; T – зміна температури $\overline{T}$ від початкового її стану $\overline{T}_0$; r – радіальна координата циліндричної системи координат (r, φ, z); k – коефіцієнт теплопровідності (r, φ, z); k – коефіцієнт теплопровідності; $f(r)|_\Omega\in C(\Omega)$. Крайові умови

$$-k\frac{dT}{dr}=-\alpha_1 T+u_1,\ r=r_1, \qquad (2)$$

$$k\frac{dT}{dr}=u_2,\ r=r_2. \qquad (3)$$

При кожному фіксованому $u(u_1,u_2)\in\mathcal{U}$ будемо використовувати узагальнений розв'язок задачі (1) – (3), тобто функцію $T(r)\in V$, яка $\forall z(r)\in V$ задовольняє рівності:

$$a(y;z)=l(u;z), \tag{4}$$

де $V=\left\{v(r):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega)\right\}$, $W_2^1(\Omega)$ – простір функцій Соболєва визначених на області Ω,

$$a(T,w)=\int_{r_1}^{r_2} rk\frac{dT}{dr}\frac{dw}{dr}dr+\alpha_1 r_2 T(r_2)w(r_2),$$
$$l(u;w)=\int_{r_1}^{r_2} r\bar{f}wdr+r_1u_1w(r_1)+u_2r_2w(r_2). \tag{5}$$

Задано спостереження

$$T(r_i)=f_i,\ r_i\in\Omega,\ i=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Поставимо у відповідність кожному керуванню $u(u_1,u_2)\in U=R$ значення функціонала вартості

$$J(u)=\left\|CT(u)-z_g\right\|_{\mathcal{H}}^2+(\bar{a}u,u)_{\mathcal{U}}, \tag{7}$$

де відомий елемент $z_g(z_{g1},z_{g2})\in\mathcal{H}=R$, $\bar{a}$ = const > 0.

Нехай $T'=T(u')$, $T''=T(u'')$ – розв'язки з V задачі (4) при елементі $u\in\mathcal{U}$, що дорівнює відповідно u',u''. Врахувавши узагальнену нерівність Фрідріхса [4] маємо $\alpha'|T'-T''|^2(r_i)\le\alpha\|T'-T''\|_V^2\le a(T'-T'',T'-T'')=r_1(u'-u'')(T'-T'')\le c_0|u'-u''|\|T'-T''\|_V$.

Отримана нерівність забезпечує неперервність на $\mathcal{U}$ лінійного функціоналу $L(\cdot)$ та білінійної форми $\pi(\cdot,\cdot)$ представлення

$$J(u)=\left\|T(u)-z_g\right\|_{\mathcal{H}}^2+(\bar{a}u,u)=\pi(u,u)-2L(u)+\left\|z_g-\Upsilon(0)\right\|_{\mathcal{H}}^2,$$

де $\Upsilon(v)=T(v;r_2)$, $L(v)=\left(z_g-\Upsilon(0),\Upsilon(v)-\Upsilon(0)\right)_{\mathcal{H}}=\left(z_g-T(0;r_2)\right)\left(T(v;r_2)-T(0;r_2)\right)$,
$\pi(u,v)=\left(\Upsilon(u)-\Upsilon(0),\Upsilon(v)-\Upsilon(0)\right)_{\mathcal{H}}+(\bar{a}u,v)$.

На основі [9, гл. 1, теорема 1.1] доведено твердження.

Теорема 1. Нехай стан системи визначається як єдиний розв'язок задачі (4). Тоді існує єдиний елемент *u* опуклої замкнутої в $\mathcal{U}$ множини $\mathcal{U}_\partial$ для якого

$$J(u)=\inf_{w\in\mathcal{U}_\partial} J(w). \tag{8}$$

Виходячи з [2, 3], спряжений стан $\psi(r)\in V^*=V$ для кожного керування $v\in\mathcal{U}$ визначається як узагальнений розв'язок крайової задачі, заданої рівностями:

$$-\frac{d}{dr}\left(rk\frac{d\psi}{dr}\right)=0,\quad r\in\Omega,$$
$$-k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_1}=\frac{e_1(v)}{r_1},\quad k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_2}=-\bar{\alpha}\psi(r_2)+\frac{e_2(v)}{r_2}, \tag{9}$$
$$e_1(v)=T(v;r_1)-z_{g1},\ \ e_2(v)=T(v;r_2)-z_{g2}.$$

Визначення 1. Узагальненим розв'язком задачі (9) називається функція $\psi \in V$, яка $\forall z \in V$ задовольняє рівності

$$a(\psi, z) = e_i(v) z(r_i) \tag{10}$$

або доставляє на V мінімум функціоналу

$$\Phi(w) = a(w,w) - 2\left(T - z_{gi}\right) w\Big|_{r=r_i}. \tag{11}$$

Виходячи з [2, 10] єдине оптимальне керування $u \in \mathcal{U}$ визначається рівностями (4), (10) та нерівністю

$$\begin{aligned} &\left(T(u_1) - z_{g1}, T(\nu) - T(u_1)\right)_H + (\bar{a}u_1, \nu - u_1)_U \geq 0, \\ &\left(T(u_2) - z_{g2}, T(\nu) - T(u_2)\right)_H + (\bar{a}u_2, \nu - u_2)_U \geq 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\forall v \in \mathcal{U}_\partial$.

При $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (випадок відсутності обмежень) маємо

$$r_1\psi(r_1) + \bar{a}u_2 = 0, \; r_2\psi(r_2) + \bar{a}u_1 = 0. \tag{13}$$

Тобто

$$u_1 = -\frac{r_2\psi(r_2)}{\bar{a}}, \; u_2 = \frac{r_1\psi(r_1)}{\bar{a}}. \tag{14}$$

2. Чисельна дискретизація задачі температурного стану товстої довгої циліндричної оболонки.

Введемо до розгляду підпростір $\overline{\mathcal{H}}_k^N \in H$ неперервних на $[r_1, r_2]$, квадратичних функцій виду, $v_2^N(r) = \alpha_1^i + \alpha_2^i r + \alpha_3^i r^2$, $i = \overline{0, N}$. Тоді $\Phi\left(u; v_2^N\right) = a\left(v_2^N; v_2^N\right) - 2l\left(u; v_2^N\right)$ приймає наступний вигляд:

$$\Phi(z) = \int_{r_1}^{r_2} rk\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 dr + \alpha_2 r_2 \left(z(r_2)\right)^2 - 2\left(\int_{r_1}^{r_2} fz dr + u_1 r_1 z(r_1) + u_2 r_2 z(r_2) + \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} rk\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 dr +$$

$$+\alpha_2 r_2 \left(z(r_2)\right)^2 - 2\left(\sum_{i=0}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} fz dr + ur_1 z(r_1) + u_2 r_2 z(r_2)\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_0^1 k(r_i + h_i\eta)\left(\frac{\beta_2^i + 2\beta_3^i \eta}{h_i}\right)^2 h_i d\eta\right) -$$

$$-2\left(\sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 h_i f\left(\beta_1^i + \beta_2^i \eta\right) d\eta + ur_1 z(r_1) + u_2 r_2 z(r_2)\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{k}{6h_i} \left((6r_i + 3h_i)\varpi_i^T \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 \\ -12 & 16 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \varpi_i + \right.$$

$$\left. +(6r_i + 4h_i)\varpi_i^T \begin{pmatrix} -12 & 20 & -8 \\ 20 & -32 & 12 \\ -8 & 12 & -4 \end{pmatrix} \varpi_i + (8r_i + 6h_i)\varpi_i^T \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \varpi_i \right) -$$

$$-2\left(\sum_{i=0}^{N-1}\omega_i^T\begin{pmatrix} h_i\int\limits_0^1 f(\eta)d\eta-3h_i\int\limits_0^1\eta f(\eta)d\eta+2h_i\int\limits_0^1\eta^2 f(\eta)d\eta \\ 4h_i\int\limits_0^1\eta f(\eta)d\eta-4h_i\int\limits_0^1\eta^2 f(\eta)d\eta \\ -h_i\int\limits_0^1\eta f(\eta)d\eta+2h_i\int\limits_0^1\eta^2 f(\eta)d\eta \end{pmatrix}+r_1u_1z(r_1)-r_2u_2z(r_2)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{k}{6h_i}\left(\varpi_i^T\begin{pmatrix} 14r_i+3h_i & -16r_i-4h_i & 2r_i+h_i \\ -16r_i-4h_i & 32r_i+16h_i & -16r_i-12h_i \\ 2r_i+h_i & -16r_i-12h_i & 14r_i+11h_i \end{pmatrix}\varpi_i\right)-$$

$$-2\left(\sum_{i=0}^{N-1}\omega_i^T\begin{pmatrix} h_i\int\limits_0^1 f(\eta)d\eta-3h_i\int\limits_0^1\eta f(\eta)d\eta+2h_i\int\limits_0^1\eta^2 f(\eta)d\eta \\ 4h_i\int\limits_0^1\eta f(\eta)d\eta-4h_i\int\limits_0^1\eta^2 f(\eta)d\eta \\ -h_i\int\limits_0^1\eta f(\eta)d\eta+2h_i\int\limits_0^1\eta^2 f(\eta)d\eta \end{pmatrix}+r_1u_1z(r_1)-r_2u_2z(r_2)\right)=$$

$$=V^TAV-V^TB, \tag{15}$$

де $V^T=(V_0,V_1,\ldots,V_N)$ – значення розв'язку $y_2^N(u_n;r)$ у вузлових точках r_i, $r_{i+1/2}$ $i=\overline{0,N}$, A – симетрична додатньо визначена матриця розмірності (2N+1)×(2N+1), $B=\{b_i\}_{i=0}^N$, $r_i=r^i$. За допомогою перетворення $r=r_i+h_i\eta$, $h_i=r^{i+1}-r^i$, $V_1^N(r(\eta))=\beta_1^i+\beta_2^i\eta+\beta_3^i\eta^2$, де $\beta_1^i,\beta_2^i,\beta_3^i$ = const. На основі (15) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $AV=B$.

При кожному $u=u_n$ для наближення $y_2^N(u_n;r)\in\mathcal{H}_2^N$ розв'язку $y(u_n)\in\mathcal{H}$ задачі (11) має місце оцінка

$$\left\|y(u_n)-y_2^N(u_n)\right\|_{W_2^1(r_1,r_2)}\le Ch^2, \tag{16}$$

де C = const, $h=\max h_i$.

3. Ідентифікація потужності теплового потоку на зовнішній та внутрішній поверхнях тіла при відомій на них температурі.

Нехай стан системи описується крайовою задачею (1) – (3), де $u\in\mathcal{U}$ невідоме. Вважаємо, що в точці $r=r_2$ відома температура

$$T(r_1)=f_1,\ T(r_2)=f_2. \tag{17}$$

Введемо до розгляду функціонал-нев'язку

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\left(T(u;d_i)-f_i\right)^2, \tag{18}$$

де $d_i=\overline{r_1,r_2}$.

Визначення 2. При кожному фіксованому $u=(u_1,u_2)\in\mathcal{U}=R\times R$ узагальненим розв'язком крайової задачі (1) – (3), (17) називається вектор функція $T\in\mathcal{H}$, яка $\forall z\in\mathcal{H}$ задовольняє системі рівностей виду (4), де білінійні форми $a(\cdot,\cdot)$ та $l(u;z)$ мають вигляд (5).

Теорема 2. При кожному фіксованому $u\in U$ узагальнений розв'язок T крайової задачі (1) – (3), (18) існує та єдиний в $\mathcal{H}$.

Задачу (4), (18) будемо розв'язувати за допомогою градієнтних методів О.М. Аліфанова. Для розв'язання задачі (1) – (3), (18) використаємо градієнтні методи [11]:

$$u^{n+1}=u^n-\beta^n p^n,\ \ n=0,1,\ldots,n^*. \tag{19}$$

Напрямок спуску p_n та коефіцієнт β_n можна визначити за допомогою формул:

- для методу мінімальних нев'язок

$$p^n=J'_{u^n},\ \ \beta^n=\frac{\left\|e^n\right\|^2}{\left\|J'_{u^n}\right\|^2}, \tag{20}$$

- для методу найшвидшого спуску

$$p^n=J'_{u^n},\ \ \beta^n=\frac{\left\|J'_{u^n}\right\|^2}{\left\|AJ'_{u^n}\right\|^2}, \tag{21}$$

- для методу спряжених градієнтів

$$p^n=J'_{u^n}+\gamma^n p^n,\ \ \gamma^0=0, \tag{22}$$

де $\gamma_n=\dfrac{\left\|J'_{u^n}\right\|^2}{\left\|J'_{u^{n-1}}\right\|^2},\quad \beta_n=\dfrac{(J'_{u^n},p^n)}{\left\|Ap^n\right\|^2}$.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}\pi(u,v)&=\left(\overline{T}(u)-\overline{T}(0),\overline{T}(v)-\overline{T}(0)\right),\\ L(v)&=\left(f_0-\overline{T}(0),\overline{T}(v)-\overline{T}(0)\right),\end{aligned} \tag{23}$$

де $\overline{T}(v)=\{T(v,r_i)\}_{i=0}^{m}$.

Так як

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\left(f_0-\overline{T}(0),f_0-\overline{T}(0)\right),$$

то

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right)}{\lambda}=\pi\left(u,v-u\right)-L\left(v-u\right)=$$
$$=\left(\overline{T}\left(u\right)-f_0,\overline{T}\left(v\right)-\overline{T}\left(u\right)\right)=\left\langle J_u^{'},v-u\right\rangle. \qquad (24)$$

Для кожного наближення u_{n+1} розв'язку $u\in\mathcal{U}$ введемо до розгляду спряжену задачу

$$-\frac{d}{dr}\left(rk\frac{d\Psi}{dr}\right)=0,\qquad r\in\Omega_d,$$
$$\left[\Psi\right]\Big|_{r=d_i}=0,\qquad \left[rk\frac{d\Psi}{dr}\right]\Big|_{r=r_i}=-\frac{1}{r_i}e_n,\ \ i=\overline{1,m}, \qquad (25)$$

де $\Omega_d=\Omega\setminus\gamma_d$, $\gamma_d=\{r_i\}_{i=1}^m$.

Визначення 3. Узагальненим розв'язку крайової задачі (25) називається функція $\Psi\in\mathcal{H}_d$, що $\forall z\in\mathcal{H}_d$ задовольняє системі тотожностей

$$a\left(\Psi,z\right)=\sum_{i=0}^{m}\left(T\left(u_n,r_i\right)-f_i\right)z\left(r_i\right), \qquad (26)$$

де $\mathcal{H}_d=\left\{v: v\big|_{\Omega_j}\in W_2^1\left(\Omega_j\right),\left[v_j\right]\Big|_{r=r_j}=0,\ j=\overline{1,m}\right\}$.

Нехай $z=T\left(u_{n+1}\right)-T\left(u_n\right)$, тоді на основі (26) отримаємо

$$\left\langle J_{u_n}^{'},\Delta u_n\right\rangle=\sum_{i=0}^{m}\left(T\left(u_n,r_i\right)-f_i\right)\left(T\left(u_{n+1},r_i\right)-T\left(u_n,r_i\right)\right)=$$
$$=\Delta u_{1n}r_1\Psi\left(r_1\right)+\Delta u_{2n}r_2\Psi\left(r_2\right). \qquad (27)$$

Отже

$$J_{u_n}^{'}=\Psi_n, \qquad (28)$$

де $\Psi_n=\left\{\Psi_n^1,\Psi_n^2\right\}$, $\Psi_n^1=r_1\Psi\left(r_1\right)$, $\Psi_n^2=r_2\Psi\left(r_2\right)$.

Тоді, функціонал-нев'язка приймає вигляд

$$J\left(u\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left|T\left(u;r_i\right)-f_i\right|^2. \qquad (29)$$

У даному випадку p_n та коефіцієнт β_n визначаємо за формулою (20).

Оскільки, $\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle=\left(T\left(u_n\right)-f_0,T\left(u_{n+1}\right)-T\left(u_n\right)\right)\Big|_{r=r_2}=r_1\psi\left(r_1\right)\Delta u_n-r_2\psi\left(r_2\right)\Delta u_n$, то

$$J'_{u_n}=r_1\psi\left(r_1\right)\Delta u_n-r_2\psi\left(r_2\right)\Delta u_n. \qquad (30)$$

Приклад. Нехай $r_1 = \pi/8$, $r_2 = \pi/2$. Класичний розв'язок крайової задачі (1) – (3) на відрізку $\left[\pi/6, \pi/4\right]$ приймає вигляд $T = -0{,}1\cos(0{,}7r) + 1{,}2$; $\alpha_2 = 1{,}3$; $\beta_2 = 2{,}121$; $k_1 = 2{,}3$, $u_1 = 0{,}379$, $u_2 = 0{,}239$. Вважаємо в цій задачі $u \in \mathcal{U}$ невідомим. Для наведених вхідних даних задача розв'язана з допомогою градієнтних методів, де на кожному кроці визначення $(n+1)$-го наближення u_{n+1} розв'язку $u \in \mathcal{U}$ пряма та спряжена задачі розв'язані за допомогою методу скінчених елементів з використанням кусково-квадратичних функцій шляхом мінімізації відповідного функціоналу енергії. В цьому випадку похибка методу $O\left(h^2\right)$ в нормі простору Соболєва $W_2^1(\Omega)$, h – найбільша з довжин всіх скінчених елементів. В таблиці наведено результати чисельного експеримента, де u_0 – початкове наближення ітераційного процесу; $u_{1,2}$ – кінцеве значення; e_n – похибка; h_i – довжина розбиття; n – номер ітерації, на якій закінчується ітераційний процес.

ТАБЛИЦЯ

	u_0	1	0	10	–10	10	100	10
	u_1	0.379	0.379	0.379	0.379	0.379	0.379	0.379
	u_2	0.293	0.293	0.293	0.293	0.293	0.293	0.293
$f_0 = 3.06$	e_{1n}	$-2{*}10^{-15}$	$-1{*}10^{-15}$	$-6{*}10^{-15}$	$2{*}10^{-15}$	$-1{*}10^{-15}$	$5{*}10^{-15}$	$4{*}10^{-15}$
	e_{2n}	$3{*}10^{-15}$	$1{*}10^{-15}$	$2{*}10^{-15}$	$-6{*}10^{-15}$	$2{*}10^{-15}$	$1{*}10^{-15}$	$7{*}10^{-15}$
	h_i	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

Висновок. На основі теорії оптимального керування проведено дослідження керування температурним станом довгого циліндру з порожниною. Розглянуто задачу ідентифікації потужності теплового потоку на зовнішній та внутрішній поверхнях при відомій на них температурі. Розв'язано деякі модельні приклади.

Список літератури

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев: Наук. думка, 2009. 640 с.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров задачи о напряженно-деформированном состоянии многокомпонентного упругого тела с включением. *Прикладная механика.* 2010. 46 (4). С. 14–24.
3. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. 400 p.
4. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 2001. 606 с.
5. Аралова А.А., Дейнека В.С. Численное решение обратных краевых задач осесимметричного термоупругого деформирования длинного толстого полого цилиндра. *Компьютерная математика.* 2011. Вып. 1. С. 3–12. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/84653
6. Аралова А.А., Дейнека В.С. Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого цилиндра. Доповіді національної академії наук України. 2012. 5. С. 38 – 42. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/49803
7. Аралова А.А. Численное решение обратных задач термоупругости для составного цилиндра. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. 5. С. 164 –172. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/124706
8. Коваленко А.Д. Термоупрогость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
9. Мотовилевец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. *Термоупругость.* Киев: Наук. думка, 1987. 264 с.
10. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
11. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.

Одержано 21.01.2020

Аралова Альбіна Андріївна,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
aaaralova@gmail.com

УДК 519.6:539.3

А.А. Аралова

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕПЛОПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЯ ТЕПЛОВОЙ КРУГОВОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев, Украина
Переписка: aaaralova@gmail.com

Введение. В условиях активного применения композитных материалов, а также при задачах продления ресурса эксплуатации существующих конструкций, возникают задачи восстановления неизвестных параметров составных их частей при наличии данных на их поверхности. В работах [1–4] авторства И.В. Сергиенко и В.С. Дейнеки, для решения задач идентификации параметров широкого круга применения, предложено строить явные выражения градиентов функционалов-невязок с помощью соответствующих сопряженных задач, полученных из теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем, которая является развитием соответствующих исследований Ж.Л. Лионса. В работах [5–7] эта технология распространена на задачи термоупругого и температурного деформирования составных цилиндрических тел. В данной статье рассмотрены некоторые проблемы оптимального управления температурным состоянием цилиндрического тела с полостью. Рассмотрена проблема идентификации мощности теплового потока на внешней и внутренней поверхностях при известной на этих поверхностях температуре.

Цель работы. Показать алгоритм идентификации параметров цилиндрической полой оболочки, основываясь на теории оптимального управления и с применением градиентных методов Алифанова.

Результат. На основе теории оптимального управления проведено исследование управления температурным состоянием полой цилиндрической оболочки. Для решения задачи идентификации параметров полой цилиндрической оболочки, а именно, нахождения мощностей теплового потока на ее внешней и внутренней поверхностях, исходя из [1, 2, 5–7], построена прямая задача и соответствующая ей сопряженная задача, а так же градиенты функционалов невязки. Рассмотрены вопросы существования и единственности соответствующего оптимального управления, приведены теоремы и их доказательство. Проведена дискретизация методом конечных элементов с помощью кусочно-квадратичных функций и представлены оценки точности для нее. Исходная задача в приведенных модельных примерах решена с помощью градиентных методов, где на каждом шагу определения (n + 1)-го приближения решения, прямая и сопряженная задачи решены с помощью метода конечных элементов с использованием кусочно-квадратичной функции путем минимизации соответствующего функционала энергии. Решен ряд модельных примеров, результаты которых представлены в статье.

Ключевые слова: температурное состояние, градиентные методы, цилиндрические тела.

UDC 519.6:539.3

A. Aralova

ON CERTAIN PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF THERMAL DENSITY OF THE TEMPERATURE STATE OF THE HOLLOW CYLINDER SHELL

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine
Correspondence: aaaralova@gmail.com

Introduction. In conditions of the active use of composite materials, as when accomplishing the tasks of extending the service life of existing structures, problems on recovering unknown parameters of their components under the known data on their surface arise. In [1–4], to solve the problems of identification of parameters of a wide range, it is proposed to construct explicit expressions of the gradients of residual functionals by means of the corresponding conjugate problems obtained from the theory of optimal control of the states of multicomponent distributed systems, which is the development of the corresponding researches of Zh. Lyons. In [5–7], this technology is extended to the problem of thermoelastic deformation of multicomponent bodies. In this article some problems of optimal control of the temperature state of a cylindrical body with a cavity are considered.

The purpose of the paper is to show the algorithm for identifying the parameters of a cylindrical hollow shell, based on the theory of optimal control and using the gradient methods of Alifanov.

Results. Based on the theory of optimal control, the temperature control of a cylindrical shell is studied. To solve the problem of identifying the parameters of a hollow cylindrical shell, namely, finding the heat flux powers on its surfaces, based on [1, 2, 5–7], a direct and conjugate problem and gradients of non-viscous functionals are constructed. Discretization by the finite element method using piecewise quadratic functions is carried out and accuracy estimates for it are presented. The initial problem in the model examples presented is solved using gradient methods, where at each step of determining the (n + 1) the approximation of the solution, the direct and adjoint problems are solved using finite element method with the help piecewise quadratic functions by minimizing the corresponding energy functional. A number of model examples solved.

Keywords: temperature state, gradient methods, cylindrical bodies.