КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 517.9:519.6 DOI:10.34229/2707-451X.20.1.5

О.О. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНОСУ

Для осесиметричної початково-крайової задачі волого- та теплопереносу із змішаними неоднорідними крайовими умовами отримано оцінки швидкості збіжності неперервного за часом та дискретного наближених розв'язків, побудованих на базі методу скінченних елементів.

Ключові слова: *вологоперенос, теплоперенос, осесиметрична початково-крайова задача, узагальнений розв'язок, метод скінченних елементів (МСЕ), схема Кранка – Нікольсона.*

Вступ. Пропонується алгоритм розрахунку динаміки неізотермічного процесу вологопереносу в осесиметричній постановці, яка є суттєвою при дослідженні стану вологості ґрунтів навколо, наприклад, вертикальних дрен, свердловин, паль і т. д. В роботі сформульована початково-крайова задача для системи нестаціонарних рівнянь волого- та теплопереносу для ізотропного середовища в циліндричній системі координат з неоднорідними змішаними крайовими умовами, в тому числі з умовами теплообміну з зовнішнім середовищем.

Отримані результати є важливими і для подальшого дослідження в циліндричних координатах задач, що моделюють міграцію вологи у процесі сезонного промерзання ґрунту, як продовження поданого в [1–3] підходу, при якому враховуються фазові переходи від незамерзлої води до льоду в усьому об'ємі ґрунтового масиву без виділення фронту кристалізації. У цьому випадку вологообмінні та теплообмінні характеристики є функціями сумарної вологості, а рівняння вологопереносу записується щодо «фіктивного» вмісту вологи. Беручи до уваги напрямки міграції вологи щодо фронту промерзання/танення, суттєвим вважатимемо конвективний теплоперенос за вертикальною віссю координат, що дозволяє досягнути достатнього співпадіння з експериментальними даними [4].

Основна частина. В області $\Omega_{\tilde{T}} = \Omega \times \left(0, \tilde{T}\right]$ розглядається система рівнянь:

$$r\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,k\left(W,T\right)\frac{\partial W}{\partial r}\right) + r\frac{\partial}{\partial z}\left(k\left(W,T\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

$$c_T\, r\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + r\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial z} - c_w \upsilon(W)\,T\right), \quad (1)$$

де $(r,z,t) \in \Omega_{\tilde{T}}$, $0 < r_0 \le r \le r_1 < \infty$, $0 \le z \le z_1 < \infty$, $W\left(r,z,t\right)$ – об'ємна вологість, $T\left(r,z,t\right)$ – температура,

$k(W,T)$ – коефіцієнт вологопереносу [5], $\tilde{\lambda}$ – коефіцієнт теплопровідності, c_T, c_w – об'ємні теплоємності ґрунту і рідини в порах, $\upsilon(W)$ – швидкість вологопереносу-фільтрації за віссю z.

Крайові умови задамо наступним чином:

$$k\left(W,T\right)\frac{\partial W}{\partial r}=0,\quad \tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial r}=0,\quad (r,z,t)\in(\Gamma_1\cup\Gamma_3)\times(0,\tilde{T}], \tag{2}$$

$$k\left(W,T\right)\frac{\partial W}{\partial z}=0,\quad (r,z,t)\in(\Gamma_2\cup\Gamma_4)\times(0,\tilde{T}], \tag{3}$$

$$\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial z}=-\alpha(T(r,z,t)-T_{cp}),\quad (r,z,t)\in\Gamma_2\times(0,\tilde{T}], \tag{4}$$

$$\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial z}=0,\quad (r,z,t)\in\Gamma_4\times(0,\tilde{T}], \tag{5}$$

де $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4=\partial\Omega$, $\Gamma_1=\left\{(r,z): r=r_0,\, 0\le z\le z_1\right\}$, $\Gamma_2=\left\{(r,z): r_0\le r\le r_1,\, z=z_1\right\}$, $\Gamma_3=\left\{(r,z): r=r_1,\, 0\le z\le z_1\right\}$, $\Gamma_4=\left\{(r,z): r_0\le r\le r_1,\, z=0\right\}$; T_{cp} – температура зовнішнього середовища.

Початкові умови:

$$W(r,z,0)=W_0(r,z),\quad T(r,z,0)=T_0(r,z),\quad (r,z)\in\bar{\Omega}. \tag{6}$$

Припускаємо, що $\alpha=\text{const}>0$, а задані функції $k(W,T)$, $\upsilon(W)$, $W_0(r,z)$, $T_0(r,z)$ досить гладкі на $\Omega_{\tilde{T}}$, обмежені і задовольняють умові Ліпшиця, тобто:

$$\begin{gathered}0<\bar{k}\le k(v_1,u_1)\le\bar{\bar{k}}<\infty\ ,\ \left|k(v_1,u_1)-k(v_2,u_2)\right|\le K_1\left(\left|v_1-v_2\right|+\left|u_1-u_2\right|\right),\\ 0<\bar{\upsilon}\le\upsilon(v_1)\le\bar{\bar{\upsilon}}<\infty\ ,\ \left|\upsilon(v_1)-\upsilon(v_2)\right|\le K_2\left|v_1-v_2\right|\quad \forall v_i,u_j\in R,\ i,j=1,2,\end{gathered} \tag{7}$$

де $\bar{k}, \bar{\bar{k}}, \bar{\upsilon}, \bar{\bar{\upsilon}}, K_1, K_2=const$.

Класичний розв'язок початково-крайової задачі (1) – (6) – вектор-функція $h(r,z,t)=$ $=\left(W(r,z,t),T(r,z,t)\right)^T=\left(h_1(r,z,t),h_2(r,z,t)\right)^T$, компоненти якої разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial h_i}{\partial r}$, $\frac{\partial h_i}{\partial z}$, $i=1,2$, неперервні на області $\bar{\Omega}_{\tilde{T}}$, мають обмежені неперервні частинні похідні $\frac{\partial h_i}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 h_i}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2}$, $i=1,2$, в $\Omega_{\tilde{T}}$, задовольняють рівнянню (1) і умови (2) – (6).

Позначимо Z множину вектор-функцій $h(r,z,t)=\left(W(r,z,t),T(r,z,t)\right)^T=$ $=\left(h_1(r,z,t),h_2(r,z,t)\right)^T$, компоненти яких $\forall t\in(0,\tilde{T}]$ належать простору Соболева $W_2^1(\Omega)$, а $\frac{\partial h_i}{\partial t}(r,z,t), \forall t\in(0,\tilde{T}]$, $h_i(r,z,0)$, $i=1,2$, належать $L_2(\Omega)$. Відповідно множині Z_0 належать вектор-функції $v(r,z)=\left(v_1(r,z),v_2(r,z)\right)^T$, компоненти яких належать простору $W_2^1(\Omega)$.

Узагальненим розв'язком Гальоркіна початково-крайової задачі для системи (1) – (6) є вектор-функція $h(r,z,t)\in Z$, яка для довільної вектор-функції $v\left(r,z\right)\in Z_0$, задовольняє інтегральним співвідношенням

$$m\left(\frac{\partial h}{\partial t},v\right)+A\left(h;h,v\right)=\left(F,v\right)\quad \forall t\in\left(0,\tilde{T}\right],\ \forall v\in Z_0, \tag{8}$$

$$(h(\cdot,\cdot,0),v)=(h_0,v) \quad \forall v\in Z_0, \tag{9}$$

де

$$m\left(\frac{\partial h}{\partial t},v\right)=\iint_{\Omega} r\left(\frac{\partial W}{\partial t}v_1+c_T\frac{\partial T}{\partial t}v_2\right)d\Omega,$$

$$A(h;h,v)=a(h;h,v)-b_1(h;h,v)+b_2(h,v),$$

$$a(h;h,v)=\iint_{\Omega} r\left(k(W,T)\left(\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial v_1}{\partial r}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)+\tilde{\lambda}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial v_2}{\partial r}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\right)d\Omega,$$

$$b_1(h;h,v)=\iint_{\Omega} r c_w \upsilon(W)T\frac{\partial v_2}{\partial z}d\Omega,\ \ b_2(h,v)=\int_{\Gamma_2} r\,\alpha T\,v_2 d\Gamma_2,\ \ (F,v)=\int_{\Gamma_2} r\,\alpha T_{cp} v_2 d\Gamma_2, \tag{10}$$

$(\ ,\ )$ – скалярний добуток в $L_2(\Omega)$, $h_0=(W_0,T_0)^T$.

Наближений узагальнений розв'язок даної задачі Коші шукаємо в скінченновимірному підпросторі $Z^N\subset Z$ методом скінченних елементів (МСЕ) в наступному вигляді:

$$h^N(r,z,t)=\sum_{i=1}^{2N}\alpha_i(t)\Phi_i(r,z), \tag{11}$$

де $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,2N}$ – функції, інтегровані разом з другою похідною на $\left[0,\tilde{T}\right]$,

$$\Phi_i=\begin{pmatrix}\varphi_i\\ 0\end{pmatrix},\ \Phi_{N+i}=\begin{pmatrix}0\\ \varphi_i\end{pmatrix},\ i=\overline{1,N}, \tag{12}$$

– базис простору Z_t^N, який отримується з Z^N фіксуванням $\forall t\in\left[0,\tilde{T}\right]$, $\{\varphi_i(r,z)\}$, $i=\overline{1,N}$, – сукупність лінійно незалежних функцій, що відповідають вузловим точкам МСЕ, які побудовані на повних поліномах степеня k ($k=1,2,3$) та мають в $\bar{\Omega}$ обмежений носій.

Базис простору $Z_0^N\subset Z_0$ аналогічно складається з $2N$ вектор-функцій $\Phi_i(r,z)$, тобто довільна функція $v^N(r,z)\in Z_0^N$ може бути подана у вигляді:

$$v^N(r,z)=\sum_{i=1}^{2N}\beta_i\Phi_i(r,z), \tag{13}$$

де β_i – константи.

Наближений узагальнений розв'язок $h^N(r,z,t)\in Z^N$ задачі (8), (9) задовольняє інтегральним співвідношенням

$$m\left(\frac{\partial h^N}{\partial t},v^N\right)+A\left(h^N;h^N,v^N\right)=\left(F,v^N\right)\ \ \forall t\in\left(0,\tilde{T}\right],\ \forall v^N(r,z)\in Z_0^N, \tag{14}$$

$$(h^N(\cdot,\cdot,0),v^N)=(h_0,v^N) \quad \forall v^N(r,z)\in Z_0^N. \tag{15}$$

Використовуватимемо наступні позначення норм:

$$\|u\|^2_{L_2\times L_2}=\int_0^{\tilde{T}}\|u\|^2_{L_2}dt,\ \ \|u\|^2_{H_0^1\times L_2}=\int_0^{\tilde{T}}\|u\|^2_{H_0^1}dt,\ \ \|u\|^2_{W_2^1\times L_2}=\int_0^{\tilde{T}}\|u\|^2_{W_2^1}dt,$$

$$\|u\|^2_{L_2\times L_\infty}=\max_{t\in[0,\tilde{T}]}\|u\|^2_{L_2},\ \ \|u\|^2_{L_2(\Gamma)\times L_2}=\int_0^{\tilde{T}}\|u\|^2_{L_2(\Gamma)}dt,\ \forall u=(u_1,u_2)\in Z. \tag{16}$$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай класичний розв'язок початково-крайової задачі (1) – (6) $h(r,z,t) = \left(W(r,z,t),T(r,z,t)\right)^T = \left(h_1(r,z,t),h_2(r,z,t)\right)^T$ має обмежені неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial^{k+2}h_i}{\partial r^{\kappa}\partial z^{\upsilon}\partial t}$ $(\kappa+\upsilon=k+1)$ на $\bar{\Omega}_{\tilde{T}}$ $(i=1,2)$.

Тоді для наближеного узагальненого розв'язку $h^N(r,z,t)=(h_1^N(r,z,t),h_2^N(r,z,t))\in Z^N$ задачі (8), (9) існує константа $C>0$ така, що має місце оцінка

$$\left\|h-h^N\right\|^2_{W_2^1\times L_2}+\left\|h_2-h_2^N\right\|^2_{L_2(\Gamma_2)\times L_2}\le C\bar{h}^{2k},$$

де $\bar{h}$ – максимальна довжина сторін трикутників, k =1,2,3 – степінь многочленів МСЕ.

Доведення. Нехай h і h^N – класичний і наближений узагальнений розв'язки задачі (1) – (6), тоді $\forall\tilde{h}\in Z^N$ справедлива рівність

$$m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},\tilde{h}-h^N\right)+A\left(h;h,\tilde{h}-h^N\right)-A\left(h^N;h^N,\tilde{h}-h^N\right)=0. \tag{17}$$

Враховуючи співвідношення (17), розглянемо вираз [6]:

$$m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-h^N\right)+A\left(h^N;h-h^N,h-h^N\right)=$$

$$=m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},\tilde{h}-h^N\right)+A\left(h;h,\tilde{h}-h^N\right)-A\left(h^N;h^N,\tilde{h}-h^N\right)+$$

$$+m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-\tilde{h}\right)-A\left(h;h,\tilde{h}-h^N\right)+A\left(h^N;h,h-h^N\right)-A\left(h^N;h^N,h-\tilde{h}\right)=$$

$$=m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-\tilde{h}\right)+A\left(h^N;h-h^N,h-\tilde{h}\right)+A\left(h^N;h,\tilde{h}-h^N\right)-A\left(h;h,\tilde{h}-h^N\right). \tag{18}$$

Оцінимо ліву і праву частини співвідношення (18), беручи до уваги (10), (7):

$$m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-h^N\right)\ge c_1\frac{d}{dt}\left\|h-h^N\right\|^2_{L_2},\ a\left(h^N;h-h^N,h-h^N\right)\ge c_2\left\|h-h^N\right\|^2_{H_0^1},$$

$$b_2(h-h^N,h-h^N)\ge r_0\alpha\left\|h_2-h_2^N\right\|^2_{L_2(\Gamma_2)},$$

$$\left|b_1\left(h^N;h-h^N,h-h^N\right)\right|\le c_3\left\|h-h^N\right\|_{L_2}\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}\le c_3\left(\varepsilon_1\left\|h-h^N\right\|^2_{L_2}+\frac{1}{4\varepsilon_1}\left\|h-h^N\right\|^2_{H_0^1}\right),$$

$$\left|A\left(h^N;h-h^N,h-\tilde{h}\right)\right|\le c_4\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}+c_3\left\|h-h^N\right\|_{L_2}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}+$$

$$+r_1\alpha\left\|h_2-h_2^N\right\|_{L_2(\Gamma_2)}\left\|h_2-\tilde{h}_2\right\|_{L_2(\Gamma_2)}\le c_4\left(\varepsilon_2\left\|h-h^N\right\|^2_{H_0^1}+\frac{1}{4\varepsilon_2}\left\|h-\tilde{h}\right\|^2_{H_0^1}\right)+$$

$$+c_3\left(\varepsilon_3\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}^2\right)+r_1\alpha\left(\varepsilon_4\left\|h_2-h_2^N\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2+\frac{1}{4\varepsilon_4}\left\|h_2-\tilde{h}_2\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\right),$$

$$\left|A\left(h^N;h,\tilde{h}-h^N\right)-A\left(h;h,\tilde{h}-h^N\right)\right|\le c_5\left\|h-h^N\right\|_{L_2}\left\|\tilde{h}-h^N\right\|_{H_0^1}+$$

$$+c_6\left\|h-h^N\right\|_{L_2}\left\|\tilde{h}-h^N\right\|_{H_0^1}\le(c_5+c_6)\left(\left\|h-h^N\right\|_{L_2}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}+\left\|h-h^N\right\|_{L_2}\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}\right)\le$$

$$\le(c_5+c_6)\left((\varepsilon_5+\varepsilon_6)\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2+\frac{1}{4\varepsilon_6}\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}^2+\frac{1}{4\varepsilon_5}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}^2\right), \tag{19}$$

де ε_i, $i=\overline{1,6}$, – деякі додатні константи ε-нерівностей,

$$c_1=0{,}5r_0\min\{1,c_T\},\ c_2=r_0\min\{\tilde{\lambda},\bar{k}\},\ c_3=r_1c_w\,\bar{\bar{\upsilon}}\ ,\ c_4=r_1\max\{\tilde{\lambda},\bar{\bar{k}}\},$$

$$c_5=r_1\,\tilde{c}\max\{\tilde{\lambda},K_1\},\ c_6=r_1c_w\,\tilde{c}\,K_2\ ,\ \tilde{c}=\max_{\bar{\Omega}_{\tilde{T}}}\left\{|h_i|,\left|\frac{\partial h_i}{\partial r}\right|,\left|\frac{\partial h_i}{\partial z}\right|,\ i=1,2\right\}. \tag{20}$$

З співвідношень (18), (19) отримаємо нерівність вигляду

$$\frac{d}{dt}\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2+\delta_1\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}^2+\delta_2\left\|h_2-h_2^N\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\le$$

$$\le c\left(\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2+\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}^2+\left\|h_2-\tilde{h}_2\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\right)+\frac{1}{c_1}m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-\tilde{h}\right), \tag{21}$$

де константи $\delta_1=\delta_1(c_j,\varepsilon_i)$, $\delta_2=\alpha(r_0-r_1\varepsilon_4)/c_1$, $c=c(c_j,\varepsilon_i,\alpha,r_1)$ додатні за рахунок підібраних відповідним чином ε_i, $i=\overline{1,6}$.

Домноживши обидві частини нерівності (21) на e^{-ct} та проінтегрувавши результат за змінною t від 0 до s, $s\in(0,\tilde{T}]$, отримаємо нерівність

$$\int_0^s\left(e^{-ct}\frac{d}{dt}\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2-ce^{-ct}\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2\right)dt+\delta_1\int_0^s e^{-ct}\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}^2dt+\delta_2\int_0^s e^{-ct}\left\|h_2-h_2^N\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2dt\le$$

$$\le c\left(\int_0^s e^{-ct}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}^2dt+\int_0^s e^{-ct}\left\|h_2-\tilde{h}_2\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2dt\right)+\frac{1}{c_1}\int_0^s e^{-ct}m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-\tilde{h}\right)dt\ . \tag{22}$$

Оцінимо зверху останній доданок співвідношення (22). Інтегруючи частинами та враховуючи нерівність Коші – Буняковського, ε-нерівність, позначення (10), маємо

$$\left|\int_0^s e^{-ct}m\left(\frac{\partial(h-h^N)}{\partial t},h-\tilde{h}\right)dt\right|\le\left|\int_0^s\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-ct}m\left(h-h^N,h-\tilde{h}\right)\right)dt\right|+$$

$$+\left|\int_0^s e^{-ct}m\left(h-h^N,\frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial t}\right)dt\right|+c\left|\int_0^s e^{-ct}m\left(h-h^N,h-\tilde{h}\right)dt\right|\le$$

$$\le\tilde{c}_2\varepsilon_1\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2(s)+\frac{\tilde{c}_2}{4\varepsilon_1}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2}^2(s)+\tilde{c}_2\varepsilon_2\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2(0)+\frac{\tilde{c}_2}{4\varepsilon_2}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2}^2(0)+$$

$$+\tilde{c}_2\varepsilon_3\int_0^s\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2 dt+\frac{\tilde{c}_2}{4\varepsilon_3}\int_0^s\left\|\frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial t}\right\|_{L_2}^2 dt+c\tilde{c}_2\varepsilon_4\int_0^s\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2 dt+\frac{c\tilde{c}_2}{4\varepsilon_4}\int_0^s\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2}^2 dt\ , \qquad (23)$$

де $\tilde{c}_2=r_1\max\{1,c_T\}$.

Враховуючи наступну оцінку норми $\forall u\in W_2^1(\Omega)$ по межі $\partial\Omega$ заданої області:

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2=\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}u^2\cos(n,r)d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}u^2\cos(n,z)d\Gamma=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial r}(u^2)+\frac{\partial}{\partial z}(u^2)\right)d\Omega=2\iint\limits_{\Omega}u\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)d\Omega\le$$

$$\le C_1\left(\iint\limits_{\Omega}u^2d\Omega\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)d\Omega\right)^{1/2}=C_1\|u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

записану в загальному випадку нерівність Фрідріхса [7], ε-нерівність, можемо записати

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\le C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2+C_3\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2\le C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2+C_3C_1\|u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le$$

$$\le(C_2+\frac{C_3C_1}{4\varepsilon})\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2+C_3C_1\varepsilon\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\ .$$

Оберемо в останній нерівності ε так, щоб $1-C_3C_1\varepsilon>0$. Отже, для розглядуваної області Ω $\exists C_4=const>0$ така, що $\forall u\in W_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\le C_4\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

З огляду на останню оцінку та нерівність (23), оцінка (22) набуває вигляду

$$\left(e^{-c\tilde{T}}-\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\varepsilon_1\right)\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2(s)+\left(\delta_1e^{-c\tilde{T}}-C_4\frac{\tilde{c}_2}{c_1}(\varepsilon_3+c\varepsilon_4)\right)\int_0^s\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1}^2dt+\delta_2e^{-c\tilde{T}}\int_0^s\left\|h_2-h_2^N\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2dt\le$$

$$\le\left(1+\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\varepsilon_2\right)\left\|h-h^N\right\|_{L_2}^2(0)+\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\frac{1}{4\varepsilon_2}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2}^2(0)+\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\frac{1}{4\varepsilon_1}\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2}^2(s)+$$

$$+c\left(1+C_4\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\frac{1}{4\varepsilon_4}\right)\int_0^s\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1}^2dt+\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\frac{1}{4\varepsilon_3}\int_0^s\left\|\frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial t}\right\|_{L_2}^2dt+c\int_0^s\left\|h_2-\tilde{h}_2\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2dt\ . \qquad (24)$$

З рівностей (9), (15) маємо

$$\left\|h-h^N\right\|_{L_2}(0)\le\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2}(0)\le\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2\times L_\infty}\quad\forall\tilde{h}\in Z^N.$$

Враховуючи останнє співвідношення, з нерівності (24) та позначень (16), отримуємо

$$\left\|h-h^N\right\|_{L_2\times L_\infty}^2+\bar{\delta}\left\|h-h^N\right\|_{H_0^1\times L_2}^2+\bar{\bar{\delta}}\left\|h_2-h_2^N\right\|_{L_2(\Gamma_2)\times L_2}^2\le\bar{C}\left(\left\|h-\tilde{h}\right\|_{L_2\times L_\infty}^2+\right.$$

$$\left.+\left\|h-\tilde{h}\right\|_{H_0^1\times L_2}^2+\left\|\frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial t}\right\|_{L_2\times L_2}^2+\left\|h_2-\tilde{h}_2\right\|_{L_2(\Gamma_2)\times L_2}^2\right).$$

Твердження теореми випливає з останньої нерівності і відомих оцінок інтерполяції многочленами МСЕ [6]. Теорема доведена.

Задачу (14), (15) з урахуванням (11) – (13) можна записати в матричному вигляді:

$$\bar{M}\dot{\alpha}(t) + A(\alpha(t))\alpha(t) = F(t) \ \ \forall t \in (0, \tilde{T}], \tag{25}$$

$$M\alpha(0) = \bar{H}_0, \ t = 0, \tag{26}$$

де $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_{2N}(t))^T$, $\alpha_i(t) = \alpha_i^1(t)$, $\alpha_{i+N}(t) = \alpha_i^2(t)$, $i = \overline{1, N}$,

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M^1 & 0 \\ 0 & c_T M^2 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} M^1 & 0 \\ 0 & M^2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}, \ F(t) = \begin{pmatrix} F^1(t) \\ F^2(t) \end{pmatrix}, \ \bar{H}_0 = \begin{pmatrix} \bar{H}_0^1 \\ \bar{H}_0^2 \end{pmatrix},$$

елементи матриць $M^s = \left\{m_{ij}^s\right\}_{i,j=1}^N$, $A^s = \left\{a_{ij}^s\right\}_{i,j=1}^N$ та векторів $F^s(t) = \left\{F_i^s(t)\right\}_{i=1}^N$, $\bar{H}_0^s = \left\{\bar{H}_{0i}^s\right\}_{i=1}^N$, $s = 1, 2,$ обчислюються за формулами:

$$m_{ij}^s = \iint_\Omega r \ \varphi_i(r,z)\varphi_j(r,z) d\Omega,$$

$$a_{ij}^1 = \iint_\Omega r \ k\Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i^1 \varphi_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \varphi_i\Big)\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\right) drdz,$$

$$a_{ij}^2 = \iint_\Omega r\left(\tilde{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\right) - c_w \upsilon\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^1 \varphi_i\right)\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\right) drdz + \int_{\Gamma_2} r \, \alpha \, \varphi_i(r,z) \, \varphi_j(r,z) \, d\Gamma_2,$$

$$F_i^1(t) = 0, \ F_i^2(t) = \int_{\Gamma_2} r \, \alpha T_{cp} \ \varphi_i(r,z) d\Gamma_2,$$

$$\bar{H}_{0i}^1 = \iint_\Omega W_0(r,z)\varphi_i(r,z) d\Omega, \ \bar{H}_{0i}^2 = \iint_\Omega T_0(r,z)\varphi_i(r,z) d\Omega, \ i, j = 1, N.$$

Для оцінки дискретного за часом наближеного узагальненого розв'язку використаємо схему Кранка – Ніколсона [6].

Нехай $\tilde{T} = J\tau$ для деякого цілого $J \geq 1$. Будемо шукати послідовність $\{H^j(r,z)\}_{j=0}^J \subset Z_t^N$, $H^j(r,z) = H(r,z,j\tau)$ таку, щоб H^j апроксимувало $h^N \in Z^N$ оптимально в $W_2^1(\Omega)$. Введемо позначення

$$\partial_\tau P^j = \frac{1}{\tau}(P^{j+1} - P^j), \quad P^{j+1/2} = \frac{1}{2}(P^{j+1} + P^j), \ j = \overline{0, J-1}.$$

Схема Кранка – Ніколсона для задачі Коші (25), (26) може бути записана у вигляді

$$m\left(\partial_\tau H^j, V\right) + A\left(H^{j+1/2}; H^{j+1/2}, V\right) = \left(F^{j+1/2}, V\right), \ j = \overline{0, J-1}, \ \forall V \in Z_0^N, \tag{27}$$

$$\left(H^0, V\right) = \left(h_0, V\right) \ \ \forall V \in Z_0^N, \tag{28}$$

де $H^{j+1}(r,z) = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i^{j+1} \Phi_i(r,z)$, $j = \overline{0, J-1}$. У матричній формі (27), (28) перепишемо так:

$$\frac{1}{\tau}\bar{M}\left(\alpha^{j+1} - \alpha^j\right) + \frac{1}{2}A\left(\frac{\alpha^{j+1} + \alpha^j}{2}\right)\left(\alpha^{j+1} + \alpha^j\right) = \frac{1}{2}\left(F^{j+1} + F^j\right),$$

$$\alpha^0 = M^{-1}\bar{H}_0, \ j = \overline{0, J-1}.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай класичний розв'язок початково-крайової задачі (1) – (6) $h(r,z,t)$ такий, що для нього виконуються умови теореми 1, а також його частинні похідні $\frac{\partial^3 h_i}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^3 h_i}{\partial z \partial t^2}$, $\frac{\partial^3 h_i}{\partial r \partial t^2}$, $i=1,2$, обмежені на $\bar{\Omega}_{\tilde{T}}$. Тоді існують константи $\bar{\delta}$, $\bar{\bar{\delta}}$, $C>0$ такі, що має місце оцінка

$$\left\|h^J - H^J\right\|_{L_2}^2 + \bar{\delta}\tau \sum_{j=0}^{J-1} \left\|h^{j+1/2} - H^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2 + \bar{\bar{\delta}}\tau \sum_{j=0}^{J-1} \left\|h_2^{j+1/2} - H_2^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 \le C(\bar{h}^{2k} + \tau^4) . \quad (29)$$

Доведення. Використовуючи формулу Тейлора, можемо записати

$$\frac{\partial h(r,z,(j+1/2)\tau)}{\partial t} = \partial_\tau h^j + \rho_j , \quad h(r,z,(j+1/2)\tau) = h^{j+1/2} + \xi_j , \quad F(r,z,(j+1/2)\tau) = F^{j+1/2} + \eta_j ,$$

$$\rho_j = O(\tau^2) , \ \xi_j = O(\tau^2) , \ \eta_j = O(\tau^2) , \ \frac{\partial \xi_j}{\partial r} = O(\tau^2) , \ \frac{\partial \xi_j}{\partial z} = O(\tau^2) . \quad (30)$$

Тоді співвідношення (8) при $t=(j+1/2)\tau$ запишеться наступним чином:

$$m\left(\partial_\tau h^j + \rho_j, V\right) + A\left(h^{j+1/2} + \xi_j; h^{j+1/2} + \xi_j, V\right) = \left(F^{j+1/2} + \eta_j, V\right), \quad j = \overline{0, J-1}, \quad \forall V \in Z_0^N . \ (31)$$

Нехай

$$V = \frac{z^{j+1} + z^j}{2} = z^{j+1/2} = (h-H)^{j+1/2} = (h-\tilde{h})^{j+1/2} + (\tilde{h}-H)^{j+1/2} ,$$

де $\tilde{h}(r,z,t)$ – довільна функція з Z^N. Тоді з рівностей (27), (31) і враховуючи, що $(\tilde{h}-H)^{j+1/2} \in Z_0$, отримуємо

$$m\left(\partial_\tau z^j + \rho_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) + A\left(h^{j+1/2} + \xi_j; h^{j+1/2} + \xi_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) -$$
$$- A\left(H^{j+1/2}; H^{j+1/2}, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) = \left(\eta_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right), \quad j = \overline{0, J-1} . \quad (32)$$

Розглянемо вираз

$$m\left(\partial_\tau z^j, z^{j+1/2}\right) + A\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right) = m\left(\partial_\tau z^j, (h-\tilde{h})^{j+1/2}\right) +$$
$$+ A\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, (h-\tilde{h})^{j+1/2}\right) + m\left(\partial_\tau z^j + \rho_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) +$$
$$+ A\left(h^{j+1/2} + \xi_j; h^{j+1/2} + \xi_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) - A\left(H^{j+1/2}; H^{j+1/2}, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) - m\left(\rho_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) -$$
$$- A\left(h^{j+1/2} + \xi_j; h^{j+1/2} + \xi_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) + A\left(H^{j+1/2}; h^{j+1/2}, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right), \ j = \overline{0, J-1} .$$

Беручи до уваги (32) та (10), з останньої рівності маємо

$$m\left(\partial_\tau z^j, z^{j+1/2}\right) + a\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right) + b_2\left(z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right) =$$
$$= m\left(\partial_\tau z^j, (h-\tilde{h})^{j+1/2}\right) + b_1\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right) + A\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, (h-\tilde{h})^{j+1/2}\right) +$$
$$+ A\left(H^{j+1/2}; h^{j+1/2} + \xi_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) - A\left(h^{j+1/2} + \xi_j; h^{j+1/2} + \xi_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) -$$
$$- A\left(H^{j+1/2}; \xi_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) - m\left(\rho_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right) + \left(\eta_j, (\tilde{h}-H)^{j+1/2}\right), \ j = \overline{0, J-1} . \quad (33)$$

Оцінимо доданки в (33), враховуючи ε-нерівність, нерівність трикутника, співвідношення (7), (10), (16). Отримуємо

$$m\left(\partial_\tau z^j, z^{j+1/2}\right) \ge \frac{c_1}{\tau}\left(\left\|z^{j+1}\right\|_{L_2}^2 - \left\|z^j\right\|_{L_2}^2\right),\ a\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right) \ge c_2 \left\|z^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2,$$

$$b_2\left(z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right) \ge r_0\alpha \left\|z_2^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2,\ \left|b_1\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, z^{j+1/2}\right)\right| \le c_3\left(\varepsilon_1\left\|z^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\left\|z^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2\right),$$

$$\left|A\left(H^{j+1/2}; z^{j+1/2}, (h-\tilde h)^{j+1/2}\right)\right| \le c_4\left(\varepsilon_2\left\|z^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2\right) +$$

$$+c_3\left(\varepsilon_3\left\|z^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3}\left\|\left(h-\tilde h\right)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2\right) + r_1\alpha\left(\varepsilon_4\left\|z_2^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_4}\left\|\left(h_2-\tilde h_2\right)^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\right),$$

$$\left|m\left(\rho_j, (\tilde h - H)^{j+1/2}\right)\right| \le \left|m\left(\rho_j, (h-\tilde h)^{j+1/2}\right)\right| + \left|m\left(\rho_j, z^{j+1/2}\right)\right| \le (\varepsilon_5+\varepsilon_6)\left\|\rho_j\right\|_{L_2}^2 +$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon_5}\left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_6}\left\|z^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2,$$

$$\left|\left(\eta_j, (\tilde h - H)^{j+1/2}\right)\right| \le (\varepsilon_7+\varepsilon_8)\left\|\eta_j\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_7}\left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_8}\left\|z^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2,$$

$$\left|A\left(H^{j+1/2}; h^{j+1/2}+\xi_j, (\tilde h - H)^{j+1/2}\right) - A\left(h^{j+1/2}+\xi_j; h^{j+1/2}+\xi_j, (\tilde h - H)^{j+1/2}\right) -\right.$$

$$\left.-A\left(H^{j+1/2}; \xi_j, (\tilde h - H)^{j+1/2}\right)\right| \le c_5\left\|z^{j+1/2}+\xi_j\right\|_{L_2}\left\|(\tilde h - H)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1} +$$

$$+c_6\left\|z^{j+1/2}+\xi_j\right\|_{L_2}\left\|(\tilde h - H)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1} + c_4\left\|\xi_j\right\|_{H_0^1}\left\|(\tilde h - H)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1} +$$

$$+c_3\left\|\xi_j\right\|_{L_2}\left\|(\tilde h - H)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1} + r_1\alpha\left\|\xi_j\right\|_{L_2(\Gamma_2)}\left\|(\tilde h - H)^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)} \le \tilde{\tilde c}\left(\left\|z^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2 + \left\|z^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2 +\right.$$

$$\left.+\left\|z^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \left\|\xi_j\right\|_{L_2}^2 + \left\|\xi_j\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|\xi_j\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\right),\quad j=\overline{0, J-1}, \tag{34}$$

де $\tilde{\tilde c} = \tilde{\tilde c}(c_i, \varepsilon_j, r_1, \alpha)$, c_i, $i=\overline{1,6}$, визначаються (20), $\varepsilon_j = const > 0$, $j = 1,2,\ldots$, з ε-нерівностей.

З урахуванням оцінок (34), з рівності (33) отримаємо нерівність, яку перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{\tau}\left(\left\|z^{j+1}\right\|_{L_2}^2 - \left\|z^j\right\|_{L_2}^2\right) + \delta_1\left\|z^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2 + \delta_2\left\|z_2^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 \le$$

$$\le \delta\left(\left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{L_2}^2 + \left\|(h-\tilde h)^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \left\|\xi_j\right\|_{L_2}^2 + \left\|\xi_j\right\|_{H_0^1}^2 +\right.$$

$$\left.+\left\|\xi_j\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \left\|\rho_j\right\|_{L_2}^2 + \left\|\eta_j\right\|_{L_2}^2 + \left\|z^{j+1}\right\|_{L_2}^2 + \left\|z^j\right\|_{L_2}^2\right) + \frac{1}{c_1} m\left(\frac{z^{j+1}-z^j}{\tau}, (h-\tilde h)^{j+1/2}\right),\ j=\overline{0, J-1}, \tag{35}$$

де δ_1, δ_2 додатні за рахунок підібраних відповідним чином констант в ε-нерівностях. Аналогічно [6] нерівність (35) для кожного $j=\overline{0, J-1}$ домножимо на відповідну функцію $(1+\delta\tau)^{-1} g^j(\tau)$, де $g(\tau) = \dfrac{1-\delta\tau}{1+\delta\tau}$ – обмежена зверху і знизу деякими меншими за одиницю додатними числами;

просумуємо ліву і праву частини нерівностей по j та в результаті, врахувавши (30), встановимо справедливість нерівності

$$\left\|z^J\right\|_{L_2}^2+\bar{\delta}\tau\sum_{j=0}^{J-1}\left\|z^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2+\bar{\bar{\delta}}\tau\sum_{j=0}^{J-1}\left\|z_2^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\leq$$

$$\leq C\left(\sum_{j=0}^{J-1}\left\|(h-\tilde{h})^{j+1/2}\right\|_{H_0^1}^2\tau+\sum_{j=0}^{J-1}\left\|\frac{(h-\tilde{h})^{j+1/2}-(h-\tilde{h})^{j-1/2}}{\tau}\right\|_{L_2}^2\tau+\right.$$

$$\left.+\left\|(h-\tilde{h})^0\right\|_{L_2}^2+\left\|(h-\tilde{h})^{1/2}\right\|_{L_2}^2+\left\|(h-\tilde{h})^{J-1/2}\right\|_{L_2}^2+\tau\sum_{j=0}^{J-1}\left\|(h-\tilde{h})^{j+1/2}\right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2\right)+O(\tau^4). \quad (36)$$

Оцінка (29) отримується з (36) з урахуванням наступних перетворень:

$$\frac{(h-\tilde{h})^{j+1/2}-(h-\tilde{h})^{j-1/2}}{\tau}=\frac{1}{\tau}\left\{(h-\tilde{h})^j+\frac{\tau}{2}\left((h-\tilde{h})^j\right)'+\frac{\tau^2}{8}\left((h-\tilde{h})^j\right)''+O(\tau^3)-\right.$$

$$\left.-(h-\tilde{h})^j+\frac{\tau}{2}\left((h-\tilde{h})^j\right)'-\frac{\tau^2}{8}\left((h-\tilde{h})^j\right)''+O(\tau^3)\right\}=\left(\frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial t}\right)^j+O(\tau^2)$$

та оцінок інтерполяції многочленами МСЕ [6].

Теорему доведено.

Висновки. Запропоновано алгоритм побудови наближеного узагальненого розв'язку осесиметричної початково-крайової задачі для системи рівнянь волого- та теплопереносу, що моделює нестаціонарні неізотермічні процеси у вологих ґрунтах. Отримано оцінки швидкості збіжності неперервного за часом та дискретного наближених розв'язків, побудованих на базі методу скінченних елементів.

Список літератури

1. Павлов А.Р., Пермяков П.П. Математическая модель и алгоритмы расчета на ЭВМ тепло- и массопереноса при промерзании грунта. *Инженерно-физический журнал.* 1983. Т. 44, № 2. С. 311–316.
2. Марченко О.А., Лежнина Н.А. Приближенное решение методом конечных элементов задачи влаготеплопереноса в промерзающих грунтах. *Компьютерная математика*. 2002. № 1. С. 24–33.
3. Марченко О.А., Самойленко Т.А. Исследование приближенного решения квазилинейной параболо-гиперболической задачи. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. Т. 48, № 5. С. 142–154.
4. Kislitsyn A.A., Shastunova U.Yu., Yanbikova Yu.F. Experimental study and a mathematical model of the processes in frozen soil under a reservoir with a hot heat-transfer agent. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2018. 91**(**2). P. 507–514.
5. Богаенко В.А., Марченко О.А., Самойленко Т.А. Анализ численного моделирования неизотермических процессов в грунтовом массиве. *Компьютерная математика*. 2016. № 2. С. 3–11.
6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. Киев: Наукова думка, 1995. 262 с.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

Одержано 27.02.2020

Марченко Ольга Олексіївна,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,

Самойленко Тетяна Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
tsamoil@i.ua

УДК 517.9:519.6

О.А. Марченко, Т.А. Самойленко

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЛАГОПЕРЕНОСА

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев, Украина
Переписка: tsamoil@i.ua

Введение. Расчет динамики неизотермических процессов влагопереноса в осесимметричной постановке является важным при исследовании состояния влажных грунтов вокруг, например, вертикальных дрен, скважин, свай и т. д. В работе сформулирована начально-краевая задача для системы нестационарных уравнений влаго- и теплопереноса для изотропной среды в цилиндрической системе координат с неоднородными смешанными краевыми условиями. Полученные результаты являются важными и для будущего исследования в цилиндрических координатах задач, которые моделируют миграцию влаги в процессе сезонного промерзания грунта с учетом фазовых переходов от незамерзшей воды ко льду во всем объеме грунтового массива без выделения фронта кристаллизации. Влагообменные и теплообменные характеристики при этом являются функциями суммарной влажности, а уравнение влагопереноса записывается относительно некоторого «фиктивного» содержания влаги. Учитывая направления миграции влаги относительно фронта промерзания/таяния существенным считаем конвективный теплоперенос относительно вертикальной оси координат, что позволяет достигать достаточного совпадения с экспериментальными данными.

Цель работы. Для поставленной осесимметричной начально-краевой задачи сформулировать соответствующую обобщенную задачу в форме Галеркина и исследовать точность построенных методом конечных элементов непрерывного по времени и полностью дискретного приближенных обобщенных решений.

Результаты. Предложен алгоритм построения приближенного обобщенного решения осесимметричной начально-краевой задачи для системы уравнений влаго- и теплопереноса, которая моделирует нестационарные неизотермические процессы во влажных грунтах. Получены оценки скорости сходимости непрерывного по времени и дискретного приближенных решений, построенных методом конечных элементов.

Ключевые слова: влагоперенос, теплоперенос, осесимметрическая начально-краевая задача, обобщенное решение, метод конечных элементов (МКЭ), схема Кранка – Николсона.

UDC 517.9:519.6

O. Marchenko, T. Samoilenko

CONSTRUCTING THE APPROXIMATE SOLUTION OF AXISYMMETRIC PROBLEM ON THE DYNAMICS OF ANISOTHERMAL MOISTURE TRANSFER

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine
Correspondence: tsamoil@i.ua

Introduction. Calculation of dynamics of the anisothermal moisture transfer processes in axisymmetric formulation is essential in the study of wet soils condition around, for example, vertical drains, wells, piles, etc. In this paper, we formulate the initial boundary value problem for the system of moisture and heat transfer non-stationary equations. The problem is considered for isotropic medium in cylindrical coordinate system under the inhomogeneous mixed boundary conditions. The obtained results are important for future research in cylindrical coordinates of problems that model the migration of moisture during the seasonal freezing of the soil, taking into account phase transitions from unfrozen water to ice in the entire volume of the soil mass without highlighting the crystallization front. In this case moisture exchange and heat transfer characteristics appear as functions of the total humidity. Consequently, the equation of moisture transfer is written relative to the "fictitious" moisture content. Because of the main direction of moisture migration relative to the freezing/melting front, the convective heat transfer along the vertical coordinate axis is considered to be essential that leads to sufficient coincidence with the experimental data.

The purpose of the paper is to formulate the appropriate generalized problem in the Galorkin form for the axisymmetric initial-boundary value problem. The important goal is to investigate the accuracy of the continuous in time and completely discrete approximate generalized solutions based on the finite elements method.

Results. The algorithm for constructing of approximate generalized solution of the axisymmetric initial-boundary value problem for the system of filtration and heat transfer equations is proposed. The estimates of the convergence rate for the continuous in time and discrete approximate solutions based on the finite elements method are obtained.

Keywords: moisture transfer, heat transfer, axisymmetric initial boundary value problem, generalized solution, finite elements method, Crank – Nicolson scheme.