КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.8

DOI:10.34229/2707-451X.20.2.2

Г.А. ДОНЕЦ, В.И. БИЛЕЦКИЙ

О ЗАДАЧЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Рассматривается задача локализации линейной функции на множестве перестановок, суть которой состоит в поиске перестановок, на которых линейная функция принимает заданное значение. Приводится схема такого поиска с наименьшим числом перебора вариантов.

Ключевые слова: *локализация, линейная функция, перестановка, транспозиция, баланс, позиция.*

Исследованию задач комбинаторной оптимизации и методов их решения посвящено много работ, так как много практических задач описываются с помощью комбинаторных оптимизационных моделей. Во многих работах рассматриваются подходы и описаны методы решения комбинаторных задач оптимизации с линейными, дробно-линейными функциями цели на множестве перестановок [1 – 7], а также [8 – 10] – на множестве размещений.

Данная работа посвящена описанию метода решения задачи локализации линейной целевой функции на множестве перестановок, суть которой состоит в поиске перестановок, на которой линейная функция принимает заданное значение.

Рассмотрим линейную функцию $f(x)=PX$, где P – произвольная перестановка на множестве чисел $(c_1,c_2,...c_n)$, $X=(1,2,...n)$. Необходимо решить задачу.

Задача о локализации. На множестве перестановок найти такую перестановку p, которой соответствует значение функции $f(x)=pX=A$. Такая задача в общем случае может не иметь решения. Подобная задача рассматривалась в [1]. В данной работе рассмотрим задачу о локализации и приведем ее метод решения, отличающейся от приведенного в [1].

Пусть $P=(c_1,c_{2,...,}c_n)$ первая перестановка, у которой $c_i, 1\le i\le n$, расположены в порядке возрастания. Известно из [1], что максимальное значение $f(x)$ принимает для p_1X, а минимальное – для перестановки, в которой c_i расположены по убыванию.

Рассмотрим функцию $f(x)$ для $n=3$, т. е. $f(x)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$.

Обозначим $c_2-c_1=\alpha$, $c_3-c_2=\beta$, $\delta_j=p_1X-p_jX$, где $j=1,2,...,n!$.

Пусть $\alpha\le\beta$. Тогда перестановки, дающие убывающую последовательность значений функции, расположатся в следующем порядке:

$$p_2=(c_2,c_1,c_3),\ \delta_2=\alpha;\ p_3=(c_1,c_3,c_2),\ \delta_3=\beta;\ p_4=(c_2,c_3,c_1),$$
$$\delta_4=2\alpha+\beta;\ p_5=(c_3,c_1,c_2), \delta_5=\alpha+2\beta;\ p_6=(c_3,c_2,c_1),\ \delta_6=2\alpha+2\beta. \quad (1)$$

Если $\alpha\geq\beta$, тогда в последовательности p_j поменяются местами p_2 с p_3 и p_4 с p_5. Зная δ_j, можно узнать значение функции на соответствующей перестановке p_j, не вычисляя ее непосредственно.

Пример 1. Пусть $P=(1,3,7)$. Тогда $\alpha=2, \beta=4$. Максимальное значение функции равно $1\cdot1+3\cdot2+7\cdot3=28$.

Поскольку $\alpha<\beta$, то последующие значения убывания функции равны: $28-\alpha=26$, $28-\beta=24$, $28-(2\alpha+\beta)=20$, $28-(\alpha+2\beta)=18$, $28-(2\alpha+2\beta)=16$.

Рассмотрим произвольную перестановку $(c_1,...,c_i,...,c_j,...,c_n)$, где c_i расположено на k-ом месте, а c_j – на l-ом. Посмотрим, как изменится значение функции, если c_i и c_j поменять местами. Пусть f_1 – значение функции для исходной перестановки, а f_2 – значение функции для измененной перестановки. Вычислим их разность

$$\delta=f_1-f_2=kc_i+lc_j-kc_j-lc_i=(c_j-c_i)(l-k). \quad (2)$$

Замечание. Из формулы (2) следует, что замена в перестановке c_i на большее значение c_j, взятое с правой части, уменьшает значение функции.

Дальше рассмотрим функцию $f(x)$ для $n=5$. Для нее $P=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$, $X=(1,2,3,4,5)$. Обозначим $\alpha_i=c_{i+1}-c_i$, $i=1,2,3$, 4, 5.

Оценка перестановок будет состоять из двух частей. Первая часть касается уменьшения функции за счет транспозиции чисел в первые две позиции, а вторая часть – из оценки перестановок для оставшихся трех чисел.

Обозначим перемену мест чисел c_i и c_j, стоящих рядом через $c_i\leftrightarrow c_j$. Пусть f^* – верхнее значение функции после установления первых трех чисел. Найдем α и β для оставшихся трех чисел. Назовем ситуацию, представленную числами (f^*-A, α, β), балансом. Баланс назовем разрешимым, если существует такое δ_j, для которого $\delta_j=f^*-A$. В противном случае – неразрешимым.

Очевидно, что разрешимый баланс равносилен существованию решения задачи, так как тогда, исходя из значений α и β находим из (1) p_j относительно чисел c_1,c_2,c_3, а затем на их места ставим соответственно числа из последней тройки перестановки. Присоединив их к первым трем числам, получаем искомую перестановку, как решение задачи.

Перейдем к описанию метода локализации на примере для при $n=5$. Будем образовывать перестановки, у которых первые два числа изменяются за счет транспозиций чисел с правой части перестановки P.

Пример 2. Пусть $P=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$ = (1, 3, 4, 8, 13). Необходимо найти перестановку, для которой функция примет значение, равное 96.

Начнем с рассмотрения перестановок с числом c_1 на первой позиции.

1. Для перестановки (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5) = (1, 3, 4, 8, 13) значение функции $f^*=116$. Для тройки (c_3,c_4,c_5) $\alpha=4$, $\beta=5$. Получаем неразрешимый баланс (20, 4, 5).

2. Проведем операцию $c_2 \leftrightarrow c_3$. Получим перестановку $(c_1, c_3, c_2, c_4, c_5)$. Это приводит к уменьшению функции на $\alpha_2 = 1$. Для нее $f^* = 116 - \alpha_2 = 116 - 1 = 115$. Для тройки (c_2, c_4, c_5) $\alpha = 5$, $\beta = 5$. Приходим к неразрешимому балансу (19, 5, 5).

3. Проведем перемещение числа c_4 на вторую позицию за счет операций $c_4 \leftrightarrow c_3$, $c_4 \leftrightarrow c_2$. Это приведет к уменьшению функции на $\alpha_2 + 2\alpha_3 = 9$. В результате получаем $f^* = 116 - 9 = 107$. Для последней тройки (c_2, c_3, c_5) $\alpha = 1$, $\beta = 9$, что приводит к разрешимому балансу (11, 1, 9) со значением $\delta_4 = 2\alpha + \beta$ и из (1) – $p_4 = (c_2, c_3, c_1)$. Это соответствует решению задачи с перестановкой $(c_1, c_4, c_3, c_5, c_2)$ = (1, 8, 4, 13, 3).

4. Перемещаем число c_5 на вторую позицию за счет операций $c_5 \leftrightarrow c_4$ $c_5 \leftrightarrow c_3$ $c_5 \leftrightarrow c_2$. Это приведет к уменьшению значения функции последовательно на α_4, $\alpha_4 + \alpha_3$, $\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2$, что в результате получаем значение $f^* = 116 - 24 = 92$ < 96. Задача не имеет решения, так как число 96 не попадает в интервал определения функции. Следуя замечанию (2), приходим к выводу, что размещение числа c_5 на второй и первой позициях приводит к тому же результату.

Рассмотрим перестановки с числом c_2 на первой позиции.

5. Запишем начальную перестановку $(c_2, c_1, c_3, c_4, c_5)$ = (3, 1, 4, 8, 13). Это произойдет за счет операции $c_2 \leftrightarrow c_1$, что приведет к уменьшению функции на $\alpha_1 = 2$, которое станет равным 116 – 2 = 114. Приходим к разрешимому балансу (18, 4, 5) с значением $\delta_6 = 2\alpha + 2\beta$ и из (1) $-p_6 = (c_3, c_2, c_1)$, что соответствует решению задачи с перестановкой $(c_2, c_1, c_5, c_4, c_3)$ = = (3, 1, 13, 8, 4).

6. Перемещаем в перестановке c_3 на вторую позицию за счет операции $c_3 \leftrightarrow c_1$. Это приведет к уменьшению функции еще на $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$, которое станет равным 114 – 3 = 111. Для тройки (c_1, c_4, c_5) $\alpha = 7$, $\beta = 5$, что приводит к неразрешимому балансу (15, 7, 5) .

7. Перемещаем в перестановке c_4 на вторую позицию за счет операций $c_4 \leftrightarrow c_3$ и $c_4 \leftrightarrow c_1$, что приведет к уменьшению значения функции еще на 11, т. е. $f^* = 114 - 11 = 103$. Для тройки (c_1, c_3, c_5) $\alpha = 3$, $\beta = 9$, что приводит к неразрешимому балансу (7, 3, 9) .

Рассмотрим перестановки с числом c_3 на первой позиции.

8. Запишем начальную перестановку $(c_3, c_1, c_2, c_4, c_5)$= (4, 1, 3, 8, 13). Это произойдет за счет операции $c_3 \leftrightarrow c_2$, $c_3 \leftrightarrow c_1$, что приведет к уменьшению функции на 4. Значит $f^* = 116 - 4 = 112$. Для тройки (c_2, c_4, c_5) $\alpha = \beta = 5$, что приводит к неразрешимому балансу (16, 5, 5) .

9. Проведем операцию $c_2 \leftrightarrow c_1$. Это уменьшит значение до 110, что снова приводит к неразрешимому балансу (14, 5, 5).

10. Перемещаем c_4 на вторую позицию за счет операций $c_4 \leftrightarrow c_2$ и $c_4 \leftrightarrow c_1$, что приведет к уменьшению значения функции на $\alpha_2 + \alpha_3$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, т. е. $f^* = 112 - 12 = 100$, что снова приводит к неразрешимому балансу (4, 5, 5).

Рассмотрим перестановки с числом c_4 на первой позиции.

11. Запишем начальную перестановку $(c_4, c_1, c_2, c_3, c_5)$ = (8, 1, 3, 4, 13). Это произойдет за счет операции $c_4 \leftrightarrow c_3$ $c_4 \leftrightarrow c_2$, $c_4 \leftrightarrow c_1$, что приведет к уменьшению значения функции на 4 + 5 + 7 = 16. Значит $f^* = 116 - 16 = 100$. Для тройки (c_2, c_3, c_5) $\alpha = 1$, $\beta = 9$, что приводит к неразрешимому балансу (4, 1, 9).

12. Проведем операцию $c_2 \leftrightarrow c_1$. Это уменьшит значение еще на 2, т. е. $f^* = 100 - 2 = 98$. Для тройки (c_1, c_3, c_5) $\alpha = 3$, $\beta = 9$, что приводит к неразрешимому балансу (2, 3, 9).

13. Перемещаем c_3 на вторую позицию за счет операций $c_3 \leftrightarrow c_2$ и $c_3 \leftrightarrow c_1$, что приведет к уменьшению значения функции на 1 + 3 = 4. Получаем $f^* = 100 - 4 = 96$. Это значит, что перестановка $(c_4, c_3, c_1, c_2, c_5)$ = (8, 4, 1, 3, 13) является решением.

На этом исчерпывается поиск решений. Других вариантов перестановок, на которых функция принимает заданное значение, не существует.

Этим методом можно воспользоваться и для $n > 5$. При этом оценка функции будет состоять из двух частей: оценки первых $n - 3$ чисел и оставшихся последних трех. Все необходимые операции будут выполняться аналогичным образом, как и для $n = 5$.

Список литературы

1. Донець Г.П., Колечкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с. http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/560
2. Donets G.A., Kolechkina, L.N. Method of ordering the values of a linear function on a set of permutations. *Cybern Syst Anal*. 2009. **45** (2). P. 204–213. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9092-6
3. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках. *Проблемы управления и информации*. 2010, 2. С. 31–41. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.10
4. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. **44** (3). С. 158–172. https://doi.org/10.1007/s10559-008-9016-x
5. Yemets O.O., Yemets E.M., Olhovskiy D.M. The Method of Cutting the Vertices of Permutation Polyhedron Graph to Solve Linear Conditional Optimization Problems on Permutations. *Cybern Syst Anal*. 2014. **50** (4). P. 613–619. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9649-x
6. Koliechkina L.N., Dvernaya O.A., Nagornaya A.N. Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations. *Cybern Syst Anal*. 2014. **50** (4). P. 620–626. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9650-4
7. Ємець О.О., Колечкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. К.: Наукова думка, 2005. 117 с.
8. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. К.: Наукова думка, 2008. 159 с.
9. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. К.: Наукова думка, 2011. 139 с.
10. Сергиенко И.В., Емец О.А., Черненко О.А. Решение условной задачи оптимизации дробно-линейной целевой функции на множестве размещений методом ветвей и границ. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 6. С. 30 – 35. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9462-3

Получено 04.06.2020

Донец Георгий Афанасьевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киев,
https://orcid.org/0000-0003-2038-0031
georgdone@gmail.com

Билецкий Василий Иванович,
кандидат технических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киев.
bilvassa@ukr.net

УДК 519.8

Г.П. Донець, В.І. Білецький

Про задачу локалізації лінійної функції на перестановках

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
Листування: georgdone@gmail.com, bilvassa@ukr.net

Дослідженню задач комбінаторної оптимізації та методів їх розв'язання присвячено багато робіт, так як багато практичних задач описуються за допомогою комбінаторних оптимізаційних моделей. В багатьох роботах розглядаються підходи та описані методи розв'язування комбінаторних задач оптимізації з лінійними, дробово-лінійними функціями цілі на комбінаторних множинах таких як перестановки, розміщення. Роботи присвячені знаходженню розв'язків комбінаторних задач з застосуванням відомих методів розв'язання, а також розробці нових методів та алгоритмів пошуку розв'язків.

Дана робота присвячена описанню методу розв'язання задачі локалізації лінійної цільової функції на множині перестановок. Суть задачі полягає у наступному. На множині перестановок знайти такі локально-допустимі перестановки, на яких лінійна функція приймає задане значення. Така задача в загальному випадку може не мати розв'язку.

В роботі приводиться новий розроблений метод, який дає можливість отримати розв'язок задачі (у випадку, якщо такий розв'язок існує) шляхом цілеспрямованого пошуку локально-допустимих перестановок з найменшим числом перебору варіантів, набагато меншим числа всіх варіантів.

Пошук розв'язку зводиться до генерації варіантів перестановок і їх оцінки. Оцінка кожної перестановки складається з двох частин. Перша частина стосується зменшення значення функції за рахунок транспозиції чисел у перші $n-3$ позиції, а друга частина – з оцінки перестановок для інших трьох чисел. Потім, аналізуючи співвідношення, яке назване балансом, приходимо до висновку, чи є розв'язком перестановка, що розглядується, чи ні.

В роботі метод локалізації розглядується на прикладі розв'язання задачі для $n = 5$.

Ключові слова: локалізація, лінійна функція, перестановка, транспозиція, баланс, позиція.

UDC 519.8

G.A. Donets, V.I. Biletskyi

On the Problem of a Linear Function Localization on Permutations

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: georgdone@gmail.com, bilvassa@ukr.net

Combinatorial optimization problems and methods of their solution have been a subject of numerous studies, since a large number of practical problems are described by combinatorial optimization models. Many studies consider approaches to and describe methods of solution for combinatorial optimization problems with linear or fractionally linear target functions on combinatorial sets such as permutations and arrangements. Studies consider solving combinatorial problems by means of well-known methods, as well as developing new methods and algorithms of searching a solution.

We describe a method of solving a problem of a linear target function localization on a permutation set. The task is to find those locally admissible permutations on the permutation set, for which the linear function possesses a given value. In a general case, this problem may have no solutions at all.

In the article, we propose a newly developed method that allows us to obtain a solution of such a problem (in the case that such solution exists) by the goal-oriented seeking for locally admissible permutations with a minimal enumeration that is much less than the number of all possible variants.

Searching for the solution comes down to generating various permutations and evaluating them. Evaluation of each permutation includes two steps. The first step consists of function decreasing by transposing the numbers in the first $n-3$ positions, and the second step is evaluation of the permutations for the remaining three numbers. Then we analyze the correlation (which is called *balance*) to define whether the considered permutation is the solution or not.

In our article, we illustrate the localization method by solving the problem for $n = 5$.

Keywords: localization, linear function, permutation, transposition, balance, position.