КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.85

DOI:10.34229/2707-451X.21.4.1

М.Г. ЖУРБЕНКО, Б.М. ЧУМАКОВ

ДО ЗАДАЧІ ПЛАНУВАННЯ БАГАТОПРОДУКТОВИХ ПОТОКІВ І МОДЕРНІЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНОЇ МЕРЕЖІ

Наводиться опис математичної моделі та методу розв'язання одного класу задач планування багатопродуктових потоків і модернізації транспортної мережі. Метод розв'язання базується на використанні алгоритмів негладкою оптимізації.

Ключові слова: *оптимальне планування, математична модель, субградієнтні методи, двоїста задача, програмне забезпечення.*

Математичні моделі планування багатопродуктових потоків на транспортних мережах мають різноманітні важливі практичні застосування (транспорт, логістика, комунікаційні мережі). У даній роботі наводиться опис одного класу таких задач і спосіб їх розв'язання на основі використання алгоритмів негладкої оптимізації [1].

Математична модель. Запропонована модель є розширеним варіантом моделі роботи [2] з урахуванням вирішення проблем, пов'язаних з плануванням модернізації транспортної системи. Модель описана на концептуальному рівні. Вхідні дані моделі позначаються словом data, вихідні – result.

Транспортна мережа представляється орієнтованим графом $G=\{I,J\}$.

I (data) – множина вершин (вузлів, станцій) графа, i – індекс перерахунку вершин. J (data) – множина орієнтованих ребер (дуг, ділянок) графа, j – індекс перерахунку ребер. $J^-(i)$ $(J^+(i))$ (data) – множина ребер, що виходять з вершини (що входять у вершину) i, $i^-(j)(i^+(j))$ (data) – початкова (кінцева) вершина ребра j.

Кореспонденції перевезень. L (data) – множина типів продуктів (вантажів), l – індекс перерахунку типів продуктів. Q (data) – множина кореспонденцій, q – індекс перерахунку кореспонденцій. Для кореспонденції $q \in Q$ визначені такі дані: тип вантажу l_q (data), прогнозований обсяг перевезення b_q (data).

В моделі буде використовуватися наступна варіантна схема реалізації кореспонденцій. Ця схема базується на тому, що для кожної кореспонденції q задано множину способів її реалізації Ω_q (data). Для кожної реалізації кореспонденції $\omega \in \Omega_q$ визначені такі дані: маршрут $\Re_q(\omega)$ (data), тариф вартості перевезення одиниці вантажу $c_q^+(\omega)$ (data).

Маршрут $\Re_q(\omega)$ визначається послідовним списком ділянок транспортної мережі й відповідає звичайному визначенню маршруту на орієнтованому графі:

$$\Re_q(\omega) = \{ j^1, j^2, ..., j^{n_q} \},$$

$$i^-(j^{k+1}) = i^+(j^k), \quad k = 1, 2, ..., n_q - 1,$$

де n_q – число ділянок маршруту $\Re_q(\omega)$.

Початкова станція $i_q^-(\omega) = i^-(j^1)$ маршруту $\Re_q(\omega)$ – одна із станцій відправлення кореспонденції. Кінцева станція $i_q^+(\omega) = i^+(j^{n_q})$ маршруту $\Re_q(\omega)$ – одна із станцій призначення кореспонденції. Множинність станцій відправлення (призначення) може бути пов'язана, наприклад, з багатоваріантністю відправлення вантажу з портів (доставкою вантажу в порти). Використана форма визначення варіантів реалізацій кореспонденцій інформаційно надлишкова. Однак така форма забезпечує компактність запису і простоту інтерпретації моделі. Крім того вона має досить загальний характер і забезпечує облік різних варіантів постановки задач. Формально, множина варіантів реалізацій кореспонденції розглядається в моделі як вхідні дані. Як правило, ці дані програмно генеруються. При цьому як маршрути кореспонденцій можуть вибиратися, наприклад, оптимальні за обраними критеріями (по відстані, за експлуатаційними витратами, за часом реалізації) шляхи транспортної мережі, що з'єднують станції відправлення і призначення кореспонденції. При генеруванні маршрутів кореспонденцій можуть враховуватися додаткові (технологічні, екологічні) вимоги, які в явному вигляді в моделі не відображені.

Кожній реалізації $\omega \in \Omega_q$ кореспонденції q відповідає змінна моделі $x_q^+(\omega) \geq 0$ (result) – обсяг перевезення кореспонденції q за варіантом її реалізації ω. X_q^+ – множина змінних $x_q^+(\omega)$ для всіх кореспонденцій: $X_q^+ = \{x_q^+ \mid q \in Q\}$.

Загальний обсяг реалізованих перевезень кореспонденції має бути не більшим за заданий прогнозований обсяг кореспонденції b_q. Позначимо $x_q^- \geq 0$ (result) – нереалізований обсяг кореспонденції q, c_q^- (data) – штрафний множник за наявності одиниці нереалізованого обсягу кореспонденції q. Зауважимо, що штрафні множники c_q^- відображають, як правило, не реальні фінансові втрати, а є керуючими параметрами моделі. Ці параметри дозволяють ранжувати кореспонденції за ступенем важливості реалізації їх перевезень. Крім того, введення змінних x_q^- забезпечує формальну сумісність обмежень моделі.

Змінні $x_q^+(\omega)$ і x_q^- задовольняють балансовими співвідношеннями:

$$\sum \{x_q^+(\omega) \mid \omega \in \Omega_q\} + x_q^- = b_q, \;\; q \in Q, \;\; x_q^+(\omega) \geq 0, x_q^- \geq 0. \tag{1}$$

X_q^- – множина всіх змінних x_q^-: $X_q^- = \{x_q^- \mid q \in Q\}$.

Загальний дохід $F^+(X_q^+)$ від реалізацій кореспонденцій і загальний «штраф» $F_b^-(X_q^-)$ за наявності нереалізованих перевезень визначаються рівностями:

$$F^+(X_q^+) = \sum\sum \{c_q^+(\omega) x_q^+(\omega) \mid \omega \in \Omega_q; q \in Q\},$$

$$F_b^-(X_q^-) = \sum \{c_q^- x_q^- \mid q \in Q\}.$$

$F_c^-(X_q^+)$ (result) – експлуатаційні витрати на перевезення всіх кореспонденцій:

$$F_c^-(X_q^+) = \sum\{c_{qj}^- w^q(j) \mid q \in Q; j \in J\},$$

де c_{qj}^- – витрати на перевезення одиниці обсягу кореспонденції q на ділянці j.

Пропускна здатність ділянок транспортної мережі. J^* (data) – множина ділянок транспортної мережі з обмеженою пропускною здатністю ($J^* \subset J$). r_j (data) – пропускна здатність ділянки j. Нехай $w^q(j)$ (result) – обсяг кореспонденції, який перевозиться по ділянці j. Значення $w^q(j)$ однозначно визначається значеннями змінних $x_q(\omega)$:

$$w^q(j) = \sum\{x_q^+(\omega) \mid \ j \in \Re_q(\omega); \omega \in \Omega_q\}.$$

Тоді умови обмеженості пропускної здатності ділянок з урахуванням їх реконструкції відповідають наступним обмеженням моделі:

$$\sum\{\gamma_q w^q(j) \mid q \in Q\} \le r_j + x_j^r,\ j \in J^*, \tag{2}$$

$$\bar{x}_j^r \ge x_j^r \ge 0,\ j \in J^*, \tag{3}$$

де γ_q (data) – масштабуючий коефіцієнт, який визначається типом кореспонденції q; x_j^r (result) – приріст потужності пропускної здатності ділянки за рахунок його реконструкції; $\bar{x}_j^r$ (data) – верхня межа для змінної x_j^r; X_r – множина всіх змінних x_j^r: $X_r = \{x_j^r \mid j \in J^*\}$.

$F_r^-(X_r)$ – загальний обсяг витрачених фінансів на реконструкцію ділянок транспортної мережі:

$$F_r^-(X_r) = \sum\{c_j^r x_j^r \mid j \in J^*\},$$

де c_j^r (data) – питомі фінансові витрати реконструкції ділянки (витрати на збільшення пропускної спроможності на одну одиницю).

B^f (data) – максимальний обсяг фінансів реконструкції ділянок транспортної мережі:

$$F_r^-(X_r) \le B^f. \tag{4}$$

Задача полягає у максимізації функції "загального доходу" $F(X_q^+, X_q^-, X_r)$:

$$\max \leftarrow\ F(X_q^+, X_q^-, X_r) = F^+(X_q^+) - F_b^-(X_q^-) - F_c^-(X_q^+) - F_r^-(X_r), \tag{5}$$

при обмеженнях (1), (2), (3), (4).

Змістовний сенс функції $F(X_q^+, X_q^-, X_r)$ – {оплата за доставку} мінус {штраф за недопостачання обсягів} мінус {експлуатаційні витрати} мінус {витрати на реконструкцію}.

Основними змінними задачі є такі змінні: X_q^+ (обсяги реалізованих перевезень кореспонденцій), X_q^- (нереалізовані обсяги перевезень кореспонденцій), X_r (змінні збільшення пропускних здатностей ділянок). Решта змінних і вищезазначені співвідношення – допоміжні і введені для компактності запису й простоти інтерпретації моделі.

Метод розв'язання. Задача (1) – (5) представлена в формі задачі лінійного програмування.

Основна особливість реальних задач розглянутого класу – їх велика розмірність: число кореспонденцій ($|Q|$) і ділянок мережі ($|J|$) можуть досягати сотень тисяч. Множина обмежень задачі характеризується яскраво вираженою блоковою структурою. «Зв'язуючими» є обмеження по пропускній здатності окремих ділянок мережі (2) і обмеження (4). Число обмежень (2), як правило, значно менше за кількість всіх ділянок мережі й складає порядку декількох десятків. Зазначені особливості моделі обумовлюють недоцільність використання стандартного програмного забезпечення загального призначення для її чисельної реалізації.

Метод розв’язання задачі (1) – (5) базується на використанні алгоритмів негладкої оптимізації у схемах декомпозиції блокових задач математичного програмування по зв'язуючим обмеженням [1]. Такий підхід до розв’язання блокових задач оптимізації апробований при розв’язанні широкого класу прикладних задач і, як показує досвід, характеризується досить високою ефективністю [3]. Метод складається з двох етапів.

На першому етапі розв’язується двоїста до (1) – (5) задача щодо зв'язуючих обмежень (2), (4):

$$\min \leftarrow \psi(U^r, u^f), \tag{6}$$

$$u_j^r \geq 0,\ j \in J^*;\ u^f \geq 0, \tag{7}$$

де u_j^r – двоїсті змінні, які відповідають обмеженням (2) ($U^r = \{u_j^r \mid j \in J^*\}$), u^f – двоїста змінна, яка відповідає обмеженню (4), $\psi(U^r, u^f)$ – цільова функція двоїстої задачі:

$$\psi(U^r, u^f) = \max\{L(X_q^+, X_q^-, X_r, U^r, u^f) \mid X_q^+, X_q^-, X_r : (1), (3)\}.$$

$L(X_q^+, X_q^-, X_r, U^r, u^f)$ – функція Лагранжа задачі (1) – (5) щодо обмежень (2), (4):

$$L(X_q^+, X_q^-, X_r, U^r, u^f) = F(X_q^+, X_q^-, X_r) - \sum u_j^r \left\{ \sum \{\gamma_q w^q(j) \mid q \in Q\} - r_j - x_j^r \mid j \in J^* \right\} -$$

$$-u_f \left(\sum \{c_j^r x_j^r \mid j \in J^*\} - B^f \right).$$

Максимізація функції Лагранжа по змінним X_q^+, X_q^-, X_r виконується при фіксованих значеннях двоїстих змінних U^r, u^f з урахуванням обмежень (1), (3).

В силу блокової структури обмежень (1), (3) і сепарабельності цільової функції (5), задача максимізації функції Лагранжа (внутрішня задача схеми декомпозиції) зводиться до незалежного розв’язання множини простіших підзадач: $|Q|$ підзадач від $|\Omega_q|+1$ змінних $(x_q^+(\omega), x_q^-)$ і $|J^*|$ підзадач від однієї змінної (x_j^r). Власне в цьому і полягає особливість методу декомпозиції. Для лінійних залежностей розв’язок зазначених підзадач визначається аналітично (для нелінійних залежностей його знаходження зводиться до використання мало витратного чисельного алгоритму).

Наведемо розв’язки для першої групи підзадач по змінним $(x_q^+(\omega), x_q^-)$. Кожна підзадача цієї групи (для кожної кореспонденції q) полягає у наступному:

$$\max\{\sum\{\tilde{c}_q^+(\omega) x_q^+(\omega) \mid \omega \in \Omega_q\} - c_q^- x_q^-, \tag{8}$$

$$\sum\{x_q^+(\omega) \mid \omega \in \Omega_q\} + x_q^- = b_q, \quad x_q^+(\omega) \geq 0,\ x_q^- \geq 0, \tag{9}$$

де коефіцієнти $\tilde{c}_q^+(\omega)$ («збурені» коефіцієнти $c_q^+(\omega)$ з урахуванням значень двоїстих змінних u_j^r) визначаються формулою

$$\tilde{c}_q^+(\omega) = c_q^+(\omega) - \gamma_q \sum\{u_j^r \mid \ j \in \Re_q(\omega)\}.$$

Розв'язки задач (8), (9) $x_q^+(\omega;U^r)$, $x_q^-(U^r)$ визначаються наступним чином. Нехай ω^* реалізація кореспонденції, для якої значення $\tilde{c}_q^+(\omega)$ максимально (якщо таких реалізацій декілька, вибирається будь-яка з них):

$$\tilde{c}_q^+(\omega^*) = \max\{\tilde{c}_q^+(\omega) \,|\, \omega \in \Omega_q\}. \tag{10}$$

Якщо $\tilde{c}_q^+(\omega^*) \geq -c_q^+$, то: $x_q^+(\omega^*;U^r) = b_q$, $x_q^+(\omega;U^r) = 0$ для $\omega \neq \omega^*$, $x_q^-(U^r) = 0$.

Якщо $\tilde{c}_q^+(\omega^*) < -c_q^+$, то: $x_q^+(\omega;U^r) = 0$ для всіх $\omega \in \Omega_q$, $x_q^-(U^r) = b_q$.

Підзадачі другої групи (по змінним x_j^r) для фіксованого значення $j \in J^*$ полягають у наступному:

$$\max \tilde{c}_j^r x_j^r, \tag{11}$$

$$\bar{x}_j^r \geq x_j^r \geq 0, \tag{12}$$

де коефіцієнти $\tilde{c}_j^r$ («збурені» коефіцієнти c_j^r з урахуванням значень двоїстих змінних) визначаються формулою

$$\tilde{c}_j^r = -c_j^r + u_j^r + u_f.$$

Розв'язки задач (11), (12) $x_j^r(U^r)$:

$$x_j^r(U^r) = \begin{cases} 0, & \tilde{c}_j^r \leq 0, \\ \bar{x}_j^r, & \tilde{c}_j^r \geq 0. \end{cases}$$

Обчислення субградієнтів функції $\psi(U^r, u^f)$ зводиться до обчислення нев'язок обмежень (2), (4) для отриманих значень змінних при розв'язанні підзадач [1].

Другий етап розв'язання задачі полягає у визначенні оптимальних значень змінних вихідної задачі. Є різні варіанти вирішення цієї проблеми на основі розв'язання двоїстої задачі [1]. Зазначимо, що для більшості прямих змінних їх оптимальні значення визначаються безпосередньо на основі розв'язку двоїстої задачі [4]. Після виключення цих змінних і несуттєвих обмежень (для таких обмежень відповідні отримані оптимальні значення двоїстих змінних дорівнюють нулю) з вихідної задачі ми отримуємо задачу істотно меншої розмірності. Є такі варіанти вирішення цієї проблеми: використовувати симплекс алгоритм, застосувати прийом малого квадратичного обурення цільової функції (з метою забезпечення її строгої опуклості), використовувати прийом усереднення значень змінних у процесі субградієнтного алгоритму рішення двоїстої завдання [5].

Зазначимо, що трудомісткість розв'язання задачі в основному (≈ 90 %) визначається розв'язуванням двоїстої задачі (6), (7).

Програмне забезпечення математичної моделі розроблено на мові C++ у стилі об'єктно-орієнтованого програмування. Всі змістовні об'єкти моделі відображені відповідними класами C ++.

Для розв'язання двоїстої задачі (6), (7) використовується нова модифікація *r*-алгоритму [6] (алгоритму мінімізації з використанням операції розтягу простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів). На відміну від *r*-алгоритму [7], значення коефіцієнтів розтягу простору змінних у запропонованій модифікації програмно визначаються в процесі роботи алгоритму.

Задача (1) – (5) представлена в формі задачі лінійного програмування. Однак при розробці програмного забезпечення передбачена можливість урахування нелінійності окремих функціоналів моделі (наприклад, залежність експлуатаційних витрат реалізації перевезення від їх обсягу).

Як базові елементи програмне забезпечення використовує такі алгоритми:

- алгоритм знаходження найкоротших шляхів на графі;
- алгоритм розв'язання транспортної задачі на графі;
- алгоритм негладкої оптимізації.

Вхідні дані визначають наступну інформацію:

- транспортна мережа (орієнтований граф транспортної мережі, станції, ділянки);
- види агрегованих перевезень (множина різних типів вантажів);
- прогнозований обсяг перевезень (обсяги кореспонденцій);
- тарифи провізних плат і експлуатаційних витрат при реалізації перевезень;
- обсяг капітальних фінансових коштів, призначених для реконструкції ділянок (нарощування пропускної здатності ділянок).

Вихідні дані програмного забезпечення визначають чисельну інформацію з основних питань розглянутого класу задач перспективного планування:

- раціональну схему перевезень за критерієм максимального доходу транспортної компанії;
- критичні за пропускною здатністю ділянки транспортної мережі;
- рекомендації щодо раціонального розподілу фінансових коштів на реконструкцію критичних ділянок транспортної мережі.

Вихідні дані можуть бути використані для прийняття рішень перспективного розвитку транспортної системи та об'єктивного обґрунтування розподілу фінансових коштів на її модернізацію.

Список літератури

1. Shor N.Z. Minimization methods for non-differentiable functions. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 178 p. https://www.springer.com/gp/book/9783642821202
2. Журбенко Н.Г., Чумаков Б.М. Об одной модели многопродуктовой транспортной задачи. *Теорія оптимальних рішень*. 2013. С. 119–124. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/85053
3. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Трубин В.А., Шор Н.З. и др. Пакет прикладных программ для решения задач производственно-транспортного планирования большой размерности (ПЛАНЕР). *Кибернетика.* 1983. № 1. С. 57–71.
4. Журбенко Н.Г. К двухэтапной схеме декомпозиционного метода решения блочных задач линейного программирования. *Теорія оптимальних рішень*. 2001. С. 22–26.
5. Беляева Л.В., Шор Н.З., Журбенко Н.Г. О методе решения одного класса динамических распределительных задач. *Экономика и математические методы*. 1978. **14** (1). С. 137–146.
6. Журбенко Н.Г., Лиховид А.П. К численной эффективности одной модификации r-алгоритма. *Компьютерная математика*. 2019. № 1. С. 2–10.
7. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика.* 1971. № 3 . С. 51–59.

Одержано 12.09.2021

Журбенко Микола Георгійович,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
zhurbnick@gmail.com

Чумаков Борис Михайлович,
науковий співробітник Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.

UDC 519.85

Nikolay Zhurbenko [*], Boris Chumakov

On the Problem of Planning of Multi-Product Flows and Modernization of the Transportation Network

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[*] *Correspondence: zhurbnick@gmail.com*

Introduction. The problems of optimal planning of multi-product flows on transportation networks have a variety of important practical applications (transportation, logistics, communication networks). The mathematical models of these problems, as a rule, are characterized by a large dimension (hundreds of thousands of variables). Due to the specific features of multi-product transportation problems (pronounced block structure), the use of standard general-purpose optimization packages for their solution is not advisable. In this work of an applied nature, we propose a method for solving one class of such problems, taking into account their specificity. The method is based on the decomposition scheme with respect to a set of binding constraints. The corresponding dual problem is the nonsmooth optimization problem. To solve it, a new version of the subgradient algorithm with space dilation of variables is used. This approach to solving block optimization problems has been tested in solving a wide class of applied problems and, as experience shows, is characterized by a fairly high efficiency.

Purpose of the article to develop a solution method and software for the problem of optimal planning of multi-product flows and modernization of the transportation system.

Results. A mathematical model of the problem of optimal planning multi-product flows on the transportation network is proposed. The model is based on a variant transportation realization scheme. The software is developed in the C++ language in the style of object-oriented programming. The following algorithms are used as basic elements of the software: an algorithm for finding the shortest paths on a graph, an algorithm for solving a transportation problem on a graph, nonsmooth optimization algorithm.

Conclusions. The output data of the developed software determines the following information: rational transportation scheme, critical by capacity sections of the transportation network, recommendations for the rational distribution of funds for the reconstruction of the transportation network. The software is designed to solve the problems of long-term planning of the functioning and development of the transportation system.

Keywords: Optimal planning, mathematical model, subgradient methods, dual problem, software.