КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.8

DOI:10.34229/2707-451X.22.1.1

Г.П. ДОНЕЦЬ, В.І. БІЛЕЦЬКИЙ

ПРО ДЕЯКІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Розглянето задачі максимізації лінійної, дробово-лінійної та квадратичної функцій на множині перестановок. Визначаються нові підходи розв'язання таких задач. Описана загальна схема алгоритму знаходження максимуму дробово-лінійної функції. Наводяться приклади розв'язання таких задач.

Ключові слова: *функція, перестановка, транспозиція, множина, коефіцієнти.*

Дослідженню задач з комбінаторної оптимізації присвячено чимало робіт [1–7], серед яких чільне місце займають задачі оптимізації функцій на комбінаторних конфігураціях.

Дана робота присвячена розв'язанню деяких задач максимізації функцій на перестановках. Для початку розглянемо задачу максимізації лінійної функції. Нехай задана лінійна функція $F(x)=CX$, де $C=(c_1,c_2,...c_n)$, $X=(x_1,x_2,...x_n)$. Необхідно знайти максимальне значення функції на множині перестановок чисел $A=(a_1,a_2,...,a_n)$.

Лема 1. Якщо у функції існує два таких числа $c_i > c_k$ при яких $x_i < x_k$, то транспозиція цих змінних $\langle x_i, x_k \rangle$ приведе до збільшення значення функції.

Дійсно, нехай дано дві довільні перестановки $p_1=(x_1,x_2,...,x_i,...,x_k,...,x_n)$ і $p_2=(x_1,x_2,...,x_k,...,x_i,...,x_n)$, які відрізняються положенням двох елементів x_k і x_i, і для яких $x_k > x_i$. Розглянемо різницю значень $F(p_2)-F(p_1)$. Підставивши відповідно числа перестановок у функцію $F(x)$, отримуємо

$$F(p_2)-F(p_1)=c_ix_k+c_kx_i-c_ix_i-c_kx_k=$$
$$=(c_i-c_k)(x_k-x_i).$$

Оскільки для $i<k$ $c_i>c_k$, то значення різниці більше нуля. Це означає, що значення функції від перестановки змінних збільшилося.

Цей факт можна виразити іншими словами: при знаходженні максимального значення лінійної функції стратегія є оптимальною, коли більша змінна величина наближається до більшого коефіцієнта.

Звідси витікає план побудови оптимального розв'язку: розташовуємо в порядку зростання коефіцієнти лінійної функції і числа із множини A. Далі знаходимо скалярний добуток цих векторів, який дає максимальне значення. Звідси легко отримати перестановку, на якій функція $F(x)=CX$ досягне максимального значення.

Приклад 1. Нехай задані функція $F(x)=4x_1+7x_2+2x_3+5x_4+x_5$ і $A=(6,7,8,3,4)$.

Запишемо функцію у порядку зростання її коефіцієнтів $(c_5,c_3,c_1,c_4,c_2)=(1, 2, 4, 5, 7)$. Отримаємо $F_1(x)=x_5+2x_3+4x_1+5x_4+7x_2$. Підставивши у цю функцію числа із A в порядку зростання $(3, 4, 6, 7, 8)$, отримаємо максимальне значення функції $F_1(x)$, що дорівнює $(1\cdot 3+2\cdot 4+4\cdot 6+5\cdot 7+7\cdot 8)=126$. Це означає, що для функції $F_1(x)$ максимальне значення дає перестановка $(x_5,x_3,x_1,x_4,x_2)=(3, 4, 6, 7, 8)$. Звідси для функції $F(x)$ легко отримати відповідну перестановку $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(6, 8, 4, 7, 3)$.

Перейдемо до розгляду дробово-лінійних функцій. Як відомо, дробово-лінійна функція задається відношенням двох лінійних функцій $F(X)=\dfrac{f(x)}{g(x')}$, де $x\in X, x'\in X,\ x\cup x'=X=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Розглянемо задачу. Знайти максимум функції $F(X)$ на множині перестановок чисел $A=(a_1,a_2,...,a_n)$. Розглянемо найбільш типовий вид задачі, коли всі коефіцієнти функцій $f(x)$ і $g(x')$, і числа множини *A* позитивні. Виділимо деякі випадки цієї задачі.

Випадок 1. Нехай підмножини x і x' не перетинаються.

Лема 2. При оптимальному розв’язку для перестановки, що дає максимум функції $F(X)$ кожен елемент підмножини X для функції $g(x')$ менший кожного елемента підмножини X для функції $f(x)$.

Припустимо, що в оптимальному розв’язку існує елемент x_j функції $g(x')$ більший елемента x_i функції $f(x)$. Запишемо функції $f(x)$ і $g(x')$ у вигляді: $f(x)=c_ix_i+f_0$, $g(x')=c_jx_j+g_0$, де f_0, g_0 – залишки відповідних функцій. Отже, $F(X)$ набуде виду $F(X)=\dfrac{c_ix_i+f_0}{c_jx_j+g_0}$.

Зробимо транспозицію елементів $\langle x_i,x_j\rangle$. Отримаємо функцію $F'(X)=\dfrac{c_ix_j+f_0}{c_jx_i+g_0}$. Знайдемо різницю функцій $F'(X)-F(X)=\dfrac{c_ix_j+f_0}{c_jx_i+g_0}-\dfrac{c_ix_i+f_0}{c_jx_j+g_0}=\dfrac{c_ic_j(x_j^2-x_i^2)+(c_ig_0+c_jf_0)(x_j-x_i)}{(c_jx_i+g_0)(c_jx_j+g_0)}$.

Очевидно, що різниця функцій додатна, а це протирічить тому факту, що $F(X)$ до транспозиції елементів була максимальною.

Виходячи з цього, можна описати загальну схему алгоритму знаходження максимуму дробово-лінійної функції.

Нехай чисельник містить k змінних, а знаменник – l змінних, $k+l=n$.

1. Вибираємо k найбільших чисел з множини *A*.

2. Підставляємо їх у функцію $f(x)$ за принципом досягнення максимального значення (у зростаючому порядку її коефіцієнтів і k чисел із множини *A*).

3. Залишені l чисел множини *A* підставляємо у функцію $g(x')$ за принципом досягнення мінімального значення (у спадаючому порядку її коефіцієнтів і зростаючому порядку l чисел).

4. Дотримуючись відповідної підстановки значень із множини *A* у чисельнику та знаменнику функції $F(X)$, отримаємо шукану перестановку як розв’язок задачі.

Приклад 2. Нехай задані функції $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 + 5x_5 + 2x_6$, $g(x') = x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10}$ і множина *A* = (3, 5, 1, 8, 4, 2, 7, 6, 9, 2).

Виділимо шість найбільших чисел множини *A* і запишемо їх у порядку зростання (4, 5, 6, 7, 8, 9). Запишемо функцію $f(x)$ за зростанням її коефіцієнтів. Отримаємо $f_1(x) = x_4 + 2x_6 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_5 + 7x_3$. Підставивши у цю функцію числа (4, 5, 6, 7, 8, 9), отримаємо максимальне значення $f_1(x) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 9 = 163$. Це означає, що для функції $f_1(x)$ максимальне значення для змінних $(x_4, x_6, x_1, x_2, x_5, x_3)$ дає перестановка (4, 5, 6, 7, 8, 9). Для функції $f(x)$ відповідно отримаємо перестановку $p_1 = (6, 7, 9, 4, 8, 5)$, яка дає її максимальне значення.

Запишемо функцію $g(x')$ по спаданню її коефіцієнтів. Отримаємо $g_1(x') = 4x_9 + 3x_8 + 2x_{10} + x_7$. Підставивши у цю функцію залишені числа за зростанням (1, 2, 2, 3), отримаємо мінімальне значення $g_1(x') = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 17$, тобто для змінних (x_9, x_8, x_{10}, x_7) функції $g_1(x')$ мінімальне значення дає перестановка (1, 2, 2, 3). Звідси для функції $g(x')$ відповідно отримаємо перестановку $p_2 = (3, 2, 1, 2)$, яка дає її мінімальне значення.

Тепер легко можна отримати перестановку, що дає максимальне значення для функції $F(X)$. Для цього об'єднаємо розв'язки функцій $f(x)$ і $g(x')$. Отримаємо $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = (6, 7, 9, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 2)$. Отже, $p = (6, 7, 9, 4, 8, 5, 3, 2, 1, 2)$ – шукана перестановка.

Розглянемо випадок, коли функції $f(x)$ і $g(x')$ в сумі мають неповний список змінних, тобто $k + l < n$. Тоді в алгоритмі розв'язання задачі пункт 3 стане таким. Серед залишених чисел множини *A* вибираємо l найменших і підставляємо їх у функцію $g(x')$ за принципом досягнення мінімального значення.

В результаті отримаємо розв'язок задачі з неповною перестановкою для $k + l$ змінних, аналогічно з вищерозглянутим прикладом.

Випадок 2. Нехай підмножини x і x' перетинаються і мають одну спільну змінну y. В даному випадку можна скористуватися вище описаним алгоритмом для знаходження максимального значення функції $F(X)$. Але виявляється, що присутність спільної змінної дозволяє отримати більше значення функції $F(X)$ за рахунок її транспозиції з меншою змінною.

Нехай $F(X) = \dfrac{f_0 + c_i x_i + \alpha y}{g_0 + \beta y}$ і $x_i < y$. Проведемо транспозицію $\langle x_i, y \rangle$. Отримаємо функцію $F'(X) = \dfrac{f_0 + c_i y + \alpha x_i}{g_0 + \beta x_i}$.

Знайдемо різницю функцій

$$F'(X) - F(X) = \frac{f_0 + c_i y + \alpha x_i}{g_0 + \beta x_i} - \frac{f_0 + c_i x_i + \alpha y}{g_0 + \beta y} = \frac{c_i \beta (y^2 - x_i^2) + (f_0 \beta + (c_i - \alpha) g_0)(y - x_i)}{(g_0 + \beta x_i)(g_0 + \beta y)}.$$

У більшості випадків ця різниця, як правило, додатна величина у зв'язку з тим, що функція $f(x)$ значно більша функції $g(x')$.

Приклад 3. Нехай задані функції $f(x)=x_1+2x_2+3x_3+5x_4$, $g(x^{'})=2x_4+3x_5+4x_6$ і множина A = (4, 5, 6, 9, 2, 3).

Виділимо чотири найбільших чисел множини A у порядку зростання. Це числа (4, 5, 6, 9). Так як функція $f(x)$ представлена по зростанню її коефіцієнтів, то, підставивши їх у функцію, отримаємо максимальне значення $f(x)=1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+5\cdot 9=77$.

Запишемо функцію $g(x)$ по спаданню її коефіцієнтів, крім спільної змінної. Отримаємо $g_1(x^{'})=2x_4+4x_6+3x_5$. Підставивши у цю функцію числа (9, 2, 3), отримаємо $g_1(x^{'})=2\cdot 9+4\cdot 2+3\cdot 3=35$. Значить $F(X)$ = 2.2.

Проведемо транспозицію чисел $\langle 9, 6\rangle$. Отримаємо $f(x)=1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 9+5\cdot 6=71$ і $g_1(x^{'})=2\cdot 6+4\cdot 2+3\cdot 3=29$. Значить, $F(X)$ = 2.448. Можливі також транспозиції $\langle 9, 5\rangle$ і $\langle 9, 4\rangle$. Провівши їх отримаємо: для першої – $F(X)$ = 2.44. Це краще ніж для початкової функції, але гірше, ніж для початкової транспозиції $\langle 9, 5\rangle$; для другої – $F(X)$ = 2.28. Це також краще ніж для початкової функції, але гірше, ніж для транспозиції $\langle 9, 6\rangle$. В свою чергу після транспозиції $\langle 9, 6\rangle$ результат можна покращити за рахунок транспозиції $\langle 6, 5\rangle$, яка дасть значення $F(X)$= 2.52. Цей результат кращий, ніж всі попередні. Але виявляється, що ще існує одна транспозиція $\langle 5, 4\rangle$, яка дає остаточний результат $F(X)$ = 2.56. Таким чином, шукана перестановка в оптимальному розв’язку буде $p=(a_2,a_3,a_4,a_1,a_6,a_5)$ = (5, 6, 9, 4, 3, 2).

Розглянемо задачу оптимізації квадратичної функції на перестановках. Відомо [8], що довільна квадратична функція може бути представлена у вигляді суми квадратів від лінійних функцій. Виявляється, що не існує оптимального алгоритму розв’язання цієї задачі. Залишається тільки метод перебору перестановок. Відомий принцип оптимальності [1], який діє при оптимізації лінійних і дробово-лінійних функцій, тут не працює. Розглянемо, наприклад, функцію $F(X)=(1+5x_1)^2+(21+3x_2)^2$. Знайдемо максимальне значення цієї функції на перестановках чисел з множини (3, 4). Виходячи з принципу оптимальності, число 4 слід приписати до множника 5. При цьому отримаємо $F(X)=21^2+30^2=1341$. Але, як виявляється, максимальне значення цієї функції досягається на перестановці (3, 4), що дорівнює $16^2+33^2=1345$. Залишається шукати максимальне значення на всіх перестановках методом перебору.

Але існують функції, для яких можна скористатися принципом оптимальності і отримати максимальне значення за менше число перебору варіантів, розглядаючи тільки перестановки зі зростаючим порядком. Це функції з двома доданками.

Приклад 4. Нехай задана функція $F(X)=(4x_1+4x_2+5x_3)^2+(2x_4+2x_5+7x_6)^2$. Необхідно знайти максимальне значення функції на множині чисел A = (1, 2, 3, 4, 5, 6). Визначаємо всі комбінації з 3-х чисел множини A у порядку їх зростання. Беремо комбінацію чисел для першого доданку. Для другого доданку числа визначаються автоматично із залишених комбінацій. Це означає, що прийдеться перебирати всього лише $C_6^3=20$ варіантів з усіх 6! = 720.

Беремо, наприклад, для першого доданку числа із множини A (1, 2, 3). Для другого доданку залишаються числа (4, 5, 6). Підставивши їх у функцію, отримаємо значення $F_1(X)=(4x_1+4x_2+5x_3)^2+(2x_4+2x_5+7x_6)^2=(4\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 3)^2+(2\cdot 4+2\cdot 5+7\cdot 6)^2=4329$.

Візьмемо для першого доданку числа (4, 5, 6). Для другого доданку залишаються числа (1, 2, 3). Для цього варіанту отримаємо значення функції

$$F_2(X)=(4x_1+4x_2+5x_3)^2+(2x_4+2x_5+7x_6)^2=(4\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6)^2+(2\cdot 1+2\cdot 2+7\cdot 3)^2=5085.$$

Продовжуючи таким чином далі, можна перебрати всі 20 варіантів, знайти всі значення функції $F(X)$ і визначити її максимальне значення. Неважко переконатися, що таке значення досягається на перестановці (3, 4, 5, 1, 2, 6). Для неї

$$F(X)=(4x_1+4x_2+5x_3)^2+(2x_4+2x_5+7x_6)^2=(4\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5)^2+(2\cdot 1+2\cdot 2+7\cdot 6)^2=5113.$$

Для більш складних квадратичних функцій оптимальний перебір організувати складніше.

Список літератури

1. Донець Г.П., Колечкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с. http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/560
2. Donets G.A., Kolechkina L.N. Method of ordering the values of a linear function on a set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. 45. P. 204–213. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9092-6
3. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках. *Проблемы управления и информации*. 2010. № 2. С. 31–41.
4. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 3. С. 158–172.
5. Yemets O.O., Yemets E.M., Olhovskiy D.M. The Method of Cutting the Vertices of Permutation Polyhedron Graph to Solve Linear Conditional Optimization Problems on Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**. P. 613–619. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9649-x
6. Koliechkina L.N., Dvernaya O.A., Nagornaya A.N. Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**. P. 620–626. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9650-4
7. Ємець О.О., Колечкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. Київ: Наук. думка, 2005. 117 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

Одержано 25.05.2022

Донець Георгій Панасович,
доктор фізико-математичних наук, професор
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
georgdone@gmail.com

Білецький Василь Іванович,
кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, Київ.
bilvassa@ukr.net

UDC 519.8

Georgy Donets, Vasyl Biletskyi

On Some Optimization Problems on Permutations

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: georgdone@gmail.com, bilvassa@ukr.net

Numerous studies consider combinatorial optimization problems and their solution methods, since a large number of practical problems are described by means of combinatorial optimization models. Among these problems, the most prominent ones are function optimization problems on combinatorial configurations. Many of the studies mentioned above propose approaches and describe methods to solve combinatorial optimization problems for linear and fractionally linear functions on combinatorial sets such as permutations and arrangements.

This work describes new approaches and methods to solve some maximization problems for linear, fractionally linear and quadratic functions on permutation set. Algorithms for solving these problems are given.

For linear function, we provide a considerably easy method to find the permutation on which the function attains its maximum value.

We describe the general algorithm to find fractionally linear function maximum. We consider the cases in which variables of numerator and denominator do not intersect, and when the numerator function and the denominator function have one common variable. We also describe the case in which the numerator function and the denominator function in total have incomplete variable list, i.e. when the total quantity of variables is less than the quantity of numbers in the permutation set.

As for solving the problem of finding quadratic function maximum on permutation set, it turned out that there is no universal algorithm to solve this problem for any quadratic function. In this paper, we describe a method of finding maximum on permutation set for quadratic function consisting of two items.

We provide examples of solving the considered optimization problems.

Keywords: function, permutation, set, transposition, coefficients.