КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.21 DOI:10.34229/2707-451X.22.3.5

В.С. КИРИЛЮК

ПРО ПОЛІЕДРАЛЬНІ КОГЕРЕНТНІ МІРИ РИЗИКУ ТА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ

Описані когерентні міри ризику (КМР) та їх підмножина – поліедральні КМР (ПКМР). В умовах невизначеності з множиною неоднозначності (МН) розглянуті робастні конструкції цих мір ризику за МН. Представлені задачі оптимізації портфеля за співвідношенням винагорода-ризик, які оцінюються відповідно середньою прибутковістю і ПКМР в умовах відомих стохастичних розподілів, та їх робастними конструкціями – в умовах невизначеності з МН. Описано як задачі оптимізації портфеля в обох цих випадках зводяться до відповідних задач лінійного програмування.

Ключові слова: *когерентна міра ризику, поліедральна когерентна міра ризику, CVaR, множина неоднозначності, оптимізація портфеля, задача лінійного програмування.*

Вступ. Поняття ризику тісно пов’язане з поняття невизначеності. Під невизначеністю розуміють неможливість точно описати певні події чи процеси. Це може бути пов’язано з різними причинами: відсутністю інформації, стохастичною природою подій чи параметрів процесів, неточністю вимірювання тощо. Ризик означає потенційну можливість несприятливих результатів подій чи процесів, спричинених невизначеністю.

Будемо розглядати невизначеність у більш вузькому стохастичному сенсі та вважати умовами невизначеності опис результатів подій чи процесів випадковими величинами (в.в.) з відомими, частково відомими чи невідомими стохастичними розподілами, а потенційну можливість реалізації їх несприятливих результатів – ризиками. В класичній роботі [1] випадок відомих розподілів в.в. називався умовами ризику, випадок невідомих – умовами невизначеності.

Згідно до класифікації ризики бувають [2]: природними (астероїди, землетруси, повені тощо); технічними (прориви дамб, аварії технічних систем, ядерні аварії тощо); по здоров’ю (судинні хвороби, рак, пандемії тощо); соціальні (війна, тероризм тощо). Зрозуміло, що така класифікація може бути розширена.

Процедура оцінки ризику системи може полягати в наступному: 1) ідентифікація джерел та факторів ризику; 2) генерація сценаріїв майбутніх подій; 3) моделювання поведінки системи за сценаріями; 4) оцінювання ризику.

Джерела та фактори ризику системи можуть бути різні. Як правило, ризик має багатовимірну природу і описується різними індикаторами та показниками. Наприклад, результат катастрофічної події може описуватись: інфраструктурними руйнуваннями, кількістю жертв, соціальними наслідками, економічними втратами тощо. Умовно припустимо, що в принципі подібні наслідки можна описати певною величиною потенціальних збитків X.

Нехай, виконавши перші три кроки процедури оцінки ризику, отримаємо стохастичний розподіл в.в. збитків X. Як тепер оцінити ризик в.в. X? Більш точно, як обрати функцію $\rho : X \to R$, яка оцінює ризик величиною $\rho(X)$?

Відомі різні функції, що використовуються як міри ризику. Так, у великих технічних системах для цього використовують імовірність відмови (аварії), у страхуванні – імовірність банкрутства, в класичній портфельній теорії – дисперсію [3], у фінансах – VaR (Value-at-Risk) [4]. Інколи для оцінки ризиків подій, що часто відбуваються та мають некритичні наслідки, досить обмежитись середніми втратами. Проте всі згадані міри ризику мають свою специфіку і недоліки та не можуть бути використані як універсальна міра ризику.

1. Когерентні міри ризику

1.1. Випадок відомих розподілів. Нині широку популярність при оцінюванні ризику отримало поняття когерентної міри ризику (КМР), запропоноване в [5]. Функція $\rho(.)$ називається КМР, якщо вона задовольняє 4-м таким аксіомам:

А1) $\rho(X+c)=\rho(X)+c, c \in R$	трансляційно інваріантна;
А2) $\rho(X_1+X_2) \le \rho(X_1)+\rho(X_2)$	субадитивна;
А3) $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X), \lambda \ge 0$	позитивно однорідна;
А4) $\rho(X_1) \le \rho(X_2), X_1 \le X_2$ (за розподілом)	монотонна.

Їх сенс полягає у тому, що додаткові детерміновані втрати збільшують ризики на їх величину; диверсифікація не збільшує ризики; ризики масштабуються; в.в. з більшими за розподілом втратами є більш ризикованою. Зауважимо, що така КМР оцінює ризик у вигляді потенційних детермінованих втрат.

Центральний результат [5] полягав у тому, що КМР $\rho(.)$ має вигляд:

$$\rho(X) = \sup\{E_P(X) / P \in Q\}, \tag{1}$$

де Q – деяка опукла слабо замкнена множина імовірнісних мір.

Зауваження 1. Такий опис відомий під назвою двоїсте представлення КМР.

Найбільш відомим представником КМР є міра $CVaR_\alpha$ (Conditional VaR), що введена у [6] як середнє на правому $(1-\alpha)$ хвості розподілу в.в. X.

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)d\beta, \tag{2}$$

де $VaR_\alpha(X) = \min\{z / F_X(z) \ge \alpha\}$, а $F_X(z)$ – функція розподілу в.в. X.

Сама міра VaR_α досить популярна у страхуванні та фінансах [4], оскільки має просту інтерпретацію. Вона співпадає з лівим кінцем правого $(1-\alpha)$ хвосту розподілу X, тобто $VaR_\alpha(X)$ – це величина, яку з імовірністю α не перевищить в.в. X. Як міра ризику вона має 2 недоліки: 1) нехтує ризиками найбільших втрат на правому $(1-\alpha)$ хвості розподілу; 2) не субадитивна, отже, не є КМР.

На відміну від неї, популярна нині $CVaR_\alpha$ є КМР, враховує ризики на хвості розподілу та допускає ефективне обчислення. Окрім (2), вона має наступне представлення:

$$CVaR_\alpha(X) = \inf_{\eta \in R}\left(\eta + \frac{1}{1-\alpha}E(X-\eta)_+\right). \tag{3}$$

В роботі [7] для скінченних дискретно розподілених в.в. введено поняття поліедральної КМР (ПКМР). Це представлена у вигляді (1) КМР, що має поліедральну множину імовірнісних мір Q.

В.в. з скінченними дискретними розподілами представляються у вигляді двох векторів: сценарних значень $x=(x_1,...,x_n)$ та імовірностей $p_0=(p_1^0,...,p_n^0)$, математичне сподівання – це скалярний добуток: $E_P(X)=\langle x, p_0\rangle$.

Будемо позначати множину імовірнісних мір Q з (1) як $Q(p_0)$, оскільки вона залежить від вектора сценарних імовірностей p_0. Поліедральна множина $Q(p_0)$ має вигляд:

$$Q(p_0)=\{p: B(p_0)p \le c(p_0), p\ge 0\}, \tag{4}$$

де $B(p_0)$ і $c(p_0)$ – матриця і вектор відповідних розмірностей.

Зауваження 2. Оскільки множина стохастичних мір $Q(p_0)$ залежить від p_0, то $Q(.)$ – багатозначне відображення.

Опис множини $Q(p_0)$ (4) містить стандартну умову нормування імовірностей $\sum_{i=1}^n p_i=1$, яка в (4) враховується у вигляді двох нерівностей:

$$\sum_{i=1}^n p_i \le 1 \text{ та } -\sum_{i=1}^n p_i \le -1.$$

Це представляється стандартною частиною з (4) як $B_0 p\le c_0$, де

$$B_0=\begin{pmatrix} 1...1 \\ -1...-1\end{pmatrix},\ c_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

До неї додається змістовна частина у вигляді $B_1(p_0)p\le c_1(p_0)$. Тому відповідні матриця $B(p_0)$ і вектор $c_0(p_0)$ в (4) мають вигляд:

$$B(p_0)=\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1(p_0)\end{pmatrix}, c(p_0)=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1(p_0)\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Таким чином, ПКМР описується у вигляді (1), (4)–(6), де вибір тої чи іншої міри ризику зводиться до вибору тих $B(p_0)$ та $c_0(p_0)$, що описують у співвідношенні (4) відповідну множину $Q(p_0)$.

Зауваження 3. Поняття ПКМР розповсюджено також на лебегові простори $Z=L_p(\Omega,\Sigma,P_0),\ p\in[1,+\infty)$, див., наприклад, [8]. В цьому випадку ПКМР представляється у вигляді

$$\rho(X)=\sup_{P\in Q(P_0)}\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)=\sup_{\zeta\in\mathfrak{M}_\rho}\int_\Omega \zeta(\omega)X(\omega)dP_0(\omega),$$

де множина імовірнісних щільностей $\mathfrak{M}_\rho$ описується певним чином. Аналогом стандартної частини з нормування імовірностей є умова

$$\mathfrak{M}_\rho \subseteq \left\{\zeta(.)\ge 0\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP_0(\omega)=1\right\}.$$

Розглянемо деякі приклади ПКМР для в.в. з дискретними розподілами, використовуючи позначення (5) та одиничної матриці *I*.

П1) $\rho(X)=\operatorname{ess\,sup} X$ (ризик найгіршого випадку),

$$Q(p_0)=\left\{p\ge 0, \sum_{i=1}^n p_i=1\right\}=\{B_0 p\le c_0, p\ge 0\};$$

П2) $\rho(X)=E[X]$ (середнє значення),

$$Q(p_0)=\{p_0\}=\left\{p\le p_0,\, p\ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}B_0\\ I\end{pmatrix}p\le\begin{pmatrix}c_0\\ p_0\end{pmatrix}\right\};$$

П3) $\rho(X)=CVaR_\alpha(X)$ (середнє на правому $(1-\alpha)$ хвості розподілу),

$$Q(p_0)=\left\{Ip\le\frac{1}{1-\alpha}p_0,\, p\ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}B_0\\ I\end{pmatrix}p\le\begin{pmatrix}c_0\\ p_0/(1-\alpha)\end{pmatrix}\right\};$$

П4) $\rho(X)=-S_u(-X)$, де $S_u(X)$ – оптимізований еквівалент визначеності [9] з кусочно-лінійною функцією корисності $u(t)=\begin{pmatrix}\gamma_2 t,\ t\le 0\\ \gamma_1 t,\ t>0\end{pmatrix}$ для $0\le\gamma_1<1<\gamma_2$,

$$Q(p_0)=\left\{\gamma_1 p_0\le Ip\le\gamma_2 p_0,\, p\ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}B_0\\ -I\\ I\end{pmatrix}p\le\begin{pmatrix}c_0\\ -\gamma_1 p_0\\ \gamma_2 p_0\end{pmatrix}, p\ge 0\right\}.$$

1.2. Випадок невизначеності з множиною неоднозначності P_U. В попередньому підрозділі розглядався випадок з відомим стохастичним розподілом в.в. В застосуваннях зазвичай наявна лише часткова інформація про розподіл у вигляді даних спостережень (передісторії). Проте минуле не може точно описати майбутнє, що несе у собі нові невизначеності. Така часткова інформація не дозволяє ідентифікувати стохастичний розподіл, а лише описати його деякою множиною. Вона називається множиною неоднозначності (МН), відповідно умови задачі – умовами невизначеності.

Отже, нехай початкова стохастична міра імовірнісного простору P_0 описується лише МН P_U у вигляді $P_0\in P_U$. У цьому випадку оцінюватимемо ризик найгіршим значенням міри $\rho(.)$ за МН. Позначивши її як $\rho_{P_U}(.)$, маємо:

$$\rho_{P_U}(X)=\sup_{P_0\in P_U}\rho_{P_0}(X). \tag{7}$$

Таку $\rho_{P_U}(.)$ будемо називати робастною конструкцією міри ризику за МН. Неважко довести, що $\rho_{P_U}(.)$ це КМР, якщо такою є початкова міра $\rho_{P_0}(.)$.

Використовуючи двоїсте представлення КМР у формі (1), отримуємо

$$\rho_{P_U}(X)=\sup_{P_0\in P_U}\ \sup_{P\in Q(P_0)} E_P[X]=\sup_{P\in Q(P_U)} E_P[X], \tag{8}$$

де багатозначне відображення $Q(.)$ описує відображення МН P_U як

$$Q(P_U)=\bigcup_{P_0\in P_U} Q(P_0).$$

Неважко бачити з (8), що цю множину достатньо описати з точністю до опуклої слабо замкненої оболонки.

Розглянемо як приклад *CVaR*$_\alpha$. Якщо використати її представлення у формі (3) для співвідношення (8), отримуємо

$$CVaR_{\alpha;P_U}(X)=\sup_{P_0\in P_U}\inf_{\eta\in R}\left(\eta+\frac{1}{1-\alpha}E_{P_0}(X-\eta)_+\right).$$

Більш привабливим виглядає використання двоїстого представлення $CVaR_{\alpha}(.)$ у вигляді (1), бо тоді отримаємо в результаті співвідношення типу (8).

У випадку скінченних дискретних розподілів в.в. розглянемо побудову робастної конструкції ПКМР за поліедральною МН P_U у формі (8).

Означення 1. МН ймовірнісних мір P_U називатимемо поліедральною, якщо вона представлена у наступному вигляді:

$$P_U = \{ p_0 : B_u p_0 \le c_u, p_0 \ge 0 \}, \tag{9}$$

$B_u = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_u^1 \end{pmatrix}, c_u = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_u^1 \end{pmatrix}$, де B_0, c_0 описують стандартну частину нормування імовірностей (5), а B_u^1, c_u^1 – змістовну частину обмежень P_U.

Приклади опису P_U у вигляді (9) можна знайти в [10].

Розглянемо робастну конструкцію ПКМР за поліедральною МН (9), яка має вигляд:

$$\rho_{P_U}(X) = \sup \{ \langle x, p \rangle : p \in Q(P_U) \} = \sup_{(p, p_0)} \{ \langle x, p \rangle : p \in Q(p_0), p_0 \in P_U \}. \tag{10}$$

Спробуємо звести її до звичайної задачі лінійного програмування (ЛП). Для чого спростимо умови щодо залежності $Q(.)$ від p_0.

Зауваження 4. Як неважко бачити, в прикладі П1) наявна лише стандартна частина опису $Q(p_0)$ і ця множина максимально широка. Тому конструкція (10) для неї не має сенсу, оскільки вона нічого не змінює.

Звернемося до матриці $B(p_0)$ та вектора $c_0(p_0)$, що описують в $Q(p_0)$ змістовну частину у формі (6). Припустимо, що $B_1(p_0)$ не залежить від p_0, а $c_1(p_0)$ залежить від p_0 лінійним чином, тобто

$$B_1(p_0) = B_1,\ c_1(p_0) = Ap_0, \tag{11}$$

де A – деяка матриця відповідної розмірності.

Тоді згідно (6)

$$B(p_0) = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix}, c(p_0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ Ap_0 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що попередньо розглянуті приклади ПКМР П2) – П4) задовольняють умовам (11):

$$\text{П2) } B_1 = I,\ A = I; \qquad \text{П3) } B_1 = I,\ A = \frac{1}{1-\alpha} I; \qquad \text{П4) } B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -\gamma_1 I \\ \gamma_2 I \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тепер розглянемо обчислення $\rho_{P_U}(X)$ (10) за умовою (11). Неважко бачити, що тоді згідно (11), (6) маємо

$$\rho_{P_U}(X) = \sup_{(p, p_0)} \{ \langle x, p \rangle : p \in Q(p_0), p_0 \in P_U \} =$$

$$= \max_{(p, p_0)} \{ \langle x, p \rangle : B_0 p \le c_0, B_1 p \le Ap_0, B_u p_0 \le c_u \}. \tag{13}$$

З технічних міркувань введемо такі позначення:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ O_{l \times n} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} O_{2 \times n} \\ -A \\ B_u \end{pmatrix}, \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ o_n \\ c_u \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де $O_{2\times n}, O_{l\times n}, o_n$ – нульові матриці та нульовий вектор вказаних розмірностей, а l – розмірність вектора c_u.

З урахуванням (14) задачу обчислення $\rho_{P_U}(X)$ (13) можна переписати як

$$\rho_{P_U}(X) = \max_{\substack{(p,p_0) \\ \tilde{A}p + \tilde{B}p_0 \le \tilde{c},\, p,\, p_0 \ge 0}} \langle x, p \rangle . \tag{15}$$

Сформулюємо це у вигляді твердження.

Твердження 1. При виконанні умови (11) обчислення робастної конструкції ПКМР за поліедральною МН (13) зводиться до задачі ЛП (15), (14).

Наслідок 1. Обчислення робастної конструкції за поліедральною МН (13) для мір ризику з прикладів П2) – П4) зводиться до розв'язання (15), (14) з вказаними в (12) варіантами матриць B_1 та A.

2. Оптимізація портфеля за співвідношенням прибутковість-ризик

2.1. Випадок відомих розподілів. Проблема оптимізації портфеля полягає у тому, як розподілити гроші на придбання часток з певного переліку активів (компонент) таким чином, щоб отриманий набір (портфель) був оптимальним за співвідношенням прибутковість-ризик.

Більш формально, нехай розподіл прибутковості компонент портфеля r_j, $j = 1,\ldots, k$ описується матрицею H, розмірності $n\times k$ (n сценаріїв, k активів), де j-й стовпець представляє розподіл j-ї компоненти

$$H = \begin{pmatrix} r_1(\omega_1) & \ldots & r_k(\omega_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1(\omega_n) & \ldots & r_k(\omega_n) \end{pmatrix}.$$

Вектор $w = (w_1, \ldots, w_k)$, що описує структуру портфеля у дольовому розподілі між компонентами, є змінною за умови $\sum_1^k w_i = 1, w_i \ge 0, i = 1,\ldots,k$. Необхідно знайти таку структуру портфеля w, що оптимізує його за співвідношенням прибутковість-ризик.

У випадку відомого вектора сценарних імовірностей $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$, якщо ризик портфеля оцінюється ПКМР $\rho_{p_0}(.)$, а винагорода – середньою прибутковістю $E_{p_0}(.)$, можна розглянути дві пов'язані задачі: 1) мінімізацію міри ризику портфеля за обмеженнями знизу на його середню прибутковість μ_0; 2) максимізацію середньої прибутковості портфеля за обмеженнями зверху на його міру ризику ρ_0.

Ці задачі відповідно мають вигляд:

$$\min_{\substack{\sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ E_{p_0}[Hw] \ge \mu_0}} \rho_{p_0}(-Hw), \qquad \max_{\substack{\sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ \rho_{p_0}(-Hw) \le \rho_0}} E_{p_0}[Hw]. \tag{16}$$

Зауваження 5. Оскільки Hw описує прибутковість портфеля, то за аргумент для міри ризику беремо цю величину зі знаком "–" (втрати портфеля).

Задачі (16) зводяться до відповідних задач ЛП та нескладно розв'язуються [11]. Наведемо відповідне твердження.

Твердження 2. Якщо задачі (16) сумісні, вони зводяться до наступних задач ЛП відповідно:

$$\begin{array}{c} \min_{(u,w)} \left\langle c(p_0), u \right\rangle \\ B^T(p_0)u + Hw \ge 0 \\ \left\langle H^T p_0, w \right\rangle \ge \mu_0 \\ \sum_1^k w_i = 1, u \ge 0, w \ge 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \max_{(u,w)} \left\langle H^T p_0, w \right\rangle \\ B(p_0)u + Hw \ge 0 \\ \left\langle c(p_0), u \right\rangle \le \rho_0 \\ \sum_1^k w_i = 1, u \ge 0, w \ge 0 \end{array}.$$

Зауважимо, що при відомих розподілах в.в. умова (11) не потрібна.

Розглянемо пошук оптимального портфеля за відношенням Шарпа, що описані у термінах середньої прибутковості та ПКМР, тобто наступну задачу

$$\max_{\sum_1^k w_i = 1, w_i \ge 0} \frac{E_{P_0}[Hw]}{\rho_{P_0}(-Hw)}.$$

Це означає пошук портфеля, який максимізує відношення прибутку до ризику (частку середнього прибутку на одиницю ризику потенційних втрат).

Якщо обидві частини дробу є позитивними, то перепишемо цю задачу в більш звичній для оптимізації формі:

$$\min_{\sum_1^k w_i = 1, w_i \ge 0} \frac{\rho_{P_0}(-Hw)}{E_{P_0}[Hw]} \tag{17}$$

та наведемо відповідне твердження з [11].

Твердження 3. Якщо задача (17) сумісна, то її рішення за функцією співпадає з рішенням наступної проблеми ЛП:

$$\begin{array}{c} \min_{(\tilde{w},\tilde{u},t)} \\ \sum_1^k \tilde{w}_i = t, \tilde{u} \ge 0, \tilde{w} \ge 0, t \ge 0 \\ B^T(p_0)\tilde{u} + H\tilde{w} \ge 0 \\ \left\langle H^T p_0, \tilde{w} \right\rangle = 1 \end{array} < c(p_0), \tilde{u} >,$$

а структура оптимального портфелю в (17) є $w = \tilde{w}/t$ в її рішенні.

2.2. Випадок невизначеності з множиною неоднозначності P_U. Розглянемо випадок невизначеності з МН (розділ 1.2). В таких обставинах будемо оцінювати ризик та прибутковість їх робастними конструкціями за МН.

За аналогією з мірою ризику $\rho_{P_U}(.)$ за умов такої невизначеності оцінимо середню прибутковість її найгіршим значенням за МН, тобто розглянемо робастну конструкцію за МН для середньої прибутковості у вигляді:

$$r_{P_U}(X) = \inf_{P_0 \in P_U} r_{P_0}(X) = \inf_{P_0 \in P_U} E_{P_0}[X]. \tag{18}$$

Неважко бачити, що вона має наступні властивості:

A1a) $r_{P_U}(X+a) = r_{P_U}(X) + a, a \in R$;

A2a) $r_{P_U}(X_1 + X_2) \ge r_{P_U}(X_1) + r_{P_U}(X_2)$;

A3a) $r_{P_U}(\lambda X) = \lambda r_{P_U}(X), \lambda \ge 0$;

A4a) $r_{P_U}(X_1) \ge r_{P_U}(X_2)$, $X_1 \ge X_2$ (за розподілом).

Тепер за аналогією з задачами (16) сформулюємо задачі оптимізації портфеля з використанням робастних конструкцій за МН для міри ризику $\rho_{P_U}(.)$ (7) та середньої прибутковості $r_{P_U}(.)$ (18).

$$\begin{array}{c} \min \quad \rho_{P_U}(-Hw) \\ \sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ r_{P_U}[Hw] \ge r_U \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \max \quad r_{P_U}[Hw] \\ \sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ \rho_{P_U}(-Hw) \le \rho_U \end{array}. \tag{19}$$

За змістом ці задачі відповідають постановкам робастної за розподілом оптимізації, див., наприклад, [12].

При виконанні умови (11) для ПКМР вони зводяться до відповідних задач ЛП. Сформулюємо це у вигляді наступного твердження з використанням позначень (14).

Твердження 4. Якщо для ПКМР виконується умова (11) та задачі оптимізації портфеля (19) сумісні, то вони зводяться відповідно до наступних задач ЛП:

$$\begin{array}{c} \min_{(w,v,u)} \quad \langle \tilde{c}, u \rangle \\ \langle -c_u, v \rangle \ge r_U \\ B_u^T v + Hw \ge 0 \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \tilde{B}^T \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i = 1, w, v, u \ge 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \max_{(w,v,u)} \quad \langle -c_u, v \rangle \\ \langle \tilde{c}, u \rangle \le \rho_U \\ B_u^T v + Hw \ge 0 \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \tilde{B}^T \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i = 1, w, v, u \ge 0 \end{array}. \tag{20}$$

Доведення проводиться за допомогою міркувань, близьких до тих, що використовувались для доведення теореми 3 в [11].

Розглянемо тепер оптимізацію портфеля за відношенням Шарпа $\dfrac{r_{P_U}(.)}{\rho_{P_U}(.)}$, тобто наступну задачу максимізації:

$$\max_{\sum_1^k w_i = 1, w \ge 0} \frac{r_{P_U}(Hw)}{\rho_{P_U}(-Hw)}.$$

Якщо компоненти описаного дробу позитивні, оптимальний портфель можна знайти як рішення задачі мінімізації зворотного дробу, тобто

$$\begin{array}{c} \min \\ \sum_1^k w_i = 1, w \ge 0 \end{array} \frac{\rho_{P_U}(Hw)}{r_{P_U}(Hw)}. \tag{21}$$

З використанням позначень (14) представимо її як задачу ЛП.

Твердження 5. Якщо функція прибутковості $r_{P_U}(.)$ (21) не дорівнює 0 та для ПКМР виконується умова (11), то оптимальними портфелями для (21) з $r_{P_U}(.)$ та мірою ризику $\rho_{P_U}(.)$ є $w = \tilde{w}/t$ у рішеннях $(\tilde{w}, t, \tilde{u}, \tilde{v})$ наступної задачі ЛП:

$$\begin{array}{c} \min_{(\tilde{w},\tilde{v},\tilde{u},t)} \quad \langle \tilde{c}, u \rangle \\ \langle -c_u, \tilde{v} \rangle = 1 \\ B_u^T \tilde{v} + H\tilde{w} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \tilde{B}^T \end{pmatrix} \tilde{u} \geq \begin{pmatrix} -H\tilde{w} \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k \tilde{w}_i = t, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{u}, t \geq 0 \end{array} . \tag{22}$$

Теорема доводиться із застосуванням міркувань, що використовуються при доведенні теореми 6 [11], до результатів попередньої теореми.

Зауваження 6. Пошук рішень для задач оптимізації портфеля (19), (21) для мір ризику з прикладів П2) – П4) зводиться до розв'язання (20), (22) з зазначеними в (12) варіантами матриць B_1 та A й позначень (14).

Висновок. В роботі розглядається апарат КМР та їх підклас у вигляді ПКМР. Для умов невизначеності з МН, описані робастні конструкції ПКМР за МН. Розглянуті проблеми оптимізації портфеля при відомих стохастичних розподілах в.в. та за умов невизначеності з МН. В першому випадку винагорода та ризик оцінюються відповідно середньою прибутковістю та ПКМР, в другому – їх робастними конструкціями за МН. В обох випадках задачі оптимізації портфеля зводяться до відповідних задач ЛП, що дозволить ефективно розв'язувати їх стандартними методами ЛП.

Список літератури

1. Knight F.H. Risk, Uncertainty and Profit, Chicago: Houghton Mifflin Company, 1921. 394 p.
2. Proske D. Catalogue of Risks: Natural, Technical, Social and Health Risks. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 509 p.
3. Markowitz H.M. Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment. New York: Wiley, 1959. 344 p.
4. Jorion P.H. Value at Risk: A New Benchmark for Measuring Derivatives. New York: Irwin Professional Publishers, 1996. 284 p.
5. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999. Vol. 9, No 3. P. 203–228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068
6. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distribution, *J. Banking and Finance*, 2002. Vol. 26, No 7. P. 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6
7. Kirilyuk V.S. The class of polyhedral coherent risk measures. *Cybernetics and System Analysis*. 2004. Vol. 40, No. 4. P. 599–609. https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000047881.82280.e2
8. Kirilyuk V.S. Robust constructions of risk measures for optimization under uncertainty. Intern. Conf. "*Mathematical Modeling, Optimization and Information Technologies*" (MMOTI-2021). Chisinau–Kyiv–Batumi, November 15–17. 2021. P. 89–90.
9. Ben-Tal A., Teboulle M. An old–new concept of convex risk measures: An optimized certainty equivalent. *Mathematical Finance*. 2007. Vol. 17, No. 3. P. 449–476. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2007.00311.x
10. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and robust optimization. *Cybernetics and System Analysis*. 2019. Vol. 55, No. 6. P. 999–1008. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00210-y

11. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and optimal portfolios on the reward-risk ratio. *Cybernetics and System Analysis*. 2014. Vol. 50, No. 5. P. 724–740. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9663-z
12. Shapiro A. Distributionally robust stochastic programming. *SIAM Journal on Optimization*. 2017. Vol. 27, No 4. P. 2258–2275. https://doi.org/10.1137/16M1058297

Одержано 10.09.2022

Кирилюк Володимир Семенович,
доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
vlad00@ukr.net

UDC 519.21

Vladimir Kirilyuk

On Polyhedral Coherent Risk Measures and Portfolio Optimization Problems

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: vlad00@ukr.net

Introduction. The problem of decision-making under risk and uncertainty lies in the use of adequate criteria for assessing their optimality, in particular, in an adequate risk assessment. Various functions are known that are used as risk measures. For technical systems, the probability of an accident (failure) is used, in insurance – the probability of bankruptcy, in finance – Value-at-Risk, etc. At present, the concept of a coherent risk measure (CRM), in which its basic properties are postulated, is widely recognized.

The paper considers CRMs and their subset, the polyhedral CRMs (PCMRs), which have attractive properties and contain a number of important risk measures. Such risk measures are well defined on complete information about the stochastic distributions of random variables.

However, applications usually contain only partial such information from observational data. This only allows one to describe the stochastic distribution by an ambiguity set (AS). For such a case, robust PCMR constructions intended for risk assessment at AS are considered in the paper. The computation of such PCRM constructions in the form of linear programming problems (LP) is described.

To demonstrate the use of the PCRM apparatus, the problems of portfolio optimization on reward-risk ratio are considered, where reward and risk are estimated by the average return and some PCRM respectively for known stochastic distributions, and by their robust constructions under uncertainty with AS. It is described how in both these cases the portfolio optimization problems are reduced to appropriate LP problems.

The purpose of the paper is to describe the PCRM apparatus for assessing risks under uncertainty with AS and demonstrating the effectiveness of its application to linear problems on the example of portfolio optimization problems.

Results. The use of the PCRM apparatus for the case of uncertainty with AS in the form of appropriate robust constructions and their application to portfolio optimization problems on reward-risk ratio is described. The conditions under which these portfolio problems are reduced to the corresponding LP tasks are formulated.

Conclusions. The PCRM apparatus can be effectively applied to linear optimization problems under uncertainty with AS, which is demonstrated by the example of portfolio optimization problems. The reduction of portfolio problems to LP problems allows one to effectively solve them using standard methods.

Keywords: coherent risk measure, polyhedral coherent risk measure, CVaR, ambiguity set, portfolio optimization, linear programming problem.