КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.854 DOI:10.34229/2707-451X.23.2.2

І.В. СЕРГІЄНКО, В.П. ШИЛО, В.О. РОЩИН, П.В. ШИЛО

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГЛОБАЛЬНОГО РІВНОВАЖНОГО ПОШУКУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ БУЛЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У роботі узагальнено досвід використання методу глобального рівноважного пошуку (ГРП) для розв'язання на ЕОМ різних класів задач булевого програмування, що мають численні практичні застосування, у послідовному і паралельному режимах. Значну увагу приділено дослідженню ефективності алгоритмів та розпаралелюванню процесу оптимізації за допомогою об'єднань (портфелів і команд) алгоритмів ГРП, які проведені як у режимі реального часу, так із використанням багатопроцесорного обчислювального комплексу СКІТ-4 Інституту кібернетики.

***Ключові слова**: метод глобального рівноважного пошуку, задачі булевого програмування, експериментальні дослідження, ефективність алгоритмів, об'єднання (портфелі і команди) алгоритмів.*

Вступ. Під час розв'язання важливих задач бюджетного і макроекономічного планування і прогнозування, прийняття управлінських рішень, проєктування складних технічних систем і мереж тощо на перший план висуваються питання якості рішень, які приймаються. У зв'язку з цим зростає роль методів і алгоритмів розв'язання оптимізаційних задач, зокрема задач дискретної оптимізації, у математичному забезпеченні комп'ютерних технологій різного рівня і призначення.

Обчислювальні складності, що виникають під час розв'язання дискретних оптимізаційних задач, часто пов'язані з їхньою великою розмірністю, багатоекстремальністю та наявністю дискретних змінних. Водночас ці задачі, як правило, мають специфічну структуру, яка дозволяє розробляти спеціальні методи їхнього розв'язання, які звичайно більш ефективні, ніж загальні методи дискретного програмування. З іншого боку, відомі алгоритми, які добре зарекомендували себе під час розв'язання спеціальних задач, під час переходу на більш загальні моделі втрачають свою простоту і стають менш ефективними. Практичне використання стандартних засобів дискретного програмування, заснованих, як правило, на методі гілок і меж, під час розв'язання реальних задач великої розмірності не приводить до успіху. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває розробка та дослідження різних наближених методів розв'язання дискретних оптимізаційних задач, орієнтованих, у тому числі, на використання багатопроцесорних обчислювальних комплексів.

Дана робота присвячена деяким підсумковим результатам успішного застосування наближеного імовірнісного методу глобального пошуку (ГРП) [1] для розв'язання на ЕОМ різних класів задач булевого програмування великої розмірності у послідовному і паралельному режимах.

Послідовні алгоритми ГРП. Метод ГРП є подальшим розвитком методу вектора спаду [2] та ідейно близький до методу відпалу [3]. Структури методів ГРП і відпалу подібні. Незважаючи на численні успішні застосування методу відпалу до широкого спектра задач оптимізації [4], є ряд задач, на яких він не може конкурувати навіть із тривіальним методом повторюваного випадкового локального пошуку (RLMS) через повільну асимптотичну збіжність. Ефективне використання властивостей області пошуку розв'язків дає можливість усунути деякі недоліки методу відпалу, зберігаючи всі його позитивні якості. У деякому сенсі метод ГРП відновлює ідеї больцманівської оптимізації.

Загальна схема методу ГРП [5, 6] включає два етапи: генерацію розв'язку та пошук локального екстремуму з використанням цього розв'язку як початкового наближення. Зазначимо, що під час вибору пошукового алгоритму на другому етапі методу ГРП враховується специфіка розв'язуваної задачі. Як пошукові для різних класів задач дискретної оптимізації використовувались наступні алгоритми:

1) локального пошуку з околами радіуса r = 1,2 [5,7];

2) табу [8];

3) “k – opt” алгоритм локального типу "пошук змінної глибини", заснований на ідеях Ліна – Кернігана [7].

Метод ГРП добре зарекомендував себе під час розв’язання різних задач дискретної оптимізації. Одна з них це задача про покриття множини (в подальшому задача про покриття), яка має багато практичних застосувань. Серед них слід назвати задачі, що виникають під час розв’язання проблем оптимального розміщення об’єктів, мінімізації логічних схем і алгоритмів, складанні розкладів, аналізу й синтезу живучості транспортних мереж. До них належать також задачі планування, тестування, пошуку комп’ютерних вірусів, інформації, балансування складальної лінії. Крім того, треба виділити дуже важливі з точки зору практичних застосувань задачі постачання, маршрутизації, планування роботи льотних екіпажів. І, нарешті, досить часто алгоритми розв’язання задачі про покриття входять до складу алгоритмічного забезпечення сучасних комп’ютерних технологій.

Крім комбінаторного формулювання задачу про покриття (SCP) можна представити як задачу булевого лінійного програмування вигляду: знайти

$$\min\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\}$$

з урахуванням обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i \in M = \{1, \ldots, m\},$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad j \in N = \{1, \ldots, n\},$$

де $c_j \geq 0$, $a_{ij} \in \{0,1\}$, $i \in M$, $j \in N$. Вона ще називається задача про мінімальне покриття або зважена задача про покриття.

SCP є NP-важкою задачею, тому розробка наближених алгоритмів її розв’язання представляє особливий інтерес. Для її розв’язання розроблено алгоритм глобального рівноважного пошуку [9]. Його ефективність перевірена на 65 випадково згенерованих тестових задачах великої розмірності, які доступні в OR-library (http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/scpinfo.html). Зазначимо, що розглянуті тестові задачі мають рідко заповнені матриці обмежень. Вони набагато складніші для розв’язання, ніж задачі з великою щільністю матриць.

Для порівняння з алгоритмом ГРП було вибрано сім відомих у світовій літературі алгоритмів [9], які показали хороші результати. Алгоритм ГРП продемонстрував свої переваги щодо більшості порівнюваних алгоритмів. Це стосується, зокрема, можливості та незначного часу отримання відомих рекордів (найкращих значень цільової функції) для розглянутої множини тестових задач.

Алгоритм ГРП [10] успішно застосовано до задачі булевого квадратичного програмування без обмежень (UBQP) вигляду: знайти

$$\max\left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \;\middle|\; x \in B^n \right\}, \tag{1}$$

де q_{ij} – елементи симетричної дійсної матриці Q порядку n, B^n – множина n-вимірних векторів з компонентами 0 або 1.

Моделі вигляду (1) описують багато задач інженерії, економіки, медицини, фізики, хімії та інших галузей. Застосування версій задачі (1) з обмеженнями і без обмежень можна знайти, крім того, у численних галузях, включаючи машинне проєктування, планування, керування повідомленнями тощо (див., наприклад, [11, 12]). У термінах булевого квадратичного програмування може бути представлено багато задач теорії графів, зокрема, задачі знаходження максимальної кліки і максимального зваженого розрізу графу [13]. Крім того, UBQP це загальна модель для широкого кола дискретних задач оптимізації. Приклади використання цієї задачі можна знайти під час розгляду задач розфарбування вершин графу, упаковки, розбиття, лінійного впорядкування та ін.

Для дослідження ефективності алгоритму ГРП проведено експериментальні розрахунки на множині 24 випадково згенерованих задач p3000.1,..., p10000.3 великої розмірності ($3000 \le n \le 10000$) із щільністю заповнення матриці від 0.5 до 1. Коди для генерування UBQP, які використовуються для перевірки ефективності розроблених алгоритмів, доступні на сайті http://www.soften.ktu.lt/~gintaras/ubqop_its.html. Звичайний набір тестів нами було розширено задачами з числом змінних n = 10000.

Алгоритм ГРП було порівняно з мультистартовим алгоритмом табу MST2 [14], оскільки його реалізація це одна з кращих для розв'язання задачі (1). Це випливає з порівняльного дослідження [14], де представлено результати з використанням інших відомих підходів, включаючи методи табу, відпалу, генетичний локальний пошук. Крім того, початковий код алгоритму доступний на згаданому вище сайті. Це дало змогу проводити обчислювальні експерименти, в яких для запуску алгоритмів використовувався один і той самий персональний комп'ютер. Отже, поданий далі час розв'язання задач може слугувати одним із параметрів для порівняння алгоритмів.

Кожна задача із представленої множини тестових задач розв'язувалася обома алгоритмами 20 разів за різних початкових значень датчика випадкових чисел. Алгоритм MST2 виконував 1000 ітерацій, витрачений ним на розв'язання задачі час (див. табл. 1) слугував критерієм зупинки для алгоритму ГРП. Такий план експериментів також дав можливість провести порівняння запропонованого алгоритму ГРП із перспективним гібридним метаевристичним алгоритмом HMA [15].

ТАБЛИЦЯ 1. Порівняння алгоритмів MST2 і GES

Задача	$f(x^{BKS})$	t^{max}	*success*		g^{avr}		t^{avr}		t^{best}	
			MST2	GES	MST2	GES	MST2	GES	MST2	GES
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p5000.1	8559680	1320	0	6	396.9	234.75	408.37	391.70	–	325.27
p5000.2	10836019	1960	1	19	552.9	29.1	234.5	519.53	1228.11	25.14
p5000.3	10489137	1960	17	20	37.8	0.0	916.0	413.16	42.7	21.49
p5000.4	12252318	2360	1	8	700.3	291	1099.1	927.61	1778.45	219.45
p5000.5	12731803	2360	13	20	307.1	0.0	885.5	227.62	46.75	11.19
p6000.1	11384976	1740	20	19	0.0	12.15	232.8	125.21	68.23	28.11

Закінчення таблиці 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p6000.2	14333855	2550	8	17	58.8	15.2	717.8	915.80	74.25	38.13
p6000.3	16132915	3060	10	20	1024.6	0.0	1566.9	738.75	253.48	17.08
p7000.1	14478676	2210	2	16	1447.6	123.5	1150.7	1196.4	1094.31	184.83
p7000.2	18249948	3170	0	6	1399.8	251.25	1481.40	1617.6	–	616.95
p7000.3	20446407	3170	20	20	0.0	0.0	296.8	215.37	109.26	50.33
p10000.1	24197906	3740	0	9	4023.9	1427.2	1719.08	2219.1	–	487.88
p10000.2	30627637	5260	0	3	4635.7	1068.85	2030.64	2584.0	–	2105.00
p10000.3	34690255	6330	0	1	3100,7	2326,85	3016.58	3253.25	–	5400.78

У табл. 1 подано деякі результати обчислювальних експериментів з розв'язання тестових задач вигляду (1) алгоритмами MST2 і ГРП (GES). Нехай $x^{max}(i)$ і $t^{max}(i)$ – відповідно рекордний (найкращий) розв’язок, знайдений алгоритмом, і час його знаходження для *i*-ї, $i = 1,\ldots,20$, спроби розв'язання задачі. У табл. 1, 2 використано такі позначення:

$$g^{avr} = f(x^{BKS}) - \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} f\left(x^{max}(i)\right);\ \ t^{avr} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} t^{max}(i);$$

$$t^{best} = \min_{1\le i\le 20}\left\{ t^{max}(i) \,\middle|\, f\left(x^{max}(i)\right) \ge f\left(x^{BKS}\right) \right\};$$

$I^{max} = \left\{ i \,\middle|\, f\left(x^{max}(i)\right) \ge f\left(x^{BKS}\right) \right\}$, $success = \left|I^{max}\right|$ ($\left|I^{max}\right|$ – потужність множини I^{max}) – число знайдених алгоритмом розв'язків задачі зі значенням цільової функції, не меншим рекорду $f(x^{BKS})$; t^{max} – максимальний час (в сек.), виділений на розв'язання задачі.

Аналіз результатів табл. 1 показав, що алгоритм ГРП за всіма показниками перевершує алгоритм MST2. Зазначимо тільки повну “невдачу” алгоритму MST2 на тестових задачах для $n = 10000$, оскільки він не зміг навіть наблизитися до результатів алгоритму ГРП.

Далі до порівняння був підключений алгоритм HMA [15] (див. табл. 2). Як зазначено в роботі [15], головна перевага цього алгоритму це те, що він знаходить кращі розв'язки для кожної з тестових задач. Однак наведені в табл. 2 дані показують, що алгоритм ГРП домінує і над алгоритмом HMA на множині розв’язаних задач.

ТАБЛИЦЯ 2. Порівняння алгоритмів HMA, MST2 і GES

Задача	*success*			t^{best}		
	HMA	MST2	GES	HMA	MST2	GES
1	2	3	4	5	6	7
p5000.1	4	0	6	153,20	>1200	458.63
p5000.2	6	1	14	98,70	>1200	35.45
p5000.3	14	17	17	364,50	60.21	30.30
p5000.4	3	1	5	789,60	>1200	309.42
p5000.5	16	13	20	212,30	65.92	15.78

Закінчення таблиці 2

1	2	3	4	5	6	7
p6000.1	12	20	19	727,70	96.20	39.64
p6000.2	6	8	12	965,30	104.69	53.76
p6000.3	3	10	16	676,50	357.41	24.08
p7000.1	5	2	15	987,30	1542.98	260.61
p7000.2	2	0	5	1254,70	>3000	869.90
p7000.3	7	20	20	1868,50	154.06	70.97

Таким чином, проведене порівняльне дослідження алгоритму ГРП з кращими алгоритмами MST2 і HMA розв'язання задачі (1) показало переваги алгоритму ГРП як за швидкодією, так і за можливістю отримання кращих розв'язків.

Задача про максимальний зважений розріз графу (WMAXCUT) – класична проблема дискретної оптимізації. Вона має численні практичні застосування [16–18] під час проєктування мереж зв'язку, надвеликих інтегральних схем, фазованих антенних решіток, моделювання нейронних мереж, розпізнавання образів, аналізу великих масивів даних тощо.

Задача про максимальний зважений розріз неорієнтованого графу має таку теоретико-графову інтерпретацію. Нехай задано неорієнтований граф $G = G(V, E)$ із множиною вершин V і множиною ребер E. Кожному ребру $(i, j) \in E$ графу поставлено у відповідність число w_{ij} – вага ребра (i, j). Припустимо, що (V_1, V_2) – розбиття множини V вершин графу G на дві неперетинні підмножини V_1 і V_2. Тоді множина ребер $(i, j) \in E$, таких, що $i \in V_1$, $j \in V_2$, називається розрізом (V_1, V_2) графу G. Очевидно, що будь-яке таке розбиття породжує розріз графу. Задача про максимальний зважений розріз неорієнтованого графу G полягає у знаходженні розрізу максимальної сумарної ваги

$$w(V_1, V_2) = \sum_{i \in V_1,\ j \in V_2,\ (i,j) \in E} w_{ij}\ .$$

Вона є NP-важкою навіть у випадку, коли всі ребра мають одиничну вагу.

Задача WMAXCUT може бути сформульована як задача булевого квадратичного програмування без обмежень. З іншого боку вона зводиться до зваженої задачі про максимальну виконуваність. Зведення WMAXCUT до вищеназваних двох моделей і застосування до них відомих алгоритмів ГРП [10, 19], очевидно, не було б ефективним. Тому для задачі про максимальний зважений розріз неорієнтованого графу було розроблено спеціальні алгоритми [20–22], що базуються на використанні методу ГРП і специфіки цієї задачі. У них специфіка розв'язуваної задачі враховується під час вибору алгоритму для процедури *метод_пошуку*. Використовується алгоритм, що дозволяє інтенсифікувати пошук і ефективно досліджувати області початкового розв'язку для його покращення. Зокрема, було використано рандомізовані алгоритми табу і локального пошуку LocS [20].

У роботі [22] розроблено алгоритм розв'язання задачі про максимальний зважений розріз графу, який базується на поєднанні ідей алгоритмів глобального рівноважного пошуку [1, 5, 6] і Path Relinking [23]. Схема алгоритму включає три етапи. На першому етапі за допомогою алгоритму ГРП генерується поточний розв'язок. Він разом з деяким елітним розв'язком є початковим для алгоритму ГРП на другому етапі, а пошук здійснюється на множині шляхів, що з'єднують ці розв'язки (ідея Path Relinking). Якщо знайдено розв'язок, кращий за поточний, він стає поточним. Цей етап виконується для всіх елітних (кращих) розв'язків. На третьому етапі формується деяка елітна множина. Для включення в неї поточний розв'язок повинен мати хороше значення цільової функції і перебувати досить далеко від цієї множини.

У процедурі *метод_пошуку* цього алгоритму реалізовано і досліджено три версії методу локального пошуку. Серед них алгоритми локального типу LocS і Tabu. Третім дослідженим алгоритмом пошуку є алгоритм Pr_LocS, який поєднує ідеї алгоритмів LocS і Path Relinking.

Для дослідження ефективності різних алгоритмів ГРП проведено численні обчислювальні експерименти [20–22]. Розрахунки виконувалися для двох множин тестових задач: 24 задачі G1, G2, G3, G11, …, G16, G22, G23, G24, G32, …, G37, G43, G44, G45, G48, G49 і G50, наведені в роботі [24], а також 20 задач sg3dl101000,…, sg3dl1010000, sg3dl141000,…, sg3dl1410000 із [25]. Ці задачі використовувалися раніше іншими авторами для перевірки ефективності їхніх алгоритмів, що дало змогу максимально розширити множину порівнюваних алгоритмів.

Спочатку було проведено розрахунки [20] для порівняння двох алгоритмів ГРП – GES Locs і GES Tabu, в яких у процедурі метод пошуку використано відповідно рандомізовані алгоритми локального типу і табу. Аналіз їхніх результатів показав, що кожен варіант алгоритму ГРП має свої переваги. Однак для тестових задач другої множини варіант GES Tabu перевершив перший варіант як за швидкодією, так і за якістю знайдених розв’язків.

Далі здійснено порівняння [20] алгоритму ГРП з п’ятьма кращими алгоритмами для цієї задачі. Аналіз отриманих результатів обчислювальних експериментів також свідчить про переваги алгоритму ГРП. Крім того, з його допомогою отримано нові рекорди для дев’яти задач першої множини.

В алгоритмі [22] у процедурі *метод_пошуку* крім алгоритмів локального типу і табу використовувався алгоритм Pr_LocS [23]. На основі трьох варіантів алгоритму ГРП (GES LocS, GES Tabu і GES Pr_LocS) виконано експериментальні розрахунки з розв’язання вищерозглянутих двох типів тестових задач. Аналіз результатів проведеного порівняльного дослідження показав, що не дивлячись на деяке збільшення часових витрат найбільш ефективним для обох типів задач виявився новий варіант GES Pr_LocS. Зокрема, з його допомогою отримано ще один новий рекорд.

У роботі [21] запропоновано модифікацію алгоритму GES Tabu [20]. Для порівняльного дослідження ефективності алгоритму ГРП [20] та його модифікації [21] виконано експериментальні розрахунки з розв'язання тестових задач із [24] (була збільшена їхня кількість) та задач із [25]. З їхніх результатів випливає, що за допомогою методу ГРП покращено рекорди для 37 задач, для інших – знайдено відомі рекорди. За швидкодією метод ГРП також перевершує відомі методи.

З аналізу результатів експериментальних досліджень можна зробити висновок про високу ефективність і конкурентоспроможність методу ГРП під час розв'язання цього класу задач. Таким чином, на сьогоднішній день він, безперечно, є одним з кращих методів розв'язання задач про максимальний зважений розріз графу.

Метод ГРП знайшов також застосування і до інших задач дискретної оптимізації, зокрема, задач складання розкладу, про максимальну виконуваність, квадратичної задачі про призначення тощо.

Паралельні алгоритми ГРП. Розв’язання задач дискретної оптимізації великої розмірності потребує оброки великих обсягів інформації за прийнятний час. Таку можливість надають багатопроцесорні обчислювальні комплекси. Проте без ефективних і масштабованих паралельних методів їх не можна використовувати. Для розпаралелювання процесу розв’язання дискретних оптимізаційних задач важливу роль відіграють об’єднання (портфелі і команди) алгоритмів [6, 26–29].

Нехай $A=\{A_1,...,A_m\}$ – множина алгоритмів, які працюють паралельно на p різних процесорах. Кожен алгоритм повинен розв’язувати одну і ту ж задачу. Будь-який процесор може використовуватися одним алгоритмом множини A, а один і той же алгоритм можна використовувати на різних процесорах (під час розпаралелювання його копій). Нехай є рандомізований алгоритм розв’язання дискретної оптимізаційної задачі, випадкову поведінку якого визначає датчик псевдовипадкових чисел. Копією такого алгоритму будемо називати його варіант, отриманий за одного початкового значення цього датчика. Очевидно, що за різних початкових значень датчика створюються різні копії вихідного алгоритму, які дають змогу здійснювати пошук відмінних між собою розв'язків.

Об'єднанням алгоритмів назвемо деяку підмножину множини A алгоритмів, які працюють паралельно над розв'язанням однієї задачі. Цю підмножину задають списком union list $\{n_1 A_1,...,n_m A_m\}$ алгоритмів A_i із зазначенням кількості n_i, $i = 1,\ldots,m$, використовуваних ними процесорів, причому $\sum_{i=1}^{m} n_i = p$. Об'єднання алгоритмів, які не обмінюються інформацією і працюють незалежно один від одного, називають портфелем алгоритмів. Якщо алгоритми, що входять в об'єднання, обмінюються інформацією, то таке об'єднання називають командою алгоритмів.

У подальшому основну увагу зосереджено на задачі про максимальний зважений розріз графу, для якої найбільш ефективними виявилися алгоритми глобальною рівноважною пошуку, і для них вдало відображена специфіка роботи об'єднань алгоритмів.

Проведено дослідження зі створення портфелів алгоритмів для задачі WMAXCUT. Спочатку було досліджено ефективність однорідних портфелів чотирьох алгоритмів ГРП [26] на основі численних експериментальних розрахунків з використанням чотирьохядерного персонального комп'ютера в режимі реального часу. Розв'язано 23 задачі з роботи [24] і 7 задач із [25]. Із отриманих даних можна зробити висновок, що застосування портфелів алгоритмів у порівнянні з одним алгоритмом потребує менше часових витрат та дає змогу знайти кращі розв'язки.

Значну увагу приділено командам алгоритмів ГРП та їхньому порівнянню з портфелями. У командах алгоритми обмінюються інформацією один з одним, причому розглядається проста стратегія обміну, де тільки рекордний розв'язок і відповідний йому рекорд є предметами обміну. Досліджено три стратегії обміну інформацією між алгоритмами команд [28], проведено їхнє порівняння.

Експериментальні розрахунки для задачі WMAXCUT проведено з використанням алгоритмів ГРП нового покоління GESPR, які базуються на поєднанні алгоритмів ГРП і Path Relinking [23]. Особливість алгоритмів GESPR це проведення осциляції навколо найкращого знайденого розв'язку на основі методології Path Relinking [23]. Як і в [30], експерименти проведено з 71 тестовою задачею, які широко використовуються для перевірки алгоритмів розв'язання задач WMAXCUT. Ці задачі можна завантажити із http://www.stanford.edu/~yyye/yyye/Gset/. Вони включають тороїдальні, планарні та випадкові графи з числом вершин $|V|$ від 800 до 20 000 і значення ваги ребер 1, 0 або –1.

Обчислювальні експерименти з розпаралелювання процесу розв'язання задачі WMAXCUT проведено за допомогою портфеля і трьох команд копій чотирьох алгоритмів GESPR з використанням PC Intel®Core™ i7-3770 CPU @ 3.40 Ghz і 8.0GB оперативної пам'яті в режимі реального часу. Інакше кажучи, всі алгоритми стартували одночасно.

На рис. 1 показано усереднену динаміку процесу розв'язання задачі G81 великої розмірності (20000 вершин графу) за допомогою портфеля port і трьох команд team1, team2, team3 алгоритмів. Кожна точка графіка показує середній час знаходження розв'язку з відповідним значенням цільової функції. Жирною горизонтальною лінією виділено раніше відомий рекорд [30]. Ці результати вказують на вражаючий ефект при впровадженні обміну інформацією між алгоритмами команд у порівнянні з портфелем алгоритмів.

На основі отриманих результатів можна зробити висновок про високу обчислювальну ефективність алгоритму GESPR: портфель і команди алгоритмів GESPR знайшли кращі рекорди, ніж раніше відомі (9926 для задачі G77 і 14030 для графу G81) [30]. Важливо, що всі 3 команди перевершили портфель алгоритмів з точки зору якості розв'язків.

Експериментальні дослідження з розпаралелювання процесу розв'язання задач WMAXCUT виконувались також з використанням багатопроцесорного обчислювального комплексу СКІТ-4 Інституту кібернетики. Зокрема, було розв'язано задачу G81.

На рис. 2 показано результати експериментів, що стосуються прискорення процесу розв’язання задачі G81 за допомогою портфелів port з 8, 16, 32 алгоритмів і команд team з 8, 16, 32 алгоритмів ГРП порівняно з одним алгоритмом. Вони показали, що портфель із 32 алгоритмів ГРП у 32 рази швидше, ніж один алгоритм, знаходить розв’язок задачі із значенням цільової функції 14054. Команда team з 32 алгоритмів у 95 разів швидше, ніж один алгоритм, знаходить розв’язок з таким же значенням цільової функції.

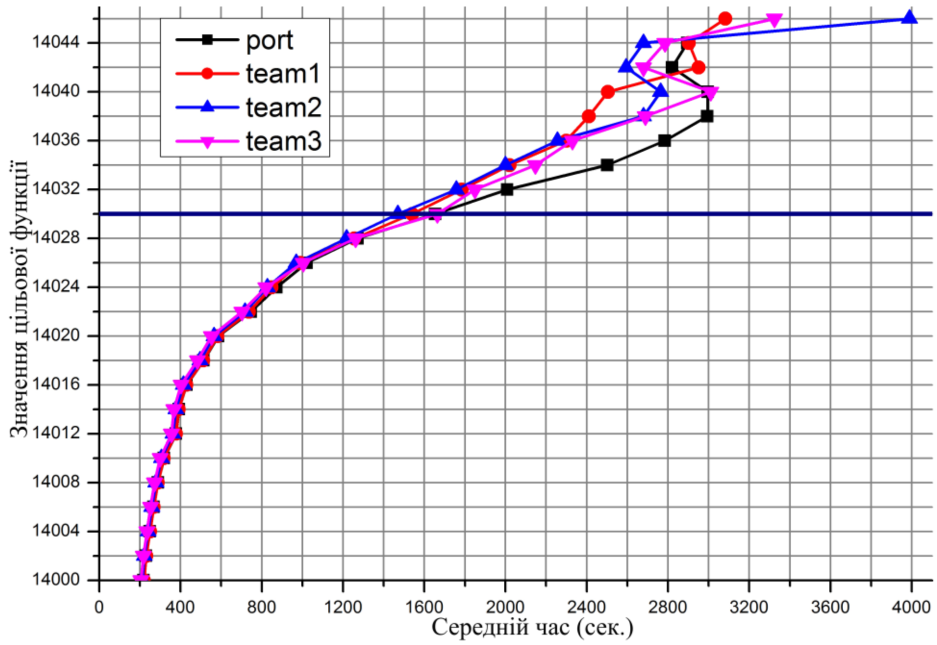

РИС. 1. Усереднена динаміка процесу розв’язання задачі G81

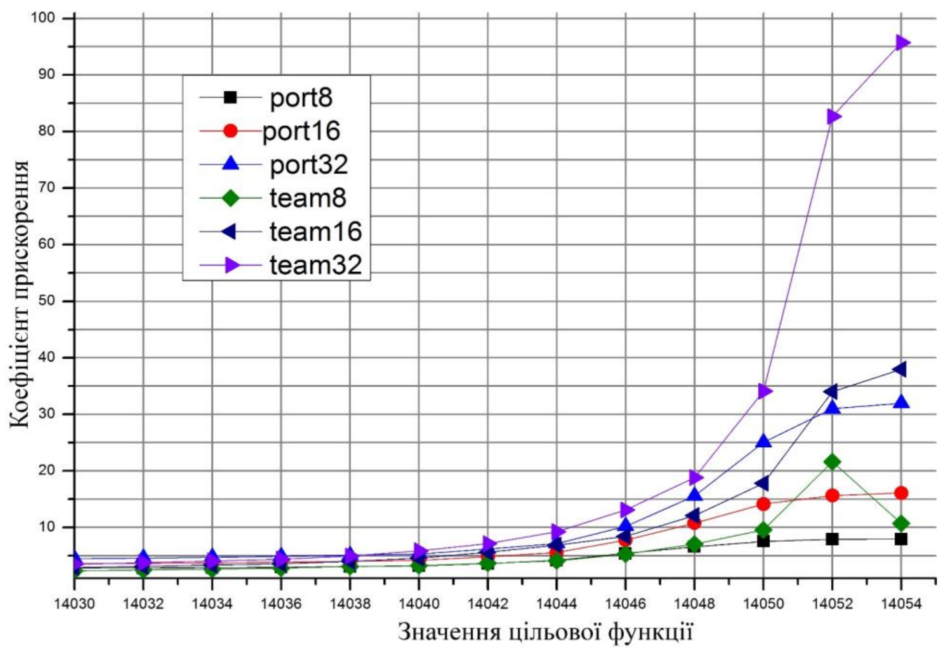

РИС. 2. Графіки прискорення процесу розв’язання задачі G81

Із аналізу отриманих результатів експериментальних розрахунків випливає, що з використанням команд алгоритмів досягається надлінійне прискорення. Це свідчить про перспективність подальших досліджень щодо розвитку і вдосконалення команд алгоритмів, зокрема щодо розробки ефективних протоколів обміну інформацією, які входять до складу команд.

Проведено також теоретичне дослідження ефективності роботи об'єднань оптимізаційних алгоритмів [29], яке є одним із типів розпаралелювання обчислень. Побудовано марковську модель для аналізу обміну інформацією між оптимізаційними алгоритмами команд та лінійну модель випадкових ходів для дослідження ефективності цих команд. Для вивчення впливу обміну інформацією на ефективність роботи команд алгоритмів застосовувалась комбінація методів ГРП і Path Relinking. Вона також слугувала будівельним блоком для побудови портфелів і команд алгоритмів для розв'язання задачі про максимальний зважений розріз графу. Розроблено протокол зв'язку між алгоритмами як одну із багатьох можливих конфігурацій об'єднань. Встановлено оцінки ефективності конфігурацій об'єднань оптимізаційних алгоритмів, згідно з якими командний підхід забезпечує надлінійне прискорення пошуку високоякісних розв'язків, а портфель алгоритмів наближається до лінійного коефіцієнта прискорення. Оскільки використання паралельних обчислень в оптимізації ускладнено відсутністю масштабованих методів, запропонована теоретична база комунікації алгоритмів є важливим кроком уперед для реалізації цього потенціалу. Вона може бути використана для широкого класу оптимізаційних алгоритмів.

Висновки. Проведені дослідження свідчать про те, що імовірнісний наближений метод глобального рівноважного пошуку є одним з кращих методів булевого програмування. Аналіз результатів обширних обчислювальних експериментів з розв'язання алгоритмами ГРП різних класів задач та їхнє порівняння з кращими світовими аналогами показали ефективність розроблених алгоритмів щодо часу знаходження та якості отриманих розв'язків. Використання розроблених об'єднань (портфелів і команд) алгоритмів ГРП для розпаралелювання процесу оптимізації дає змогу суттєво прискорити обчислення.

Подяка. Робота виконана за часткової фінансової підтримки гранту Національного фонду досліджень України № 2021.01/0136.

Список літератури

1. Шило В.П. Метод глобального равновесного поиска. *Кибернетика и системный анализ*. 1999. Т. **35**, № 1. С. 74–81. https://doi.org/10.1007/BF02667916
2. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наукова думка, 1988. 472 с.
3. Kirkpatrick S., Gelatti C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing. *Science*. 1983. Vol. **220**. P. 671–680. https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671
4. Aarts E., Korst J. Simulated annealing and Boltzmann machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing. New York: J. Wiley and Sons, 1989. 284 p.
5. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003. 264 с.
6. Сергієнко І.В., Шило В.П., Рощин В.О. Дискретна оптимізація. Алгоритми та їхнє ефективне використання. Київ: Наукова думка, 2020. 144 с.
7. Papadimitriou C., Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. New York: Dover Publications, 1998. 528 p.
8. Glover F., Laguna M. Tabu search. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. 382 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6089-0
9. Рощин В.О., Боярчук Д.О., Ляшко В.І., Шило П.В. Алгоритм глобального рівноважного пошуку розв'язання задачі про покриття. *Наукові записки НаУКМА. Комп`ютерні науки*. 2014. Т. **163**. С. 25–32. https://ekmair.ukma.edu.ua/handle/123456789/3402

10. Шило В.П., Шило О.В. Решение задачи булева квадратичного программирования без ограничений методом глобального равновесного поиска. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. **47**, № 6. С. 68—78. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9368-5
11. Alidaee B., Kochenberger G., Ahmadian A. 0–1 quadratic programming approach for the optimal solution of two scheduling problems. *International J. of Systems Science*. 1994. Vol. **25**. P. 401–408. https://doi.org/10.1080/00207729408928968
12. Gallo G., Hammer P.L., Simeone B. Quadratic knapsack problems. *Math. Programming*. 1980. Vol. **12**. P. 132–149. https://doi.org/10.1007/BFb0120892
13. Pardalos P.M., Xue J. The maximum clique problem. *J. of Global Optimiz*. 1994. Vol. **4**. P. 301–328. https://doi.org/10.1007/BF01098364
14. Palubeckis G. Iterated tabu search for the unconstrained binary quadratic optimization problem. *Informatica*. 2006. Vol. **17**. No. 2. P. 279–296. https://doi.org/10.15388/Informatica.2006.138
15. Lu Z., Glover F., Hao Jin-Kao. A hybrid metaheuristic approach to solving the UBQP problem. *Eur. J. Oper. Res*. 2010. Vol. **207**, No. 3. P. 1254–1262. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.06.039
16. Barahona F., Grotschel M., Junger M., Reinelt G. An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Oper. Res*. 1988. Vol. **36**. P. 493–513. https://doi.org/10.1287/opre.36.3.493
17. Chang K.C., Du D.H.-C. Efficient algorithms for layer assignment problem. *IEEE Trans. on Computer – Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 1987. Vol. **6**. P. 67–78. https://doi.org/10.1109/TCAD.1987.1270247
18. Poljak S., Tuza Z. Maximum cuts and large bipartite subgraphs. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. 1995. Vol. **20**. P. 181–244. https://doi.org/10.1090/dimacs/020/04
19. Prokopyev O., Shylo O., Shylo V. Solving weighted MAX-SAT via global equilibrium search. *Oper. Res. Lett*. 2008. Vol. **36**, No. 4. P. 434–438. https://doi.org/10.1016/j.orl.2007.11.007
20. Шило В.П., Шило О.В. Решение задачи о максимальном разрезе графа методом глобального равновесного поиска. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. Т. **46**, № 5. С. 68–79. https://doi.org/10.1007/s10559-010-9256-4
21. Шило В.П., Шило О.В., Рощин В.А. Метод глобального равновесного поиска решения задачи о максимальном взвешенном разрезе графа. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. **48**, № 4. С. 101–105. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9435-6
22. Shylo V.P., Shylo O.V. Path relinking scheme for the max-cut problem within global equilibrium search. *International J. of Swarm Intelligence Res*. 2011. Vol. **2**, N 2. P. 42–51. https://doi.org/10.4018/jsir.2011040103
23. Glover F., Laguna M., Marti R. Fundamentals of scatter search and path relinking. *Control and Cybernetics*. 2000. Vol. **39**. P. 653–684.
24. Helmberg C., Rendl F. A spectral bundle method for semidefinite programming. *SIAM J. on Optimization*. 2000. Vol. **10**. P. 673–696. https://doi.org/10.1137/S1052623497328987
25. Burer S., Monteiro R.D.C., Zhang Y. Rank-two relaxation heuristics for MAX-CUT and other binary quadratic programs. *SIAM J. on Optimization*. 2002. Vol. **12**. P. 503–521. https://doi.org/10.1137/S1052623400382467
26. Шило В.П., Рощин В.А., Шило П.В. Построение портфеля алгоритмов для распараллеливания процесса решения задачи о максимальном взвешенном разрезе графа. *Компьютерная математика*. 2014. № 2. С. 163–170.
27. Шило В.П., Рощин В.О., Шило П.В. Паралельні алгоритми розв’язання задач булевого квадратичного програмування. *Компьютерная математика*. 2015. № 2. С. 12–20. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/168376
28. Shylo V.P., Glover F., Sergienko I.V. Teams of global equilibrium search algorithms for solving the weighted maximum cut problem in parallel. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. **51**, No. 1. P. 20–29. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9692-2
29. Shylo V.P., Shylo O.V. Algorithm Portfolios and Teams in Parallel Optimization. Optimization Methods and Applications. S. Butenko, P.M. Pardalos, V. Shylo (eds.). New York: Springer, 2017. Vol. **130**. P. 481–493. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_23
30. Benlic U., Hao J.K. Breakout local search for the max-cut problem. *J. Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2013. Vol. **26**, No. 3. P. 1162–1173. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2012.09.001

Одержано 11.07.2023

Сергієнко Іван Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України,
директор Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
https://orcid.org/0000-0002-1118-7451

Шило Володимир Петрович,
доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
v.shylo@gmail.com

Рощин Валентина Олексіївна,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,

Шило Петро Володимирович,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
petershylo@gmail.com

УДК 519.854

І.В. Сергієнко, В.П. Шило, В.О. Рощин, П.В. Шило *

Застосування методу глобального рівноважного пошуку для розв'язання задач булевого програмування

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
* *Листування:* *petershylo@gmail.com*

Вступ. Останнім часом зростає роль методів і алгоритмів розв'язання дискретних оптимізаційних задач у математичному забезпеченні комп'ютерних технологій різного рівня і призначення. У зв'язку з цим особливу увагу слід звертати на ефективність методів дискретної оптимізації, стимулюючи розвиток методів, які дають змогу розв'язувати складні прикладні задачі. Таким ефективним є представлений у роботі метод глобального рівноважного пошуку (ГРП, GES) розв'язків задач булевого програмування.

Мета роботи – опис результатів успішного застосування наближеного імовірнісного методу GES для розв'язання різних класів задач булевого програмування.

Результати. Розглянуто застосування послідовних алгоритмів GES для розв'язання задач булевого лінійного, булевого квадратичного програмування та ін. з урахуванням їхньої специфіки. Проведений порівняльний аналіз розроблених алгоритмів з кращими світовими аналогами показав ефективність алгоритмів GES. Для розпаралелювання процесу оптимізації для задач дискретного програмування створено об'єднання (портфелі і команди) алгоритмів. Досліджено ефективність роботи портфелів і команд алгоритмів GES на прикладі задачі про максимальний зважений розріз графу та проведено їхнє порівняння.

Висновки. Отриманий досвід використання алгоритмів GES та їхніх модифікацій для розв'язання різних класів задач свідчить про те, що метод GES є кращим наближеним методом булевого програмування. Об'єднання алгоритмів GES дозволяє суттєво прискорити оптимізаційний процес. Більш ефективними є команди алгоритмів.

Ключові слова: метод глобального рівноважного пошуку, задачі булевого програмування, експериментальні дослідження, ефективність алгоритмів, об'єднання (портфелі і команди) алгоритмів.

UDC 519.854

Ivan Sergienko, Vladimir Shylo, Valentyna Roshchyn, Petro Shylo *

Application of the Global Equilibrium Search Method for Solving Boolean Programming Problems

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
* *Correspondence:* *petershylo@gmail.com*

Introduction. The significance of methods and algorithms for solving discrete optimization problems in mathematical supporting computer technologies of diverse levels and objectives is increasing. Consequently, the efficacy of discrete optimization methods deserves particular attention, as it drives the advancement of techniques capable of solving complex real-world problems. This paper introduces the Global Equilibrium Search (GES) method as a highly effective approach for solving Boolean programming problems, thus contributing to the field's progress and applicability.

Purpose. We describe the successful application of the approximate probabilistic GES method for effectively solving various Boolean programming problems.

Results. This paper explores the application of sequential GES algorithms for solving Boolean linear, Boolean quadratic programming, and other related problems with their specific characteristics. In our study, we conducted a comparative analysis to assess the effectiveness of GES algorithms by evaluating them against state-of-the-art approaches. Additionally, to parallelize the optimization process for discrete programming problems, we introduced algorithm unions, specifically portfolios, and teams. The efficiency of GES algorithm portfolios and teams is investigated by solving the maximum weighted graph cut problem, with subsequent comparisons to identify distinctions between them.

Conclusions. Based on the accumulated experience of applying GES algorithms and their modifications to solve discrete optimization problems, this study establishes the GES method as the leading approximate approach for Boolean programming. The results demonstrate the GES algorithm unions experience a significant boost in the optimization process speed, whereas algorithm teams demonstrate higher efficiency.

Keywords: global equilibrium search method, Boolean programming problems, experimental studies, algorithm efficiency, algorithm unions (portfolios and teams).