

МОДЕЛІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

Вступ. Основні визначення та позначення узяті з [1–3]. Розглянуто задачу дослідження структури графів-обструкцій для поверхні Клейна та побудовані їхні граф-моделі як основа з якої утворюються графи-обструкції заданої поверхні неорієнтованого роду. Задача дослідження структури графів неорієнтованого роду розглядалася в [4–6]. В роботі [7] методом релятивних компонент була стиснута множина мінорів для проективної площини до 12-ти базисних мінорів та побудовано множину з 62-х мінорів поверхні Клейна. Для цього розглядали всі неізоморфні мінімальні вкладення кожного з базисних мінорів та знаходили множину всіх різних пар вершин, яка є досяжною на проективній площині при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра цього графу, потім до обраної пари точок приєднували пару несуміжних вершин графу $K_5 \setminus e$. В роботі [8] обчислена кількість 2-зв'язних графів-обструкцій для поверхні Клейна, частина діаграм цих графів наведена в [9]. Наш підхід, як продовження [10], полягатиме у знаходженні реберного покриття графу-обструкції G , заданого неорієнтованого роду, мінімальним числом підграфів з числа квазізірок з центрами – графами з суттєвими ребрами відносно числа досяжності чи відносно неорієнтованого роду при операціях стискання в точку, або при видаленні ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини та досяжними на проективній площині. Для поверхні Клейна, наприклад, це підмножини множини точок графів K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$, $\overline{K_r}$, $r \geq 2$, чи граф-обструкції проективної площини. Також знайдено необхідні умови для побудови графів-обструкцій для поверхні Клейна шляхом ототожнення пар точок центрів та висячих вершин трьох квазізірок, що дає основу алгоритма побудови більшого числа графів-обструкцій для поверхні Клейна. Гіпотетично граф-обструкція заданого неорієнтованого роду $n, n \geq 2$, має вигляд циліндричної поверхні з n дисками-основами та бічною частиною, які можуть мати спільні множини точок на границях, та на яких вкладені, принаймні частиною, графи-центри квазізірок,

Розглянуто задачу дослідження структури графів заданої зв'язності, які є обструкціями для заданої поверхні неорієнтованого роду та побудови їхніх моделей, з яких шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер, утворюються графи-обструкції. Основний результат: твердження 1, 2, 3 та алгоритм побудови моделей 3-зв'язних графів-обструкцій поверхні Клейна.

Ключові слова: φ -перетворення графів, неорієнтована поверхня, моделі графів-обструкцій.

що мають задану множину точок досяжності 2 на евклідовій площині, а на бічній поверхні розміщуються висячі ребра, що перетинаються на площині та вкладаються без перетину за допомогою приклеєних до бічної поверхні лент Мебіуса. При цьому ребра матимуть, щонайменше, два варіанти вкладення у бічну частину циліндричної поверхні, але не більше кількості приклеєних лент Мебіуса, через це кожне висяче ребро вклатиметься на ленті Мебіуса, або тільки з одним ребром, або з двома суміжними ребрами. Зазначимо, що для наведеного далі визначення 3 є аналогічне в [11].

Частина 1

Нехай задано мінімальне вкладення f графу G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$. Це найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток, на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може бути поданим наступним перетворенням:

$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, як φ -образ графу H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок a_i , де задана множина точок графу H , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, де $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t множини $N \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, мінімальним вкладенням f' , $f': H \rightarrow N'$.

Аналогічно характеристикам вкладення графу G до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множини $S_G(N, f)$, визначимо характеристику θ , $\theta = 1$, множини M коли виконується умова $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$, тобто є хоча б одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta = 1$, якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімально, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Позначення 1. Позначатимемо $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу по включенню зірку графу G з центром в a , $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку відносно точки перетину границь кліток s_i, s_j . Саме ці ребра чи їхні частини вклатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь s_i, s_j .

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графу H до неорієнтованої поверхні N . Позначатимемо $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ – операцію перетворення ребер e_1, e_2 , $f(e_1) \subset \partial s_1$, $f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2 , де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$. Вкладення f графу H в N розміщує на границях кліток s_1, s_2 множину $f(M)$, $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} ленту Мебіуса таким чином. Розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i , $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'' , де $i = 1, 2$. Виріжемо у середині s_{12} елементарний диск з центром в x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2'') , (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин схрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні

N' , де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка прилеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$, і отримати вкладення графу G в поверхню N' .

Позначення 3. Під квазізіркою $St_G(H)$ з центром H розумітимемо підграф чи частину H графу G з множиною висячих ребер, прикріплених однією кінцевою точкою до вершини чи точки ребра підграфу H , а інші кінцеві точки належать множині приєднання M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Визначення 1. Нехай задано мінімальне вкладення f графу G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$. Будемо називати клітковою довжиною $d_G(s_i, s_j, f)$ між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графу G , де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_j\} \subset S_G(N, f)$, потужність $|J|$ найменшої по включенню впорядкованої множини J , $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$, $J \subseteq S_G(N, f)$, де послідовні пари кліток мають на своїх границях, щонайменше одне, спільне ребро. Причому підмножину множини J , складену із щонайменше двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, рахуватимемо як одну клітку. Також будемо вважати, що на множині J задано особливий простий клітковий ланцюг L_{ij} , $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, який з'єднує клітки s_i, s_j кліткового графу для графу G . У випадку незв'язного графу G одна з кліток множини J буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Називатимемо деревом T досяжності множини точок M зв'язного графа G та позначатимемо $T = T_G(M, N)$ відносно заданого мінімального вкладення f графу G до неорієнтованої поверхні N , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, яке реалізує число досяжності t , $t_G(M, N) = t$, пару множин $(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$, де $\{L_{ij}\}$ – найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$ які, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних кліткових ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток s_i, s_j та мають найменшу суму довжин всіх L_{ij} із множини $\{L_{ij}\}$.

Визначення 3. Для множини точок M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, зв'язного графу G роду $\gamma = \gamma(G)$ з числом досяжності $t_G(M, N_\gamma)$, де $t_G(M, N_\gamma) = t$, $t \geq 2$, будемо називати $d_G(M, t)$ клітковою довжиною між підмножинами L_i, L_j множини M , $M = L_i \cup L_j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$, розташованими на границях довільних кліток $s_i, s_j, \{s_i, s_j\} \subset S_G(N_\gamma, f)$, якщо має місце $d_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN} \sum_{\forall s_i, s_j \in T} d_G(s_i, s_j, f)$, де fGN – множина всіх неізоморфних вкладень графу G до N_γ , що реалізують число досяжності $t_G(M, N_\gamma)$ множини точок M .

Визначення 4. Називатимемо множини M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графу G з числом досяжності t , де $t_G(M, \Sigma_0) = t$, критичною відносно кліткової довжини $d_G(M)$ як при операції видалення довільного елемента a_i , якщо має місце нерівність $d_G(M \setminus a_i) < d_G(M)$, так і відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ у точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{Gu}(M') < d_G(M)$.

Визначення 5. Називатимемо граф G мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання у точку довільного ребра u , якщо $d_{G \setminus u}(M) + 1 = d_G(M)$ або $d_{Gu}(M') < d_G(M)$, де Gu – граф з стиснутим у точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$.

Визначення 6. Вважатимемо, що 2-зв'язний граф-обструкція G неорієнтованого роду $\gamma(G)$, $\gamma(G) > 1$, покривається множиною з k , $k = 2$, квазізірок $St_G(H_i)$ з центром H_i (коли центр – вироджений граф з множиною вершин $H_i^0 = \{v_j\}_{j=1}^{r_i}$ матимемо множину $\sum_{j=1}^{r_i} St_G(v_j)$ простих зірок), якщо

має місце $G^1 = \sum_{j=1}^k St_G^1(H_j)$, тобто кожне ребро графу належить, щонайменше, одній з двох квазізірок

та мають місце наступні три умови. 1. Граф центр H_1 – площинний із заданою множиною точок M_1 з числом досяжності 2 відносно евклідової площини. 2. Граф-центр H_2 роду $\gamma(H_2) \geq 0$ (якщо $\gamma(H_2) = 0$, то $t = 2$) із заданою множиною точок M_2 з числом досяжності t , $t = 1$, відносно поверхні роду $\gamma(H_2)$. 3. Всі висячі ребра-промені мають бути суттєвими відносно числа досяжності при операції видалення ребра, а деякі висячі ребра-промені можуть належати різним квазізіркам або бути відсутніми взагалі, де $M_i = \{m_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, n_i – число висячих ребер (m_{ij}, b_{ij}) , де $i = 1, 2, \dots, n$, $j \neq j'$, $j, j' = 1(1)|G|$.

Лема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Кліткова відстань між заданою парою кліток мінімального неорієнтованого вкладення заданого зв'язного графа – це збільшена на 1 найменша метрична відстань між довільними парами точок на границях цих кліток.

2. Якщо множина M має більш ніж дві клітки мінімального неорієнтованого вкладення зв'язного графу та визначено дерево $T(M)$ (в якому вершинами будуть елементи множини M , а ребром буде наявність спільної точки для границь кліток множини M), то кліткова відстань між її елементами – це сума збільшених на 1 довжин найкоротших ланцюгів між парами довільних вершин дерева $T(M)$.

3. Ребро u графу G суттєве відносно числа досяжності заданої множини точок M , $M = \{a, b\}$, графу G при операції його видалення, якщо належить квазізірці $St_G(K_4 \setminus (a, b))$.

4. Граф $K_5 \setminus (a, b)$ ізоморфний $St(K_4)$ з чотирма висячими ребрами, з яких три мають висячі вершини ототоженні в точку a , а четверте ребро стягнуте в точку b .

5. Зірка $St(K_4)$ 2-зв'язного графу-обструкції G заданого неорієнтованого роду 3 має, щонайменше, по одному висячому ребру-променю з кожної вершини графу K_4 чи, щонайменше, з чотирьох внутрішніх точок його ребер, причому деякі з них можуть бути стягнутими у точку.

6. Для кожного графу-обструкції є реберне покриття підграфами чи частинами гомеоморфними K_4 .

Доведення. Твердження 1–3 леми 1 впливатиме з поняття метрики графа та вищенаведених визначень 3–5. Твердження 4 – очевидне. Довести твердження 5 можливо методом від протилежного, припустивши, що є вершина v графу K_4 , як центр квазізірки, що має степінь 3 та не належить ребру-променю квазізірки $St(K_4)$. Можливі два випадки для внутрішніх ребер графу K_4 .

Випадок 1. Ребра розміщені на ленті Мебіуса.

Випадок 2. Ребра розміщені на різних лентях Мебіуса.

Розглянемо випадок 1. У цьому випадку можливо звільнити від одного зі схрещених ребер ленту Мебіуса, розташовану в середині 2-клітки s з границею ∂s – циклом z довжини 4 центра квазізірки, шляхом розміщення назовні циклу одного зі схрещених ребер, яке не матиме кінцевої вершини v . Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить визначенню графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 1 доведене.

Розглянемо випадок 2. Якщо обидва внутрішні ребра графа K_4 не розміщені на ленті Мебіуса, то одне з них схрещується на площині із ребром-променем квазізірки $St(K_4)$ та розміщується на ленті Мебіуса, яка приклеєна до зовнішньої, відносно циклу z , клітки. Виконаємо симетричне відображення по вертикальній осі графа K_4 . Для цього переставимо місцями тільки пару протилежних вершин у циклі z одна з яких має степінь 3 та суміжні ребра. Тоді на зовнішній клітці, відносно повернутого циклу z , вкладемо без перетину ті висячі ребра-промені квазізірки, що вкладалися на ленті Мебіуса. Матимемо в результаті такого вкладення квазізірки, що, принаймні, лента Мебіуса h звільниться від одного з двох схрещених ребер. Схематично показано це на картах 6 та 7 рис. 1. Тим самим зменшимо рід графа-обструкції G заданого неорієнтованого роду, що суперечить поняттю графа-обструкції. Припущення неможливе, твердження 5 для випадку 2 доведене.

Доведення твердження 6. Оскільки кожне ребро графа-обструкції неорієнтованого роду графу G на евклідовій площині перетинається у внутрішній точці z , щонайменше з одним ребром, розміщується певним мінімальним вкладенням на ленті Мебіуса неорієнтованої поверхні разом, щонайменше, із одним ребром. Тоді довільне ребро є ребром підграфу гомеоморфного K_4 , який у свою чергу є підграфом чи частиною підграфу гомеоморфного графу Куратовського. З іншого боку, обидва графи Куратовського мають реберне покриття парою чи трійкою підграфів гомеоморфних K_4 . Таким чином граф-обструкція G матиме реберне покриття скінченною множиною з графів чи частин гомеоморфних K_4 . На 8-й карті рис. 1 показано реберне покриття $K_{3,3}$ з двома частинами гомеоморфними графу K_4 , один без наведеного ребра, а друга частина отримана видаленням одного з трьох несуміжних ребер, окрім наведеного ребра. На 9-й карті даного рисунку показано реберне покриття K_5 трьома гомеоморфними графу K_4 , один без чотирьох ребер з спільною вершиною v , із них два виділених ребра, а два інших утворені з колеса O_4 з чотирма ребрами-шпицями почерговим видаленням одного з наведених ребер. Доведення леми 1 закінчено.

Твердження 1. Нехай 2-зв'язний граф G – граф-обструкція неорієнтованого роду 3, всі ребра якого є суттєвими відносно роду при операції видалення ребра чи його стискання в точку, має підграф $St_G(H_i)$ – квазізірка з центром H_i (коли центр є виродженим графом з множиною вершин

$$H_i^0 = \{v_j\}_{j=1}^{r_i} \text{ матимемо замість квазізірки множину } \sum_{j=1}^{r_i} St_G(v_j) \text{ зірок), гомеоморфним площинному}$$

графу із заданою множиною точок M_i з числом досяжності 2, де $M_i = \{m_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, та n_i висячими ребрами (m_{ij}, b_{ij}) , де $i=1,2,3$, $j \neq j'$, $j, j'=1(1)|G|$. Існує покриття множини ребер графу G трьома квазізірками $St_G(H_i)$, можливо із, однією спільною вершиною чи частиною ребра графів H_i, H_j .

Доведення. Нехай для 2-зв'язного графу G виконуються умови твердження 1. Тоді граф G має підграф чи частину Θ гомеоморфний одному із 104 графів-обструкцій для проєктивної площини, який у свою чергу можливо подати як об'єднання двох підграфів гомеоморфних одному з графів Куратовського [4]. Тобто множина ребер графу Θ покривається двома квазізірками виду $St_G(H_i)$, бо містить два різних підграфи чи частини H_i , кожен з яких гомеоморфний квазізіркам з центром

$K_4, K_{2,3}, K_{3,3} \setminus e, K_5 \setminus e$, чи $K_5, K_{3,3}$. Зазначимо, що у випадку центру $K_{2,3}$ частина висячих ребер квазізірки матимуть кінцеву вершину, а сама зірка міститиме підграф чи частину гомеоморфну K_5 . Граф G – граф-обструкція роду 3, множина ребер $G^1 \setminus \Theta^1$ непушта і кожне ребро $u, u \in G^1$, належить графу K_5 , чи $K_{3,3}$ тобто, до ребер з множини K_4^1 та додаткового ребра, яке з'єднує пару точок несуміжних ребер з K_4 , або до ребер-променів простої зірки, які попарно ототоженені з кожною вершиною графу K_4 . Таким чином граф G покривається, щонайменше, трьома підграфами чи частинами гомеоморфними одному з графів Куратовського, які є квазізірками з центрами гомеоморфними K_4 . Доведемо достатність такого покриття. Видалимо ребро $u, u = (a,b)$, розглянемо підграф чи частину K гомеоморфну графу $K_4 \setminus u$. Тоді в графі $G \setminus u$ матимемо квазізірку $St_{G \setminus u}(K)$, якій належать всі ребра з множини $G^1 \setminus \Theta^1$, що інцидентні вершинам підграфа чи частини K та є суттєвими відносно $t_{G \setminus u}(\{a,b\})$ – числа досяжності множини $\{a,b\}$ при операції видалення ребер графу $G \setminus u$. Стверджуємо, що інших ребер немає. Припустимо зворотнє, що $x \in G^1 \setminus (\{u\} \cup St^1(K) \cup \Theta^1)$. Видаливши ребро x отримаємо його несуттєвість відносно неорієнтовного роду графу $G \setminus u$, бо $x \notin \Theta^1$, або несуттєвість відносно числа $t_{G \setminus u}(\{a,b\})$, бо $x \notin St(K)$. Приєднаємо ребро u до $G \setminus u$ та отримаємо граф $G \setminus x$ роду 3, тобто з ребром x несуттєвим відносно неорієнтовного роду графу G при операції видалення. Це суперечить умові, що G – граф-обструкція неорієнтованого роду 3. Припущення неправильне. Достатність доведена. Доведення твердження 1 закінчено.

Наслідок 1. Існує мінімальне вкладення f' графу-обструкції G для поверхні Клейна як продовження мінімального вкладення підграфу Θ графу-обструкції G гомеоморфного графу-обструкції для проєктивної площини.

Доведення. Нехай мають місце позначення вище позначення і задане мінімальне вкладення $f_0, f_0: \Theta \rightarrow N_2$. Продовжимо його до вкладення $f, f: G \setminus u \rightarrow N_2$, в якому вершини a, b належить границям різних 2-кліток чи псевдокліток s_1, s_2 з множини $N_2 \setminus f(G \setminus u)$ та мають число досяжності $t_{G \setminus u}(\{a,b\}, N_2)$, де $t_{G \setminus u}(\{a,b\}, N_2) = 2, L \subseteq G^1 \cap (\partial s_1 \cap \partial s_2)$. Тепер продовжимо вкладення f до f' , де $f': G \rightarrow N_3$, шляхом розміщення ребра u на ленту Мебіуса, яку приклеєно до зовнішньої грані циклу $z, z = G^1 \cap (\partial s_1 \cup \partial s_2) \setminus L$ на поверхні Клейна. Таким вкладенням f' множина ребер графу-обструкції для поверхні Клейна покриватиметься трьома квазізірками з центрами гомеоморфними K_4 .

Наслідок 2. Для 2-зв'язного графу-обструкції G неорієнтованого роду 3 та площинного графу H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 4$;
2. $(d_{H_2}(M) = 3)$ та $(t_{H_2}(M, \Sigma_0) = 2)$ або $(d_{H_2}(M) = 2)$ та $(t_{H_2}(M, \Sigma_0) = 3)$, або $(d_{H_2}(M) = 1)$ та $(t_{H_2}(M, \Sigma_0) = 4)$.

Доведення. Нехай для 2-зв'язного графу G виконуються умови твердження 1. Оскільки $\gamma(G) = 3$, то графу G має підграф H гомеоморфний одному з графів Куратовського, який у свою чергу містить підграф чи частину H_1 гомеоморфну K_4 чи $K_{2,3}$. Розглянемо в H просту зірку $St_G(v)$, де $v \in G^0 \setminus H_1^0$, приєднану висячими ребрами до кожної з вершин графу K_4 чи вершинами

степені 2 графу $K_{2,3}$, та шляхом 1-розбиття всіх висячих ребер зірки $St_G(v)$. Тим самим перетворимо граф G на G' . Виділимо таким чином квазізірку $St_G(H_1)$ з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та частинами ребер $\{(a_i, v)\}_{i=1}^m$ простої зірки $St_G(v)$ як висячими ребрами квазізірки. Тоді граф H_2 , де $H_2 = G' \setminus St_G(H_1)$, матиме неорієнтований рід $\gamma(H_2)$ не більше 2 та міститиме частини висячих ребер з кінцевими вершинами, можливо ототожнених у вершину v . За умови не виродженості графу H_1 (вироджений граф H_1 із k вершинами центр квазізірки $St_G(H_1)$, яка є об'єднанням k простих зірок) можливі наступні варіанти:

1. $\gamma(H_2) = 0$; 2. $\gamma(H_2) = 1$; 3. $\gamma(H_2) = 2$.

Розглянемо варіант 1. Позначимо M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок площинного графу H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, \Sigma_0) = t$, до яких приєднуються кінцевими вершинами висячі ребра

квазізірки $St_G(H_1)$, граф G φ -образ $\varphi: (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Доведемо наступні співвідношення 1 та 2:

1. $2 \leq t \leq 4$;
2. $((d_{H_2}(M) = 3) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0) = 2)) \vee ((d_{H_2}(M) = 2) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0) = 3)) \vee ((d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, \Sigma_0) = 4))$.

Доведення співвідношення 1. Дійсно, якщо припустити, що має місце нерівність $t < 2$, то тоді множина M буде досяжною на евклідовій площині. В такому разі граф G' , як результат склейки H_2 та $St_G(H_1)$ по парам $(a_i, b_i)_{i=1}^m$ точок 1-підрозділених висячих ребер, матиме рід $\gamma(G') = 1$. Матимемо рівність $\gamma(G') = \gamma(G) = 1$, яка суперечить умові, що граф це граф-обструкція для поверхні Клейна. Припущення неправильне, нерівність $t \geq 2$ має місце. На рис. 1 показано приклад для $t = 4$.

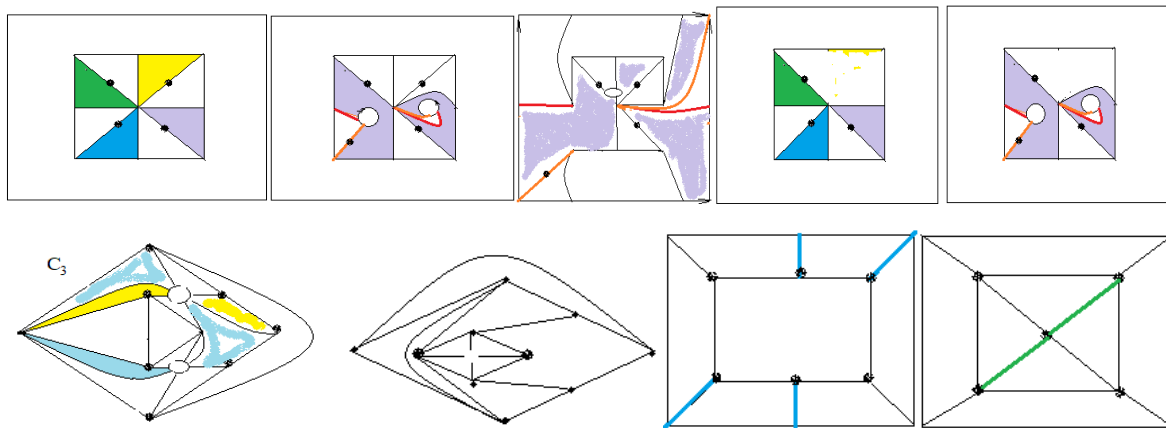


РИС. 1. На перших 3-х картах приєднання 2-ручки та ленти Мебіуса до евклідової площини призведе до вкладення графу H у поверхню Клейна з множиною M з чотирьох наведених вершин із числом досяжності 4 і тета характеристикою $\theta_H(M, \Sigma_0)$, $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$. На 4-й та 5-й картах приєднання 2-ручки до евклідової площини з множиною з трьох заданих (наведених жирно) вершин із числом досяжності 3 і тета характеристикою 1. На 6-й і 7-й картах показано твердження 5, на 8-й та 9-й приклади до твердження 6 леми 1

Доведемо нерівність $t \leq 4$ методом від протилежного. Припустимо, що $t > 4$. Тоді для досяжності множини M має бути вкладення f графу H_2 в N , де поверхня N утворена з евклідової площини Σ_0 шляхом приклеювання до неї двох лент Мебіуса, яке розміщує множину M на границях кліток s_i , щонайменше п'ять з яких мають спільну точку, тобто $\theta_{H_2}(M, \Sigma_0) \geq 2$. На рис. 1 на 2-й та 3-й картах наведено приклад перетворення трьох 2-кліток на одну клітку s_0 шляхом розміщення границь трьох 2-кліток, щонайменше, з однією спільною точкою, на 2-ручку приклеєну до Σ_0 . Довизначимо вкладення квазізірки $St_G(H_1)$ в $\overline{s_0} \setminus \partial s_0$ – в середину побудованої 2-клітки із приклеєною лентою Мебіуса, тоді отримаємо продовження f вкладення графу G в неорієнтовану поверхню N , де $\gamma(N) \geq 4$, яка є, принаймні, тором з двома приклеєними лентами Мебіуса. Оскільки графи G' , G гомеоморфні, то матимемо нерівність $\gamma(G) > 3$, яка суперечить умові, що граф G є граф-обструкцією для поверхні Клейна. Припущення, що $t > 4$ неправильне. Доведення співвідношення 1 закінчено.

Доведення співвідношення 2. Граф H_2 містить квазізірку гомеоморфну графу Куратовського. Якщо множина M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, точок графу H_2 , є критичною відносно кліткової довжини $d_{H_2}(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i , то має місце нерівність $d_{H_2}(M \setminus a_i) < d_{H_2}(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u = (ab)$ в точку a' (якщо $\{a, b\} \subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$), якщо має місце нерівність $d_{G_u}(M') < d_G(M)$. Згідно визначення 5 граф G є мінімальним відносно $d_G(M)$ при операції видалення або стискання в точку довільного ребра u , тобто, або $d_{G \setminus u}(M) + 1 = d_G(M)$, або $d_{G_u}(M') < d_G(M)$, де G_u – граф зі стиснутим у точку a' ребром $u = (a, b)$ та $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$. З умови $\gamma(G) = 3$ впливатиме, що довжина d найкоротших 2-кліткових ланцюгів, які з'єднують t кліток, $t_{H_2}(M, \Sigma_0) = t$, має задовольняти умові: якщо $t = 2$, то $d = 3$, інакше, якщо $t = 3$, то $d = 2$, інакше, якщо $t = 4$, то $d = 1$. Ці випадки показано на рис. 1, 2. Доведення наслідку 2 закінчено.

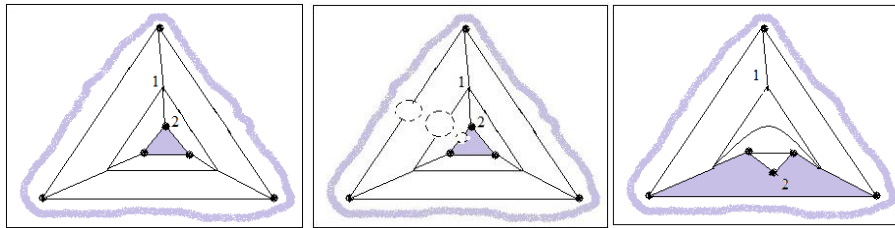


РИС. 2. При видаленні ребра (1, 2) графу, наведеного на 1-й карті, не змінилося число досяжності 2 множини з 6-х вершин (наведені точки), а мінімальна відстань цієї множини зменшилася з 3 до 1

Наслідок 3. Для 2-зв'язного графу-обструкції G неорієнтованого роду 3 та проективно-площинного графу H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 3$;
2. $((d_{H_2}(M) = 2) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)) \vee ((d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 3))$.

Доведення. Вважатимемо, що граф H_2 має неорієнтований рід 1, тобто містить підграф гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, кожен з яких можливо подати як квазізірку з центром K_4 чи $K_{2,3}$, відповідно.

Позначимо M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок проєктивного графу H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, N_1) = t$, де кожна точка a_i ототожнюється з кінцевими вершинами g_i висячих ребер квазізірки $St_G(H_1)$, а граф G отримано наступним φ -перетворенням:

$\varphi: (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Мають місце наступні співвідношення:

1. $2 \leq t \leq 3$; 2. $((d_{H_2}(M) = 2) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)) \vee ((d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 3))$.

Доведення цих співвідношень аналогічне доведенню для наслідку 2.

Наслідок 4. Для 2-зв'язного графу-обструкції G неорієнтованого роду 3 та непроєктивно-площинного графу H_2 мають місце наступні співвідношення:

1. $(t = 2) \wedge (d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)$.

2. Якщо $t = 1$ і задано досягну на поверхні Клейна множину M точок графу H_2 , то квазізірка $St_G(K_4)$ матиме, як мінімум, дві точки та, як максимум, $|M|$ точок приєднання висячих вершин до H_2 , з яких, принаймні, $|M| - 4$ точок мають бути суттєвими відносно роду при операції видалення цих точок.

Доведення наслідку 4. Доведемо співвідношення 1. Вважатимемо, що граф H_2 має неорієнтований рід 2, тобто містить підграф гомеоморфний одному з 104-х графів-обструкцій проєктивної площини [5]. Позначимо M , $M = \{a_i\}_{i=1}^m$, множину точок непроєктивного графу H_2 з числом досяжності t , де $t_{H_2}(M, N_2) = t$, де кожна точка a_i ототожнюється з кінцевою вершиною g_i висячих ребер квазізірки $St_G(H_1)$. Нехай граф G отримано наступним φ -перетворенням:

$\varphi: (H_2 + St_m(H_1), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$, де $m \geq 1$. Довести рівняння $t = 2$ та відношення

$(d_{H_2}(M) = 1) \wedge (t_{H_2}(M, N_1) = 2)$ можливо по аналогії доведення наслідку 2.

Доведемо співвідношення 2. За нашими позначеннями матимемо, що $H_1 = K_4$. Як у проєктивну площину, вкладемо квазізірку $St_m(K_4)$ із m променями, із схрещеними на площині несуміжними ребрами K_4 , тобто розмістимо її у середину 2-клітки s із приклеєною лентою Мебіуса, де $s \in N_2 \setminus f(H_2)$, на ∂s якої розміщена досяжна множина M складена з точок приєднання. Якщо припустити, що одна з вершин K_4 не інцидентна ребру-променю, то тоді можливо звільнити ленту Мебіуса від одного з схрещених ребер. Тим самим отримати суперечність умові щодо графу G роду 3. Якщо несуміжних один з одним ребер-променів більше 4, то тоді їхні кінцеві точки ототожнюються попарно з точками, які мають бути суттєвими відносно роду при операції видалення. Інакше матимемо ці всі $|M| - 4$ ребер несуттєвими відносно роду при операції видалення ребра графу G , що суперечить визначенню графу-обструкції роду 3. Доведення закінчено.

Моделі графів-обструкції показано на рис. 3, де на 1-й та 2-й карті графи з кількома ребрами, які як несуттєві можливо стягнути в точку для поверхні неорієнтованого роду 3; на 3-й, 4-й, 5-й картах графу роду 2, утворені шляхом додавання ребра замість спільної вершини у пари графів гомеоморфних K_4 у однойменних (без штриха) мінорів роду 2. На рис. 4 на 1-й та 2-й карті наведені графи з кількома ребрами, які як несуттєві можливо стягнути в точку для поверхні неорієнтованого роду 3;

на 3-й, 4-й, 5-й картах графи роду 2, утворені шляхом додавання ребра замість спільної вершини у пари графів гомеоморфних K_4 у однойменних (без штриха) мінорів роду 2.

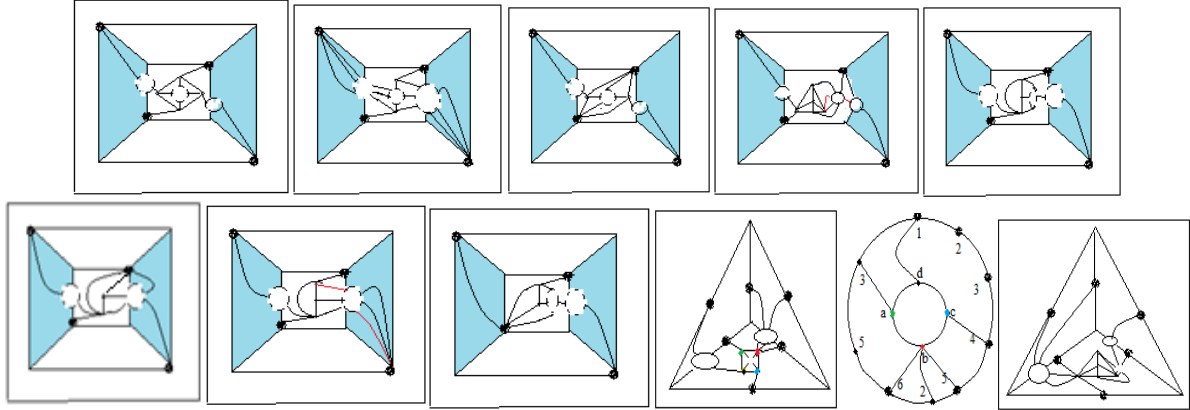


РИС. 3. Моделі графів-обструкцій для поверхні Клейна

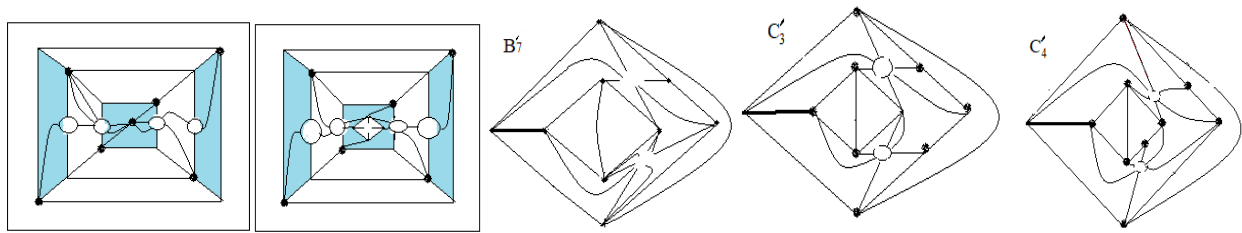


РИС. 4. Моделі графів-обструкції для неорієнтованих поверхонь роду 4 чи 3, відповідно

Твердження 2. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ має реберне покриття множиною з n квазізірок $St_G(H_i)$, де кожна пара $(St_G(H_j), St_G(H_j))$ з яких породжує підграфи H_{ij} гомеоморфні мінорам неорієнтованого роду 2, де $H_i, H_j, i \neq j, 1 \leq i < j \leq n-1, n \geq 2$, гомеоморфні площинному графу із заданою множиною точок з числом досяжності 2 та задане наступне φ -перетворення:

$$\varphi: (H_{12} + St_m(H_n), \sum_{i=3}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m),$$

де квазізірка $St_m(H_3)$ з центром H_3 та ребрами-про-

менями з досяжною на проєктивній площині множиною $\{g_i\}_{i=1}^m$ кінцевих вершин висячих ребер $\{(b_l, g_i)\}_{i=1}^m\}_{l=1}^{m'}$, $m \geq 2$, а на евклідовій площині має число досяжності 2, та попарно ототожнюється з точками множини $\{a_i\}_{i=1}^m$ графу H_{12} , яка є досяжною на поверхні Клейна. Якщо граф G має k перетинів у внутрішніх точках висячих ребер з множини $\{(b_l, a_i^*)\}_{l=1}^{m'}\}_{i=1}^m$, то мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $n = 3$ та для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \emptyset$, то $3 \leq \gamma(G) \leq k + 3$.
2. Якщо $n = 3$ та для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \{v\}$, то $4 \leq \gamma(G) \leq k + 3$.
3. Якщо $n = 2$ та для пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i^1 \cap H_j^1 = \{(u, v)\}$, де (u, v) – спільна частина двох ребер чи ребро, то $\gamma(G) = 2$, а коли це спільне ребро, то $\gamma(G) = 3$.

4. Якщо дві пари з трьох квазізірок з центрами гомеоморфними K_4 мають спільні частини двох пар простих ланцюгів, то $\gamma(G) \leq 4$.

5. Граф G , побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4, може мати несуттєві ребра відносно роду при операції видалення чи стискання в точку ребра.

Доведення. Нехай граф G задовольняє умові твердження 2, тоді згідно [4] матимемо $\gamma(G) \geq 2$. Зауважимо, що приєднання до зв'язного графу H_{12} висячих вершин ребер-променів квазізірки $St_G(H_3)$, де H_3 гомеоморфний K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$ чи $\overline{K_r}$, $r \geq 2$, до точок досяжної на поверхні Клейна підмножини точок підграфу H_{12} є гомеоморфним $K_{3,3}$ чи K_5 .

Доведемо співвідношення 1. Розглянемо множину всіх різних мінімальних вкладень графу H_{12} у поверхню Клейна та для кожного побудуємо множину з різних підмножин точок досяжних на поверхні Клейна. Виберемо одне з таких вкладень та приклеїмо ленту Мебіуса до однієї з тих кліток s , на границі якої розташовано досяжну підмножину точок, та вкладемо на ленту центр H_3 квазізірки $St_G(H_3)$, щоб отримати на отриманій псевдоклітці s' проєктивної площини досяжну множину вершин графу H_3 . Вкладемо в середину цієї псевдоклітки s' висячі ребра квазізірки та ототожнимо пари точок приєднання ребер до підграфу H_{12} . Використаємо такий порядок слідування копій точок на границі $\partial s'$ з числа пар точок приєднання, коли є k перетинів у внутрішніх точках висячих ребер з множини $\{(b_l, a_{i_i}^*)\}_{l=1}^m\}_{i=1}^{m'}$, які можливо розташувати на приклеєних k лентях до поверхні Клейна без перетину у внутрішній точці. Тоді для неорієнтованого роду $\gamma(G)$ матимемо нерівність $3 \leq \gamma(G) \leq k + 3$. Коли перетину у внутрішніх точках висячих ребер $\{(b_l, a_{i_i}^*)\}_{l=1}^m\}_{i=1}^{m'}$ немає, то $\gamma(G) = 3$. Найнижче значення роду досягнуте для графів на 3-й, 4-й, 5-й картах рис. 5. Доведення співвідношення 1 закінчено.

Доведення співвідношення 2 аналогічне наведеному для співвідношення 1 тільки одне з ребер-променів, яке з'єднує центри двох зірок є несуттєвим відносно роду та підлягатиме стисканню у точку. Центрами квазізірок мають бути графи з суттєвими ребрами при операціях стискання у точку чи видалення ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини, наприклад, K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$ чи $\overline{K_r}$, $r \geq 2$.

Доведення співвідношень 3, 4 аналогічне наведеному для співвідношення 1.

Доведемо співвідношення 5. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4. Маємо два наступні випадки. 1. Якщо ребро суттєве відносно роду графу G при операції видалення, то воно належатиме до числа ребер графу K_4 чи $K_{3,3}$ та мінімальним вкладенням графу у поверхню Клейна має розташовуватися на ленті Мебіуса. Дійсно, якщо видалити довільне висяче ребро квазізірки $St_G(H_3)$, то тим самим зменшуємо число досяжності множини точок приєднання цієї $St_G(H_3)$ до інших. Тоді матимемо, що рід графу G має зменшитися на 1, що суперечить умові щодо роду.

2. Якщо ребро суттєве відносно роду графу G при операції стискання, то воно не належатиме до центру квазізірки. Нехай суттєве ребро e , $e = (a, b)$, належить до числа висячих ребер, яке належить квазізірці. Тоді жодна пара ребер суміжних даному ребру e , що належать до центрів різних квазізірок не вклатиметься на різних лентях Мебіуса. Дійсно, якщо стиснути ребро e в точку ab ,

то пари суміжних ребер зі спільною вершиною ab утворюватимуть кут з цих ребер, який може розташовуватися на одній ленті. Тим самим отримуємо суперечність умові щодо роду графу G . Припущення неправильне. Доведення співвідношення 5 закінчено.

На рис. 5–8 показано приклади графів G , які задовольняють граничним значенням – вказаним у співвідношеннях 1, 2, 4, 5 співвідношенням для випадку наявності підграфів графу G , породжених парами $St_G(H_i), St_G(H_j)$ однакових мінорів проективної площини, склеєних шляхом отождоження пар точок з заданою парою множин точок приєднання.

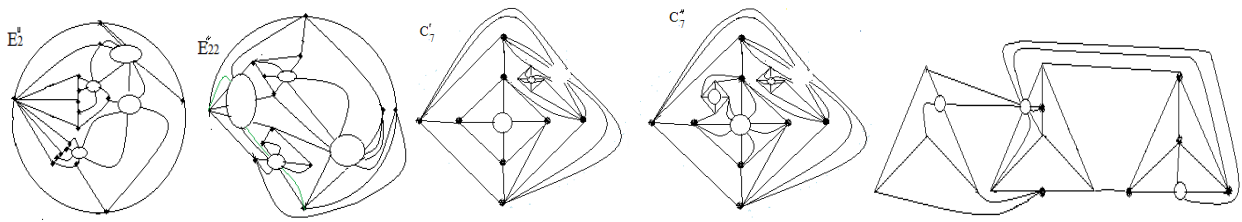


РИС. 5. Графи E_2'', E_{22}'', C_7'' роду не більше 4 утворені як ϕ -образи пари графів із E_2, E_{22}, C_7 – графів-обструкцій роду 2 та двох чи однієї квазізірки із центром K_4 , відповідно, та променями – ребрами, що приєднані так само, як висячі ребра такої ж квазізірки – підграфу, в графах E_2, E_{22}, C_7 , відповідно. П'ятий та третій графи є графами-обструкціями роду 3, де C_7' склеєний з C_7 та квазізірки $St_4(K_4)$

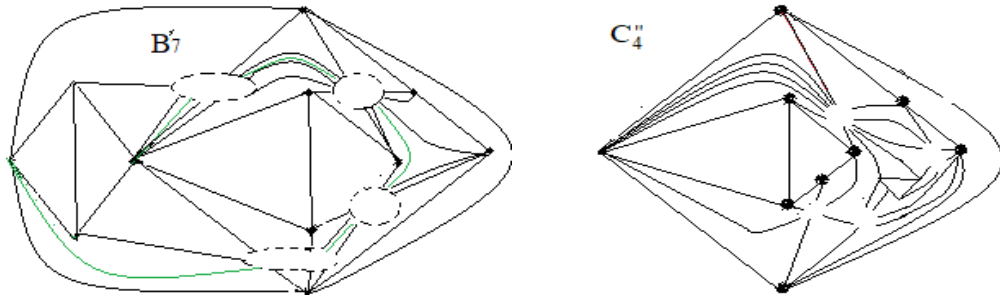


РИС. 6. Графи B_7'', C_4'' роду 4, склеєні із B_7, C_4 – графів-обструкцій роду 2 та квазізірок із центром K_4 та ребрами, що приєднані так само, як ребра такої ж квазізірки, як підграфу, в графах B_7, C_4 , відповідно

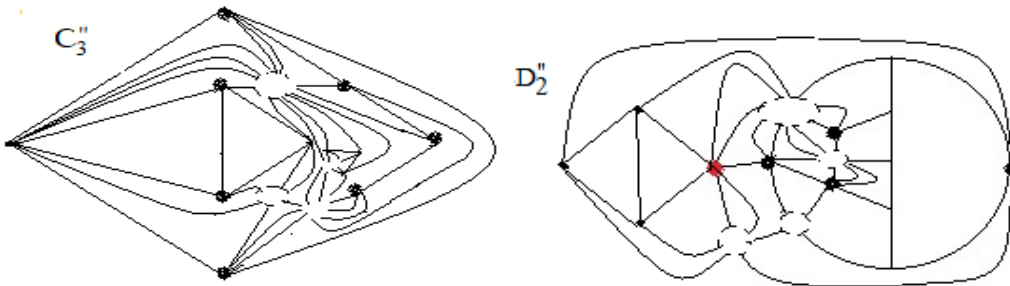


РИС. 7. Графи D_2'', C_3'' роду не більше 4, склеєні з D_2, C_3 – графів-обструкцій роду 2 та пари квазізірок із центром K_4 та ребрами, що приєднані так, як ребра такої ж квазізірки-підграфу, в графах D_2, C_3 , відповідно

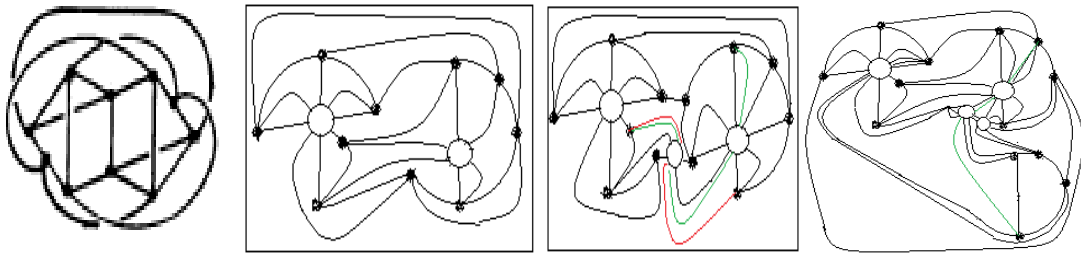


РИС. 8. До співвідношень 1 та 4 твердження 2. Граф B_{11} та його вкладення у поверхню Клейна, де B_{11} – граф-обструкція для проективної площини як об’єднання двох квазізірок з центрами графами K_4 , що мають спільне ребро. На 3-й карті наведено модифікований B_{11} без спільного ребра у центрів цих квазізірок з двома додатковими висячими ребрами вкладений мінімально у поверхню неорієнтованого роду 3. На 4-й карті показано граф для співвідношення 5 твердження 2

Твердження 3. Нехай граф G неорієнтованого роду $\gamma(G)$ має покриття із n квазізірок $St_G(H_i)$, $St_G(H_j)$, з яких одна пара $(St_G(H_1), St_G(H_2))$ породжує підграф H_{12} гомеоморфний мінору неорієнтованого роду 2, а інші квазізірки приєднуються кінцевими вершинами до множини точок M графу H_{12} , яка є досяжною на поверхні Клейна та містить точки центрів H_1 і H_2 квазізірок $St_G(H_1), St_G(H_2)$, де H_i, H_j – гомеоморфні $K_4, K_{2,3}$ чи вироджений граф на кількох вершинах, де $i \neq j, 1 \leq i < j \leq n, n \geq 2$.

Мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо $n = 3$ і для кожної пари (H_i, H_2) виконується умова $H_i \cap H_2 = \emptyset$ та $St_G(H_3)$ приєднується до, щонайменше, двох точок заданої множини точок графу H , досяжної на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$.

2. Якщо для кожної пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i \cap H_j = \{v\}$, $n = 3$, та $St_G(H_3)$ приєднується до, щонайменше, двох точок заданої множини точок графу H , досяжної на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$.

3. Якщо $n = 2$ та для пари (H_i, H_j) виконується умова $H_i^1 \cap H_j^1 = \{(u, v)\}$, де (u, v) – спільна частина двох ребер чи ребро, то $\gamma(G) = 2$, а коли це спільне ребро та $St_G(H_3)$ приєднується до, щонайменше, двох точок заданої множини точок графу H , що є досяжною на поверхні Клейна, то $\gamma(G) = 3$.

4. Якщо дві пари з трьох квазізірок з центрами гомеоморфними K_4 мають спільні частини двох пар простих ланцюгів, то $\gamma(G) \leq 4$.

5. Граф G , побудований згідно співвідношень 1, 2, 3, 4, може мати несуттєві ребра відносно роду при операції видалення чи стискання у точку ребра.

Алгоритм побудови моделей 3-зв’язних графів-обструкцій поверхні Клейна

Початок алгоритму А (вхідні: G , вихідні: D).

Вхідні дані:

- G – граф-обструкція проективної площини, n – число зв’язності вихідного графа D , $n = 3$.
- Множина $F(G) = \{f_i\}_{i=1}^{|F|}$ всіх неізоморфних вкладень графу G в S – поверхню Клейна.

3. Для кожного вкладення f_i побудовані наступні множини:

а) $R_i = \{\{a_{i'k'}\}_{k'=1}^n\}_{i'=1}^{m_i}$ мінімальна за включенням і складена із підмножин неізоморфних (при автотоморфних відображеннях графу G) точок $\{a_{ik'}\}_{k'=1}^n$ заданої потужності множин R_i , розташованих на границях кожної із наступних кліток s_j, s'_j, s''_j , де $s'_j \in S \setminus f'(G_u)$, $s''_j \in S \setminus f''(G \setminus u)$, та мінімальна при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра u графу G , де f', f'' – мінімальні вкладення графів $G_u, G \setminus u$ в неорієнтовані поверхні S', S'' меншого роду ніж S , відповідно;

б) $M = M(f_i, R_i) = \{s_j\}_{j=1}^{|M|}$ складена з кліток s_j , де $s_j \in S \setminus f_i(G)$, які містять на своїх границях всю множину вершин графу.

4. Множина квазізірок з центром K , де $K \in \{K_4, K_{2,3}\}$ та, щонайменше, із чотирма (для K_4) чи трьома (для $K_{2,3}$) висячими ребрами, яких може бути не більше $|G^0|$.

5. Множини $st(K_4) = \{g_k\}_{k=1}^{|e(K_4)|}$, $st(K_{2,3}) = \{h_k\}_{k=1}^{|e(K_{2,3})|}$ всіх вкладень квазізірок з центрами $K_4, K_{2,3}$, відповідно, в клітку s , як у локальну проєктивну площину з розташуванням на ленті Мебіуса ребер центру та висячих ребер квазізірки.

6. Функція *Function* Π (вхід: R, n ; вихід: R^n, NG), яка видає при кожному звертанні елемент з множини R^n – множини всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ за час пропорційний $n!$ та множину NG – всіх розбиттів множини висячих вершин $g_1, g_2, g_3, \dots, g_m$ квазізірки на n непустих підмножин G_1, G_2, \dots, G_n , кожен з елементів підмножини G_i ототожнюється в одну точку ng_i , яка парно ототожнюється з a_i , число розбиттів, які видаватиме функція за час пропорційний NN , де $NN = (m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)))$, де $m > n$.

Вихідні дані:

Граф D – модель n -зв'язного графа-обструкції для поверхні Клейна.

Ввести G, n ;

Для i від 1 до $|F(G)|$ кроком 1 виконати: // початок циклу з параметром i

початок дій;

$f := f_i$;

$R := R_i$;

Для j від 1 до $|M|$ кроком 1 виконати:

початок дій;

$s := s_j + h$; // приклеїмо до площинного диску s ленту Мебіуса h ;

$R := \partial s \cap R$; // до n точок a_i границі клітки s приклеюватимемо g_j висячі вершин зірки;

Якщо $|\partial s \cap R| < n$, то перехід на кінець циклу з параметром j ;

Вкладемо K в $\bar{s} \setminus \partial s$; // центр квазізірки зірки вкладаємо в середину клітки s так,
// щоб одне з ребер лежало на ленті Мебіуса h ;

Function Π (вхід: R, n ; вихід: R^n); // при кожному звертанні на виході нова перестановка

// з множини R^n – всіх перестановок вершин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$,
 // з якими ототожнюється множина висячих вершин $ng_1, ng_2, ng_3, \dots, ng_n$.
 // матимемо ототожнені вершини $a_1ng_i, a_2ng_2, \dots, a_nng_n$.

Для k від 1 до n кроком 1 виконати:

початок дій;

$g := a_kng_k$; // маємо вершину приєднання з тими ж ребрами графа G та
 // висячими ребрами квазізірки з центром K

$$D^0 = G^0 \setminus \{a_k\} \cup K^0 \setminus \{g_k\} \cup \{a_kng_k\};$$

$$D^1 := G^1 \cup K^1 \cup (St^1(K) \setminus K^1);$$

кінець дій циклу з параметром k ;

Виводимо (“Граф $D =$ ”, (D^0, D^1));

кінець дій циклу з параметром j ;

кінець дій циклу з параметром i ;

Кінець алгоритму А.

Твердження 4. Мають місце наступні співвідношення для алгоритму А:

а) Алгоритм А коректний та має часову складність $O(b|G^0| \text{time}(\text{Function } \Pi(R, n)))$, де $b = b(G)$ добуток числа неізоморфних мінімальних вкладень заданого графа G неорієнтованого роду γ та найбільшого числа $2 - \gamma - |G^0| + |G^1|$ кліток в них, яке для невеликого роду пропорційне $|G^0|^2 / 2$.

б) Функція $(\text{Function } \Pi(R, n))$ для $n=3$ має часову складність пропорційну $O(|G^0|^n)$, де $|G| \leq 12$.

в) Вихідний граф D може мати серед образів висячих ребер квазізірки несуттєві ребра відносно роду при операції стискання ребра в точку. Виконавши стискання в точку всіх таких ребер графу D отримаємо мінор поверхні Клейна.

Висновок. Отримано математичне забезпечення для алгоритмів побудови моделей мінорів заданої зв’язності для поверхні Клейна.

Авторські внески. Петренюк В.І. – дослідження, концептуалізація, методологія, оригінальна чернетка. Петренюк Д.А. – узагальнення, формальний аналіз, ресурси, написання – рецензування.

Список літератури

1. Хоменко М.П. ϕ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Київ. 1973. 383 с.
2. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Київ. 1970. 299 с.
3. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
4. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
5. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory*, Series B. 1989. **46**. P. 173–231. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(89\)90043-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90043-9)
6. Петренюк В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. <https://doi.org/10.15407/fmmit2021.33.105>
7. Flötotto A. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld. 2010. 174 p.
8. Skoda P. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Fraser University, PhD dissertation. 2012. 133 p.

9. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Оришака О.В. Структура проективно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022. № 2. С. 1–20. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2>
10. Петренюк В.І., Петренюк Д.А. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. № 37. С. 72–74. <https://doi.org/10.15407/fmmit2023.37.072>
11. Van Dam E.R., Koolen J.H., Tanaka H. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15. 2016. <https://doi.org/10.37236/4925>

Одержано 22.02.2024

Петренюк Володимир Ілліч,

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Центральноукраїнського національного технічного університету, Кропивницький,
<https://orcid.org/0000-0001-7313-9642>
petrenjukvi@i.ua

Петренюк Дмитро Анатолійович,

кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
dmytrotheukrainian@ukr.net

УДК 519.85

В.І. Петренюк^{1*}, Д.А. Петренюк²

Моделі графів-обструкцій поверхні Клейна

¹Центральноукраїнський національний технічний університет, Кропивницький

²Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ

* Листування: petrenjukvi@i.u

Розглянуто задачу дослідження структури графів заданої зв'язності, які є обструкціями для заданої поверхні неорієнтованого роду та побудови їхніх моделей, з яких шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер, утворюються графи-обструкції. Розглянуто питання про реберне покриття графе-обструкції заданого роду мінімальним числом квазізірок з центрами – площинними графами, які мають задані множини точок і всі ребра є суттєвими відносно числа досяжності 2 на евклідовій площині та має досяжність на проективній площині чи поверхні Клейна, наприклад, K_4 , $K_{2,3}$ чи вироджений граф. Задача дослідження структури графів неорієнтованого роду розглядалася [4–6]. В роботі [7] методом релятивних компонент була стиснута множина мінорів для проективної площини до 12-ти базисних мінорів та побудовано множину з 62-х мінорів поверхні Клейна. Для цього розглядали всі неізоморфні мінімальні вкладення кожного з базисних мінорів та знаходили множину всіх різні пари вершин, які є досяжними на проективній площині при операціях видалення чи стискання в точку довільного ребра графа, потім до обраної пари точок приєднували пару несуміжних вершин графу $K_5 \setminus e$. В роботі [8] обчислена кількість 2-зв'язних графів-обструкцій для поверхні Клейна, частина діаграм цих графів наведена в [10]. Зазначимо, що наведене далі визначення кліткової відстані має аналогічне в [11].

Наш підхід, як продовження [9], полягатиме в знаходженні реберного покриття графу-обструкції G заданого роду мінімальним числом підграфів покриття з числа квазізірок з центрами – графами з суттєвими ребрами відносно числа досяжності чи неорієнтованого роду при операціях стискання в точку чи видалення ребра відносно заданої множини точок з числом досяжності 2 відносно евклідової площини та досяжними на проективній площині чи поверхні Клейна, наприклад, це підмножини множини точок графів K_4 , $K_{2,3}$, $K_5 \setminus e$, K_r , $r \geq 2$, чи граф-обструкцій проективної площини. Також знайдено необхідні умови для побудови графів-обструкцій для поверхні Клейна шляхом ототожнення пар точок центрів та тисяч вершин трьох квазізірок, тим самим маємо основу алгоритма побудови більшого числа графів-обструкцій для поверхні Клейна. Гіпотетично граф-обструкція заданого неорієнтованого роду n , $n \geq 2$, має вигляд циліндричної поверхні з n дисками-основами та бічною частиною, які можуть мати спільні множини точок на границях та на яких вкладені, принаймні частиною, графи-центри квазізірок, що мають задану множину точок досяжності 2 на евклідовій площині, а на бічній поверхні розміщуються висячі ребра, що

перетинаються на площині та вкладаються без перетину за допомогою приклеєних до бічної поверхні лент Мебіуса. При цьому ребра матимуть, принаймні, два варіанти вкладення в бічну частину циліндричної поверхні, але не більше кількості приклеєних лент Мебіуса, завдяки цьому кожне висяче ребро вклатиметься на ленті Мебіуса, або тільки з одним ребром, або з двома суміжними ребрами. Знайдено необхідні умови побудови моделей графів-обструкцій для поверхні Клейна шляхом ототожнення пар точок центрів та висячих вершин трьох квазізірок, тим самим маємо основу алгоритма побудови більшого числа графів-обструкцій для поверхні Клейна.

Основний результат: твердження 1, 2, 3 та алгоритм побудови моделей 3-зв'язних графів-обструкцій поверхні Клейна.

Ключові слова: ϕ -перетворення графів, неорієнтована поверхня, моделі графів-обструкцій неорієнтованого роду.

UDC 519.85

Volodymyr Petrenjuk^{1*}, Dmytro Petreniuk²

Models of Klein Surface Obstruction Graphs

¹ Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi

² V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv

* Correspondence: petrenjukvi@i.u

The task of researching the structure of graphs of given connectivity, which are obstructions for a given surface of non-oriented kind, and building their models, from which obstruction graphs are formed by removing or compressing a set of edges, is considered. The issue of edge coverage of an obstruction graph of a given kind with a minimum number of quasi-stars with centers – planar graphs that have given sets of points and all edges are significant with respect to the reachability number 2 on the Euclidean plane and has reachability on the projective plane or Klein surface, is considered. K_4 , $K_{2,3}$ or a degenerate graph. The task of researching the structure of graphs of undirected kind was considered [4–6]. In [7], the set of minors for the projective plane was compressed to 12 basic minors using the method of relative components, and a set of 62 minors of the Klein surface was constructed. To do this, we considered all non-isomorphic minimal embeddings of each of the basic minors and found the set of all different pairs of vertices that are reachable on the projective plane during the operations of removing or compressing an arbitrary edge of this graph to a point, then a pair of non-adjacent graph vertices was attached to the selected pair of points. In [8], the number of 2-connected obstruction graphs for the Klein surface was calculated, part of the diagrams of these graphs is given in [10]. Note that the following definition of the cell distance is similar to that in [11]. Our approach, as a continuation of [9], will consist in finding the edge covering of an obstruction graph of a given kind by the minimum number of subgraphs of the covering from the number of quasi-stars with centers - graphs with essential edges relative to the number of reachability or nonorientable genus during compression to a point or removal operations edges relative to a given set of points with reachability number 2 relative to the Euclidean plane and reachable on projective planes or Klein surfaces, for example, these are subsets of the set of points of graphs K_4 , $K_{2,3}$, K_5^e , K_r , $r \geq 2$, or graph-obstructions of the projective plane. We also found the necessary conditions for constructing obstruction graphs for the Klein surface by identifying pairs of center points and hanging vertices of three quasi-stars, thus we have the basis of an algorithm for constructing a larger number of obstruction graphs for the Klein surface. Hypothetically, a graph-obstruction of a given nonorientable genus has the form of a cylindrical surface with n , $n \geq 2$, disks-bases and a side part, which can have common sets of points on the boundaries and on which are embedded, at least in part, the graph-centers of quasi-stars having a given set of reachability points 2 on the Euclidean plane, and on the side surface there are hanging edges that intersect on the plane and are inserted without crossing with the help of Möbius strips glued to the side surface. At the same time, the edges will have at least two nesting options in the side part of the cylindrical surface, but no more than the number of glued Möbius strips, thanks to which each hanging edge will nest on the Möbius strip, either with only one edge or with two adjacent edges. We have found the necessary conditions for constructing models of obstruction graphs for the Klein surface by identifying pairs of centers and hanging vertices of three quasi-stars, thus we have the basis of an algorithm for constructing a larger number of obstruction graphs for the Klein surface.

The main result: statements 1, 2, 3 and the algorithm for constructing models of 3-connected graph-obstructions of the Klein surface.

Keywords: ϕ -transformation of graphs, nonorientable surface, prototypes of graph-obstruction.