КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 518.9
DOI:10.34229/2707-451X.24.2.1

Г.Ц. ЧИКРІЙ

ЛІНІЙНА ДИСКРЕТНА ГРА З КВАДРАТИЧНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ

Робота присвячена аналізу лінійної дискретної гри зближення з термінальною множиною у вигляді лінійного підпростору, що відповідає пійманню втікача переслідувачем. Розглядається випадок квадратичних обмежень на керування гравців, які вони можуть використати на протязі всієї гри. Дослідження проводиться в рамках першого прямого методу Л.С. Понтрягіна. В основу розробки покладений принцип розтягування часу, запропонований його дискретний варіант. Вводиться аналог неперервної функції розтягування часу, а саме так звана ціло-чисельна функція розтягування часу. Ця функція використовується при формулюванні достатніх умов завершення гри за скінченний час.

***Ключові слова**: лінійна дискретна гра зближення, квадратичні обмеження, переслідувач, втікач, ціло-чисельна функція розтягування часу, допустиме керування.*

Вступ. В теорії диференціальних ігор (конфліктно-керованих процесів), як правило, розглядають випадок геометричних обмежень на керування гравців. Це стосується прямих методів Л.С. Понтрягіна [1], правила екстремального прицілювання М.М. Красовського [2], методу розв'язуючих функцій [3] та інших ідеологій. Перший прямий метод Л.С. Понтрягіна у випадку інтегральних обмежень на керування був розвинутий в роботах М.С. Нікольского [4]. Пізніше в рамках зазначеного методу в роботах [5, 6] для вирішення задачі зближення у випадку геометричних обмежень був використаний прийом Д. Зонневенда, пов'язаний з розтягуванням часу [7, 8]. В роботі [9] метод розв'язуючих функцій був перенесений на випадок інтегральних обмежень на керування. Правило екстремального прицілювання М.М. Красовського знайшло своє втілення у випадку інтегральних обмежень у роботі [10].

Слід зазначити, що випадок інтегральних обмежень вимагає застосування відповідної математичної техніки і не є тривіальним. Все це стосується неперервного часу у грі. Якщо ж у грі час є дискретним, то більшість математичних проблем (існування розв'язку системи диференціальних рівнянь, неперервна залежність керування від фазового вектора) відпадає. Проте у випадку дискретного часу в ігрових конструкціях є свої особливості, які потребують корекції вихідних даних для ефективної реалізації методик та досягнення відповідних цілей у грі.

В даній роботі на основі першого прямого методу Л.С. Понтрягіна розглядається лінійна дискретна гра з квадратичними обмеженнями на керування. При цьому використовується принцип розтягування часу [8], а саме його дискретний варіант. Вводиться аналог неперервної функції розтягування часу – ціло-чисельна функція розтягування часу. Її використання дало можливість отримати достатні умови виведення переслідувачем траєкторії дискретного конфліктно-керованого процесу при довільному допустимому керуванні втікача на задану термінальну множину. Ця множина вважається лінійним підпростором, що відповідає пійманню переслідувачем втікача.

Раніше в роботі [11] ціло-чисельна функція розтягування часу застосовувалась для розв’язання задачі зближення у лінійних диференціальних іграх з імпульсними керуваннями.

Використання функції розтягування часу в задачі з квадратичними обмеженнями на керування. Нехай динаміка гри описується наступною системою рівнянь:

$$x(k+1) = Ax(k) - Bu(k) + Cv(k), \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

$x(k)$ це стан гри, $u(k)$ та $v(k)$ – вектори керувань супротивників (переслідувача та втікача) на k-му кроці, $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^p$, $v(k) \in R^q$, $k = 0,1,2,\ldots$, матриці A, B і C мають відповідно розмір $n \times n$, $p \times n$ та $q \times n$.

При цьому вектори керувань повинні задовольняти наступним обмеженням:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| u(k) \right\|^2 \le \rho^2, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| v(k) \right\|^2 \le \sigma^2. \tag{3}$$

Крім того, задана термінальна множина M, яка є лінійним підпростором в R^n.

Нехай $x_0 \notin M$. Будемо вважати, що гру можна завершити за k кроків, починаючи з стану x_0, якщо існують керування $u(0)$, $u(1), \ldots, u(k-1)$, такі що $x(k) \in M$.

Позначимо π оператор ортогонального проектування з R^n на ортогональне доповнення до M в R^n. Тоді завершення гри означає, що $\pi x(k) = 0$.

Неважко перевірити, що

$$x(k) = A^k x_0 - \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Cv(i).$$

Означення. Функцію $I(k)$. $k = 0,1,2,\ldots$, що приймає цілі значення і таку, що $I(0) = 0$, $I(k) \ge k$, $I(k_1) > I(k_2)$ при $k_1 > k_2$, назвемо ціло-чисельною функцією розтягування часу.

Умова 1. $\pi A^i C = \pi A^k BF(i)$, де i – ціле число, $I(k) \le i \le I(k+1) - 1$, а $F(i)$ це лінійний оператор, що діє з R^q в R^p і має обмежену норму $\left\| F(i) \right\|$ при всіх $i = 0,1,2,\ldots$.

Розглянемо функцію

$$f(k) = \sup_{\sum_{i=0}^{I(k)} \left\| v(i) \right\|^2 \le \sigma^2} \sum_{i=0}^{I(k)} \left\| F(i) v(i) \right\|^2.$$

Функція $f(k)$ приймає скінченні значення при всіх $k = 0,1,2,\ldots$.

Нехай на перших k_0 кроках, переслідувач використовує керування

$$u^0(0), u^0(1), \ldots, u^0(k_0 - 1),$$

при цьому

$$\sum_{i=0}^{k_0-1}\left\|u^0(i)\right\|^2 \le \rho^2. \tag{4}$$

Нехай $I(k_1)=k_0+k_1$. Залишок ресурсу переслідувача позначимо через

$$\rho^* = \rho^2 - \sum_{i=0}^{k_0-1}\left\|u^0(i)\right\|^2. \tag{5}$$

Умова 2. $f(k)\le\rho^*$ для всіх $k=0,1,2,...,k_1$.

Розглянемо множину

$$W(k)=\left\{\sum_{i=0}^{k}A^iB\omega(i):\sum_{i=0}^{k}\left\|\omega(i)\right\|^2 \le \rho^* - f(k)\right\}.$$

Множина $W(k)$ – опуклий компакт.

Умова 3. При деякому цілому числі k_1 виконується включення

$$\pi A^{I(k_1)+1}x_0 - \sum_{i=0}^{k_0-1}A^{I(k_1)-i}Bu^0(i)\in W(k_1).$$

Теорема. Нехай виконані умови 1–3. Тоді, починаючи із стану x_0, гра (1)–(3) може бути завершена переслідувачем за $I(k_1)+1$ кроків.

Доведення. З умови 3 випливає, що існують p-вимірні вектори

$$\omega^*(0),\ \omega^*(1)\ \ldots,\omega^*(k_1),$$

такі що

$$\pi A^{I(k_1)+1}x_0 - \sum_{i=0}^{k_0-1}A^{I(k_1)-i}Bu^0(i) = \sum_{i=0}^{k_0}\pi A^iB\omega^*(i),\ \sum_{i=0}^{k_1}\left\|\omega^*(i)\right\|^2 \le \rho^* - f(k_1). \tag{6}$$

Нехай задано деяке допустиме керування втікача $v(i)$, $i=0,1,2,....,I(k_1)$, тобто таке, що задовольняє обмеженню (3). Керування переслідувача $u(i)$, $i=0,1,2,....,I(k_1)$, будемо будувати наступним чином.

$$\begin{gathered} u(i)=u^0(i),\ i=0,1,2,....,k_0-1,\\ u(k_0)=F(I(k_1))v(0)+\omega^*(k_1),\\ u(k_0+i)=F(I(k_1-i+1)-1)v(I(k_1)-I(k_1-i+1)+1)+...\\ +F(I(k_1-i))v(I(k_1)-I(k_1-i))+\omega^*(k\ -i),\\ i=1,2,....,k_1. \end{gathered} \tag{7}$$

Використовуючи формули (4)–(7), покажемо, що наведене керування переслідувача $u(i)$. $i=0,1,...,I(k_1)$, задовольняє обмеженню (2). Маємо:

$$\sum_{i=0}^{I(k_1)} \left\|u_i\right\|^2 = \sum_{i=0}^{k_0-1} \left\|u_i{}^0\right\|^2 + \sum_{i=k_0}^{I(k_1)} \left\|u_i\right\|^2 \le \sum_{i=0}^{k_0-1} \left\|u_i{}^0\right\|^2 + \sum_{i=0}^{I(k_1)} \left\|F(i)v\left(I(k_1)-i\right)\right\|^2 + \sum_{i=0}^{k_1} \left\|\omega^*(i)\right\|^2 \le \rho^2 .$$

Тепер перевіримо справедливість твердження теореми. Стан гри у момент часу $I(k_1)+1$ має вигляд:

$$x\left(I(k_1)+1\right) = A^{I(k_1)+1}x_0 - \sum_{i=0}^{I(k_1)} A^{I(k_1)-i}Bu(i) + \sum_{i=0}^{I(k_1)} A^{I(k_1)-i}Cv(i) =$$

$$= A^{I(k_1)+1}x(0) - \sum_{i=0}^{k_0-1} A^{I(k_1)-i}Bu^0(i) - \sum_{i=0}^{k_1} A^{k_1-i}Bu(k_0+i) + \sum_{i=0}^{I(k_1)} A^{I(k_1)-i}Bv(i) .$$

Із урахуванням способу керування переслідувача (7) має місце формула:

$$\sum_{i=0}^{k_1-i} A^{k_1-i}Bu(k_0+i) = A^{k_1}BF\left(I(k_1)\right)v(0) + A^{k_1}B\omega^*(k_1) + \sum_{i=0}^{k_1-i} A^{i}B\omega^*(i) +$$

$$+\sum_{i=0}^{k_1} A^{k_1-i}B\Big(F\left(I(k_1-i+1)-1\right)v\left(I(k_1)-I(k_1-i+1)+1\right)+\ldots$$

$$+F\left(I(k_1-i)v\left(I(k_1)-I(k_1-i)\right)\right)\Big) .$$

Підставивши цей вираз у попередню формулу, отримаємо

$$\pi x\left(I(k_1)+1\right) = \pi\left(A^{I(k_1)+1}x(0) - \sum_{i=0}^{k_0-1} A^{I(k_1)-i}Bu^0(i)\right) - \sum_{i=0}^{k_1} \pi A^{i}B\omega^0(i) -$$

$$-\left(\pi A^{k_1}BF\left(I(k_1)\right)v(0) - \pi A^{I(k\ )}Cv(0)\right) - -\sum_{i=1}^{k_1}\Big\{\Big(\pi A^{k_1-1}BF\left(I(k_1-i+1)-1\right)v\left(I(k_1)-I(k_1-i+1)\right) -$$

$$-\pi A^{I(k_1-i+1)-1}Cv\left(I(k_1)-I(k_1-i+1)+1\right)\Big) + \ldots +$$

$$+\left(\pi A^{k_1-i}BF\left(I(k_1-i)\right)v\left(I(k_1)-I(k_1-i)\right) - \pi A^{I(k_1-i)}Cv\left(I(k_1)-I(k_1-i)\right)\right)\Big\} .$$

З умови 1 випливає, що $\pi xI(k_1+1)=0$.

Бачимо, що при побудові свого керування на кожному кроці k_0+i, $1\le i\le k_1$, переслідувач використовує інформацію про керування втікача у моменти часу $I(k_1-i+1)+1,\ldots,I(k_1-i)$.

Зауважимо, що у випадку $I(k)=k$ умова 1 має наступний вигляд: існує лінійний оператор $F(k)$ з R^q в R^p, такий, що $\pi A^k C = \pi A^k BF(k)$.

Висновки. Для лінійної дискретної гри зближення вводиться поняття ціло-чисельної функції розтягування часу. За допомогою цієї функції отримані достатні умови на параметри гри, що забезпечують переслідувачу можливість виведення траєкторії об'єкту на термінальну множину за скінченний час. Описаний спеціальний спосіб поточного керування переслідувача, що реалізує таку можливість. А саме, у кожний момент часу керування переслідувача будується з огляду на керування втікача на певному дискретному проміжку часу у минулому, що з часом змінюється.

Список літератури

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 426 с.
3. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. Springer Science & Business Media, 2013. 424 p.
4. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями. *Дифференциальные уравнения.* 1992. Т. 28, № 2. С. 219–223.
5. Азимов А.Я. Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1974. № 2. С. 31–35.
6. Чикрий Г.Ц. О растяжении времени в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Теорія оптимальних рішень*. 2012. № 11. С. 9–13. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/85009
7. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока. *ДАН СССР*. 1973. Т. 208. № 3. С. 520–523.
8. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, No. 2. P. 233–245. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0042-x
9. Chikrii A.A., Belousov A.A. On linear differential games with integral constraints. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 269. P. 69–80.
10. Ушаков В.Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Прикладная математика и механика*. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 15–23.
11. Chikrii G.T. On time extension in differential games with impulse controls. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53. P. 704–711. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9972-0

Одержано 28.03.2024

Чикрій Грета Цолаківна,
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
https://orcid.org/0000-0003-2651-0685
g.chikrii@gmail.com

УДК 518.9

Г.Ц. Чикрій

Лінійна дискретна гра з квадратичними обмеженнями на керування

Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
Листування: g.chikrii@gmail.com

Вступ. При дослідженні задач зближення рухомих об’єктів, як правило, використовуються неперервні моделі руху з інтегральними обмеженнями на керування. Однак для практичних застосувань підходять лише дискретні моделі руху з квадратичними або ресурсними обмеженнями.

Мета роботи – розробити дискретний аналог принципу розтягування часу для розв’язання задачі гарантованого зближення траєкторії дискретної конфліктно-керованої системи з термінальною множиною у вигляді лінійного підпростору.

Результати. Вводиться ціло-чисельна функція розтягування часу. Її використання у рамках дискретного аналогу першого прямого методу Л.С. Понтрягіна дає можливість отримати достатні умови виведення переслідувачем траєкторії дискретного конфліктно-керованого процесу на задану термінальну множину. Описаний спосіб побудови поточного керування переслідувача, що виводить траєкторію об’єкта на термінальну множину за довільної протидії втікача. У дискретному випадку він істотно відрізняється від способу побудови керування у неперервному випадку, коли поточне керування переслідувача будується з огляду на керування втікача у певний момент часу у минулому, а саме, переслідувач у кожний момент часу обирає своє поточне керування на основі керувань супротивника на певному дискретному проміжку часу у минулому. При цьому виконуються квадратичні обмеження на керування.

Висновки. Отримані умови зближення траєкторії конфліктно-керованого дискретного процесу з термінальною множиною при квадратичних обмеженнях на керування. Ця множина є лінійним підпростором, що відповідає пійманню переслідувачем втікача. Описаний спосіб керування переслідувача на основі керувань втікача у минулому, що реалізує таке зближення.

Ключові слова: лінійна дискретна гра зближення, квадратичні обмеження, переслідувач, втікач, ціло-чисельна функція розтягування часу, допустиме керування.

UDC 518.9

Greta Chikrii

Linear Discrete Game Under Quadratic Constraints on Controls

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: g.chikrii@gmail.com

Introduction. In studies concerning the problems of approaching moving objects, the authors, as a rule, use continuous dynamic models under integral constrains on controls. However, only discrete models under quadratic or resource constraints are suitable for practical applications.

The purpose of the paper is to develop a discrete analog of the method of time dilation for solving the problem of guaranteed approaching a terminal set by a discrete conflict-controlled system trajectory.

Results. We introduce the concept of integer function of time dilation. Its using, in the frames of the discrete analog of the Pontryagin First Direct method, makes it possible to deduce sufficient conditions for bringing the trajectory of the discrete conflict-controlled process to the terminal set. We outline the way of constructing current pursuer's control, which brings the object trajectory to the terminal set under arbitrary admissible counteraction of the evader. It differs from the pursuer control choice in the continuous case, when the pursuer chooses his current control in view of the evader's control at a certain moment of time in the past. In the discrete case, the pursuer constructs his control on the basis of information about the evader's controls on a whole discrete interval of time in the past. We prove that such control satisfies original quadratic constraints.

Conclusions. We derive conditions for approaching the trajectory of conflict-controlled discrete process a terminal set. In so doing, quadratic constraints on controls are fulfilled. The terminal set is supposed to be a subset that corresponds to the catching the evader by the pursuer.

Keywords: linear discrete game of approach, quadratic constraints, pursuer, evader, integer function of time dilation, admissible control.