КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.64; 519.65 DOI:10.34229/2707-451X.24.2.6

О.М. КОЛОМИС

ЕФЕКТИВНІ ЗА ТОЧНІСТЮ АЛГОРИТМИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ІЗ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РЯДАМИ ФУР'Є

Розглядаються задачі апроксимації функцій із деяких класів, які задані своїми значеннями в деяких точках тригонометричним рядом Фур'є з використанням для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є оптимальних за точністю на класах і близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій.

Ключові слова: *апроксимація функцій, ряди Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, квадратурні формули, похибка апроксимації.*

Вступ. Задачу апроксимації можна розглядати як основу обчислювальних методів, а саме наближення окремих функцій або класів функцій, функціями, які в деякому сенсі є простішими за функції, що апроксимуються. Найчастіше роль апроксиманта відіграє множина алгебраїчних многочленів або ж (у випадку, якщо функція періодична) множина тригонометричних поліномів заданого порядку n.

Ідеї та методи теорії апроксимації застосовуються у різних розділах науки, особливо прикладних напрямків, оскільки завдання, пов'язані з необхідністю замінити один об'єкт іншим, близьким у тому чи іншому сенсі до першого, але простішим для вивчення, виникають дуже часто.

Широкому проникненню ідей і методів теорії апроксимації у найрізноманітніші галузі науки значною мірою сприяло виявлення глибоких зв'язків між доволі далекими, на перший погляд, екстремальними задачами функціонального аналізу. Найчіткіше й найефективніше зв'язки проявилися під час дослідження найкращого наближення функцій.

Одним із найпоширеніших способів розв'язання задачі є апроксимація функцій рядами Фур'є з використанням різних систем базисних функцій. Особливо активно апроксимація функцій рядами Фур'є застосовується, наприклад, у задачах цифрової обробки сигналів, при побудові математичних моделей об'єктів керування неперервних виробничих процесів, під час розв'язання багатьох задач математичної фізики і т. п. [1–7].

1. Постановка задачі. Одним з найбільш відомих способів розв'язання цієї задачі є апроксимація функцій рядами Фур'є [3, 4, 6, 7] вигляду

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

де a_k, b_k, $k = \overline{0, N-1}$ – коефіцієнти ряду Фур'є, які визначаються співвідношеннями

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad n = 0,1,2,3, \dots$$
$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad n = 1,2,3, \dots \tag{2}$$

Похибка апроксимації визначається співвідношенням

$$E = \| f(x) - S(x) \|_1 = \max_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} | f(x) - S(x) | \le \varepsilon\,. \tag{3}$$

На практиці для обчислення коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є дуже рідко можливо скористатися формулами Ейлера – Фур'є (1), (2) безпосередньо, оскільки функції $f(x)\in F$ зазвичай задаються не аналітично, а таблицею своїх значень. У цих умовах для визначення коефіцієнтів Фур'є необхідно використовувати наближені методи обчислення інтегралів, які, як правило, не забезпечують задану точність.

Розглянемо наступний клас функцій $F: W_{r,L}$, $r > 1$ – клас функцій, які мають $(r-1)$-у кусково-неперервну похідну і при цьому $f^{(r-1)}(x)\in C_L$, (C_L – клас функцій Ліпшиця).

Підвищення "потенційної спроможності" квадратурних формул обчислення коефіцієнтів Фур'є може бути здійснено шляхом звуження класів F підінтегральних функцій. На практиці важливо розглянути випадок, коли $\{x_i\}_0^{N-1}$ і $\{f_i\}_0^{N-1} = \{f(x_i)\}_0^{N-1}$ фіксовані (наприклад, випадок, коли функція задана таблицею значень з її області визначення). Такий спосіб подання вихідної інформації веде до значного звуження відповідного класу F на інтерполяційні класи F_N, які визначаються належністю класу F і ще щонайменше $2N$ фіксованими числами: x_i і $f(x_i)$, $i = \overline{0, N-1}$, і наближає нас до реальної ситуації, яка виникає при вирішенні конкретної задачі. Клас F_N є множиною функцій із F, які інтерполюють задану функцію у вузлах x_i, $i = \overline{0, N-1}$. Використання для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю і близьких до них квадратурних формул на класах F_N обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій дозволяє підвищити якість запропонованих алгоритмів апроксимації функцій рядами Фур'є.

Розглянемо наступний клас функцій $F_N: W_{2,L,N}$ – клас функцій $W_{2,L}$ із заданими фіксованими значеннями f_i у вузлах фіксованою сітки x_i, $i = \overline{0, N-1}$.

Варто зазначити, що для отримання оцінок знизу похибки чисельного інтегрування на класах підінтегральних функцій F можна використовувати метод "капелюхів" [1, 2]. Для побудови і обґрунтування оптимальних за точністю і близьких до них квадратурних формул визначення a_k, b_k в класах F_N доцільно застосовувати метод граничних функцій [1, 2].

Відомо [3], що у вищенаведених класах функцій ряд Фур'є збіжний, оскільки виконуються відомі ознаки збіжності (Ліпшиця, Дирихле), тому можна стверджувати, що періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x)\in F$ можна представити рядом Фур'є (1), (2).

Нехай функція $f(x)\in F$ на відрізку $[-l, l]$ задана N своїми значеннями $\{f_i\}_0^{N-1}$ у деякому наборі вузлових точок $\{x_i\}_0^{N-1}$ із її області визначення. У роботах [1, 2] наведені оцінки повних похибок обчислення $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ за допомогою квадратурних формул, які розглядаються далі. Позначимо ці похибки як V_{a_k} і V_{b_k}.

На практиці, як правило, функцію $f(x)$ апроксимують скінченними сумами Фур'є вигляду

$$S_n(x,f) \approx \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{4}$$

де $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, $k=\overline{0,N-1}$ – наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є.

У цьому випадку похибка апроксимації складається з двох частин: похибки, яка виникає внаслідок використання скінченної кількості членів ряду, і похибки внаслідок наближеного обчислення коефіцієнтів. Оцінимо її наступним чином:

$$E = E(F,N,n) = \| f(x) - S_n(x,f) \|_1 = \max_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} | f(x) - S_n(x,f) | =$$

$$= \max_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} \left\| \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right] - \left[\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\right\| \le$$

$$\le |R_n(f)| + \frac{V_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k}\left|\cos\frac{k\pi x}{l}\right| + V_{b_k}\left|\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\right) \le |R_n(f)| + \frac{V_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k} + V_{b_k}\right), \tag{5}$$

де $V_{a_k} = V_{a_k}(F,\, N) = \max_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} |a_k - \tilde{a}_k|$, $V_{b_k} = V_{b_k}(F,\, N) = \max_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} |b_k - \tilde{b}_k|$ – похибки наближеного обчислення коефіцієнтів a_k, b_k, $k=\overline{0,N-1}$, $R_n(f)$ – лишок ряду Фур'є при переході від нескінченної суми (1) до скінченної суми (4).

Для класів F_N справедливе співвідношення, аналогічне (5):

$$E = E(F_N, \{x_i\}_0^{N-1}, \{f_i\}_0^{N-1}, n) = \| f(x) - S_n(x,f) \|_1 = \max_{\substack{f(x)\in F_N \\ x\in[-l,\, l]}} | f(x) - S_n(x,f) | =$$

$$= \max_{\substack{f(x)\in F_N \\ x\in[-l,\, l]}} \left\| \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right] - \left[\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\right\| \le$$

$$\le |R_n(f)| + \frac{\delta_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{a_k}\left|\cos\frac{k\pi x}{l}\right| + \delta_{b_k}\left|\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\right) \le |R_n(f)| + \frac{\delta_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{a_k} + \delta_{b_k}\right), \tag{6}$$

де $\delta_{a_k} = \delta_{a_k}(F_N, \{x_i\}_0^{N-1}, \{f_i\}_0^{N-1}) = \max_{\substack{f(x)\in F_N \\ x\in[-l,\, l]}} |a_k - \tilde{a}_k|$, $\delta_{b_k} = \delta_{b_k}(F_N, \{x_i\}_0^{N-1}, \{f_i\}_0^{N-1}) = \max_{\substack{f(x)\in F_N \\ x\in[-l,\, l]}} |b_k - \tilde{b}_k|$ – похибки наближеного обчислення коефіцієнтів a_k, b_k, $k=\overline{0,N-1}$.

У роботі отримані оцінки E запропонованого підходу до апроксимації $f(x)$ з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур’є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із вищевказаних класів функцій F і F_N та наведені відповідні квадратурні формули.

2. Апроксимація функцій класів $W_{r,L}, W_{2,L}, W_{2,L,N}$

Теорема 1. Нехай періодична з періодом $2l$ функція $f(x)\in W_{r,L}$, $r>1$, $x\in[-l,l]$, апроксимується рядом Фур'є вигляду (4), де коефіцієнти $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ визначаються за допомогою оптимальної за порядком точності при $N\geq\left|\frac{n\pi}{l}\right|$ квадратурної формули вигляду

$$\begin{aligned} R_{3,a}(\omega)&=\int_{-l}^{l}S_\Delta(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,\quad k=0,1,2,...,\\ R_{3,b}(\omega)&=\int_{-l}^{l}S_\Delta(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\quad k=0,1,2,..., \end{aligned}\tag{7}$$

де $S_\Delta(x)$ – поліноміальний сплайн степеня r на сітці $\Delta: -l=x_0<x_1<\ldots<x_N=l$ [1, 8]. Тоді похибка апроксимації

$$E_{W_{r,L}}\leq|R_n(f)|+\frac{V_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(V_{a_k}+V_{b_k})<\frac{4lL}{(r-1)\pi}\cdot\frac{1}{n^{r-1}}+C(r)\frac{2n+1/2}{lN^r},\tag{8}$$

де $C(r)=\min\left(\frac{LB(r+1,\,r+1)}{r!14^{2r+1}},\ \frac{L(2\pi)^{r+1}B(r+1,\,r+1)}{r!48^{2r+1}}\right)$, $B(r+1,\,r+1)$ – інтеграл Ейлера першого роду ($B(r+1,\,r+1)=\frac{r!}{2^{r+1}(r+1/2)(2r-1)!!}$).

Доведення. 1. Оскільки $f(x)\in W_{r,L}$ періодична з періодом $2l$, то її похідні $f^{(m)}(x)$ ($m=\overline{1,r-1}$) також можна розкласти у ряд Фур'є. Позначимо коефіцієнти розкладу $a_k^{(m)}$, $b_k^{(m)}$. В роботі [3] доведені наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} &\text{при } r-1=2j: &&a_k=(-1)^j\frac{a_k^{(r-1)}}{k^{r-1}},\quad b_k=(-1)^j\frac{b_k^{(r-1)}}{k^{r-1}},\\ &\text{при } r-1=2j+1: &&a_k=(-1)^{j+1}\frac{b_k^{(r-1)}}{k^{r-1}},\quad b_k=(-1)^{j+1}\frac{a_k^{(r-1)}}{k^{r-1}}. \end{aligned}\tag{9}$$

Скориставшись формулою інтегрування за частинами, представимо коефіцієнт ряду Фур'є $a_k^{(r-1)}$ у вигляді

$$a_k^{(r-1)}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^{(r-1)}(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}f^{(r-1)}(x)d\sin\frac{k\pi x}{l}=$$

$$=\frac{1}{k\pi}f^{(r-1)}(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}df^{(r-1)}(x)=-\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}df^{(r-1)}(x),$$

звідки отримаємо наступну оцінку для коефіцієнта $a_k^{(r-1)}$:

$$\left|a_k^{(r-1)}\right|=\frac{1}{k\pi}\left|\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}df^{(r-1)}(x)\right|\leq\frac{2lL}{k\pi}\max_{x\in[-l,l]}\sin\frac{k\pi x}{l}\leq\frac{2lL}{k\pi}.$$

Аналогічно можна довести оцінку для коефіцієнта $b_k^{(r-1)}$: $\left|b_k^{(r-1)}\right| \le \dfrac{2lL}{k\pi}$.

Скориставшись формулами (9) отримаємо наступні оцінки:

$$|a_k| \le \frac{2lL}{\pi k^r}\ ,\ |b_k| \le \frac{2lL}{\pi k^r}\ .$$

Оскільки $|R_n(f)| \le \sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\left(|a_m|+|b_m|\right)$, то $|R_n(f)| \le \dfrac{4lL}{\pi}\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{m^r}$.

Скориставшись нерівністю $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{m^r} < \dfrac{1}{(r-1)}\cdot\dfrac{1}{n^{r-1}}$, отримаємо

$$|R_n(f)| < \frac{4lL}{(r-1)\pi}\cdot\frac{1}{n^{r-1}}\ . \tag{10}$$

2. В роботах [1, 2] доведено, що

$$V_{a_k} \le C(r)\frac{1}{lN^r},\quad V_{b_k} \le C(r)\frac{1}{lN^r},\qquad \text{при } N \ge \left|\frac{k\pi}{l}\right|. \tag{11}$$

Застосувавши до співвідношення (5) оцінки (10), (11) і нерівності $|\cos z| \le 1$, $|\sin z| \le 1$, отримаємо оцінку (8).

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. У випадку $r=2$ ($f(x)\in W_{2,L}$) для обчислення коефіцієнтів $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ доцільно застосувати оптимальні за порядком точності квадратурні формули вигляду $R_{4,a}(\omega)=\int\limits_{-l}^{l} S_3(x)\cos\dfrac{k\pi}{l}x dx$, $R_{4,b}(\omega)=\int\limits_{-l}^{l} S_3(x)\sin\dfrac{k\pi}{l}x dx$, де $S_3(x)$ – кубічний сплайн Ерміта, $S_3(x_i)=f_i$, $S_3'(x_i)=f_i'$, $i=\overline{0,N}$. Відомо [1, 8], що $S_3(x)$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ можна записати у вигляді

$$S_3(x)=\varphi_1(t)f_i+\varphi_2(t)f_{i+1}+\varphi_3(t)hf_i'+\varphi_4(t)hf_{i+1}',$$

де $\varphi_1(t)=(1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t)=t^2(3-2t)$, $\varphi_3(t)=t(1-t)^2$, $\varphi_4(t)=-t^2(1-t)$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, $t=\left(x-x_i\right)/h_i$.

В цьому випадку оцінки (11) матимуть вигляд [1, 8]:

$$V_{a_k} \le \frac{L}{16N^2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{l\sin 2\frac{k\pi}{l}}{4k\pi}}\ ,\quad V_{b_k} \le \frac{L}{16N^2}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{l\sin 2\frac{k\pi}{l}}{4k\pi}}\ ,$$

а похибку апроксимації запишемо у вигляді

$$E_{W_{2,L}} < \frac{4lL}{\pi}\cdot\frac{1}{n}+\frac{L}{32N^2}+\frac{L}{16N^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{l\sin 2\frac{k\pi}{l}}{4k\pi}}\left|\cos\frac{k\pi x}{l}\right|+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{l\sin 2\frac{k\pi}{l}}{4k\pi}}\left|\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\Bigg)<\frac{4lL}{\pi}\cdot\frac{1}{n}+\frac{L}{32N^2}+\frac{Ln\sqrt{(2\pi+l)/\pi}}{16N^2}=$$

$$=\frac{4lL}{\pi}\cdot\frac{1}{n}+\frac{L}{16}\left(\frac{n\sqrt{2\pi+l}}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{N^2}.$$

Звузимо клас функцій $W_{2,L}$ на клас $W_{2,L,N}$.

Розглянемо випадок, коли функція $f(x)\in W_{2,L,N}$ задана таблицею значень функції $\{f_i\}_0^N$ та її першої похідної $\{f_i'\}_0^N$ у вузлах заданої сітки $\{x_i\}_0^N$. Для цього випадку (при виконанні певних умов, які накладаються на функції $f(x)\in W_{2,L,N}$ та її похідні) в [2] побудовані оптимальні за точністю при $N\geq\frac{n\pi}{l}$ квадратурні формули вигляду

$$R_{5,a}(k)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_5^*(x)\cos\frac{k\pi}{l}x dx,\quad k=0,1,2,...,$$
$$R_{5,b}(k)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_5^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx,\quad k=1,2,3,..., \tag{12}$$

де

$$f_5^*(x)=\begin{cases} f_\nu+f_\nu'(x-x_\nu), & x_\nu\leq x\leq\tilde{x}_\nu, \\ \frac{1}{2}[f_\nu+f_\nu'(x-x_\nu)+f_{\nu+1}+f_{\nu+1}'(x-x_{\nu+1})]+ & \\ +\frac{L}{4}sign(\Delta f_\nu')\left[(x-x_\nu)^2+(x-x_{\nu+1})^2\right], & \tilde{x}_\nu\leq x\leq\tilde{\tilde{x}}_\nu, \\ f_{\nu+1}+f_{\nu+1}'(x-x_{\nu+1}), & \tilde{\tilde{x}}_\nu\leq x\leq x_{\nu+1}, \\ & x\notin\left[x_{N-1},x_N\right], \\ f_{N-1}+f_{N-1}'(x-x_{N-1}), & x\in\left[x_{N-1},x_N\right], \end{cases} \tag{13}$$

$$\tilde{x}_\nu=\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}-\frac{|\Delta f_\nu'|}{2L},\quad \tilde{x}_\nu=\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}+\frac{|\Delta f_\nu'|}{2L},\quad \Delta f_\nu'=f_{\nu+1}'-f_\nu'.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай періодична з періодом $2l$ функція $f(x)\in W_{2,L,N}$, $x\in[-l,l]$, апроксимується рядом Фур'є вигляду (4), де коефіцієнти $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ визначаються за допомогою оптимальних за точністю при $N\geq\frac{n\pi}{l}$ квадратурних формул вигляду (12), (13). Тоді похибка апроксимації функції $f(x)$ визначається співвідношенням

$$E_{W_{2,L,N}}\leq\left|R_n(f)\right|+\frac{\delta_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\delta_{a_k}+\delta_{b_k}),$$

де

$$\left|R_n(f)\right| < \frac{4lL}{\pi}\cdot\frac{1}{n}, \tag{14}$$

$$\delta_{a_0} = \frac{L}{2l}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta x_\nu}{3}\left(\frac{\Delta^2 x_\nu}{4}+\frac{\Delta^2 f'_\nu}{4L^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Delta f'_\nu}{L^2}\left(\Delta f_\nu - \Delta x_\nu\,\frac{f'_\nu + f'_{\nu+1}}{2}\right)\right]+\frac{\Delta^3 x_{N-1}}{3}\right|,$$

$$\delta_{a_k} = \frac{Ll}{2\pi k}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\sin\frac{\pi k}{2l}(x_\nu + x_{\nu+1})\left(\sin^2\frac{\pi k\Delta x_\nu}{4l} - \sin^2\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll} -\right.\right.\right.$$

$$-\left(\frac{\Delta x_\nu^2}{4} - \frac{(\Delta f'_\nu)^2}{4L}\right)\cos\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll} + sign(\Delta f'_\nu)\left[\Delta x_\nu\left(f'_\nu + f'_{\nu+1}\right) - 2\Delta f_\nu\right]\times$$

$$\left.\left.\times\cos\frac{\pi k}{2l}(x_\nu + x_{\nu+1})\sin\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}\right) sign\cos\frac{\pi k}{l}x_\nu + P_{a,5}(k)\right|,\quad k = 1,2,3,..., \tag{15}$$

$$P_{a,5}(k) = sign\left(\cos\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{2l}{k\pi}\Delta x_{N-1}\cos k\pi - \Delta x_{N-1}^2\sin k\pi + \frac{2}{\omega^2}\left(\sin k\pi - \sin\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\right|,$$

$$\delta_{b_k} = \frac{Ll}{2\pi k}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\cos\frac{\pi k}{2l}(x_\nu + x_{\nu+1})\left(\sin^2\frac{\pi k\Delta x_\nu}{4l} - \sin^2\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll} -\right.\right.\right.$$

$$-\left(\frac{\Delta x_\nu^2}{4} - \frac{(\Delta f'_\nu)^2}{4L}\right)\cos\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll} + sign(\Delta f'_\nu)\left[\Delta x_\nu(f'_\nu + f'_{\nu+1}) - 2\Delta f_\nu\right]\times$$

$$\left.\left.\times\sin\frac{\pi k}{2l}(x_\nu + x_{\nu+1})\sin\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}\right) sign\sin\frac{\pi k}{l}x_\nu + P_{b,5}(k)\right|,\quad k = 1,2,3,..., \tag{16}$$

$$P_{b,5}(k) = sign\left(\sin\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{2l}{k\pi}\Delta x_{N-1}\sin k\pi - \Delta x_{N-1}^2\cos k\pi + \frac{2}{\omega^2}\left(\cos k\pi - \cos\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\right|,$$

$$\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu,\ \Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu.$$

Доведення 1. Оцінку лишку (14) отримаємо із (10) при $r = 2$.

2. Оцінки (15), (16) похибки наближеного обчислення коефіцієнтів $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ $(k = 0,1,2,...,)$ за формулами (12), (13) у випадку $N \ge \frac{n\pi}{l}$ доведені в [2].

Для δ_{a_0} маємо:

$$\delta_{a_0}=\left|\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx-\frac{1}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f_5^*(x)\,dx\right|=\left|\frac{1}{l}\sum_{\nu=0}^{N-2}\frac{L}{2}\left[\int\limits_{x_\nu}^{\tilde{x}_\nu}(x-x_\nu)^2\ dx+\int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}}(x-x_{\nu+1})^2\,dx\right]+\right.$$

$$+\frac{L}{4}\sum_{\nu=0}^{N-2}\int\limits_{\tilde{x}_\nu}^{\tilde{\tilde{x}}_\nu}((x-x_\nu)^2+(x-x_{\nu+1})^2)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-2}sign(\Delta f_\nu)\int\limits_{\tilde{x}_\nu}^{\tilde{\tilde{x}}_\nu}(\Delta f_\nu+\Delta f'_\nu\cdot x-f'_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}+f'_\nu\cdot x_\nu)\,dx+$$

$$\left.+\frac{L}{2}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})^2\,dx\right|=\frac{1}{l}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{L}{6}\left(\left(\frac{\Delta x_\nu}{2}-\frac{\Delta f'_\nu}{2L}\right)^3+\left(\frac{\Delta x_\nu}{2}+\frac{\Delta f'_\nu}{2L}\right)^3\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}sign(\Delta f_\nu)(\Delta f_\nu+f'_\nu x_\nu-f'_{\nu+1}x_{\nu+1})(\tilde{\tilde{x}}_\nu-\tilde{x}_\nu)+\frac{\Delta|f'_\nu|}{2}(\tilde{\tilde{x}}_\nu^2-\tilde{x}_\nu^2)\right]+\frac{\Delta^3x_{N-1}}{3}\right|=$$

$$=\frac{L}{2l}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta x_\nu}{3}\left(\frac{\Delta^2x_\nu}{4}+\frac{\Delta^2f'_\nu}{4L^2}\right)+\frac{\Delta f'_\nu}{L^2}\left(\Delta f_\nu-\Delta x_\nu\frac{f'_\nu+f'_{\nu+1}}{2}\right)\right]+\frac{\Delta^3x_{N-1}}{3}\right|.$$

Отже, теорему 2 доведено.

Зауваження 2. В роботі [1] побудовані оптимальні за точністю квадратурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x)\in W_{2,L,N}$ з використанням різних інформаційних операторів і без додаткових умов на значення функції та її похідної, а також наведені оптимальні оцінки похибки методу. Використовуючи їх у задачах апроксимації функцій рядами Фур'є, можна отримати результати, аналогічні теоремі 2.

Зауваження 3. Важливе значення має якість оцінок V_{a_k}, V_{b_k} і δ_{a_k}, δ_{b_k}, оскільки їх «завищеність» може призвести до збільшення обсягу обчислювальних витрат, необхідних для розв'язання задачі (4), або навіть до неможливості її розв'язання. Часто ця якість залежить від констант, що описують клас F (наприклад, L) і входять в оцінки похибки методу. Якщо вони завищені, то корисно застосовувати алгоритми виявлення та уточнення апріорної інформації [1, 9]. Оскільки для обчислення $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ використовуються оптимальні за точністю та близькі до них квадратурні формули, то оцінки похибки методу V_{a_k}, V_{b_k} і δ_{a_k}, δ_{b_k} досить високої якості.

Для більш точної оцінки повної похибки апроксимації необхідно враховувати похибку заокруглення і неусувну похибку запропонованих алгоритмів [1, 2, 5]. Варто відмітити, що доцільно також отримувати й експериментальну оцінку методом тестування [5]. Для цього необхідно розв'язати задачу (4) з одинарною і подвійною розрядністю. Модуль різниці цих рішень дає більш точну оцінку, ніж апріорні аналітичні оцінки.

Висновки. Робота присвячена оптимальному за точністю відновленню функцій з деяких класів. Одним з найбільш відомих способів розв'язання задачі апроксимації функції, яка задана своїми значеннями у точках на деякому проміжку і належить деякому класу функцій F, є її апроксимація скінченними сумами ряду Фур'є. Побудовано ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класів $W_{r,L}$, $W_{2,L}$, $W_{2,L,N}$ за допомогою рядів Фур'є з використання для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із вищевказаних класів функцій. Отримані оцінки похибки апроксимації запропонованого підходу до апроксимації функцій з наведених класів.

Список літератури

1. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. Київ: Наукова думка, 1993. 294 с.
2. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. **Т.** 1. Алгоритми. Київ: Наукова думка, 2011. 447 с. **Т.** 2. Застосування. Київ: Наукова думка, 2011. 346 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001. Т. 3. 662 с.
4. Stepanets A.I. Methods of Approximation Theory. VSP: Leiden, Boston, 2005. 919 p. https://doi.org/10.1515/9783110195286
5. Задірака В.К., Бабич М.Д., Березовський А.І. та ін. *Т*-ефективні алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики. Тернопіль: Збруч, 2003. 261 с.
6. Коломис О.М. Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Гельдера рядами Фур'є. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. Вип. 32. С. 159–164. https://doi.org/10.15407/fmmit2021.32.159
7. Коломис О.М., Луц Л.В. Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Ліпшиця рядами Фур'є. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. Вип. 36. С. 111–115. https://doi.org/10.15407/fmmit2023.36.111
8. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука. 1984. 352 с.
9. Коломыс Е.Н. Оптимальные алгоритмы вычисления оценок динамических характеристик объектов управления. *Компьютерная математика*. 2007. № 2. С. 98–103.

Одержано 15.04.2024

Коломис Олена Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
https://orcid.org/0000-0001-7174-1381
kolomys@ukr.net

УДК 519.64; 519.65

О.М. Коломис

Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із деяких класів рядами Фур'є

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
Листування: kolomys@ukr.net

Вступ. Задачу апроксимації можна розглядати як основу обчислювальних методів, а саме наближення окремих функцій або класів функцій, функціями, які в деякому сенсі є простішими за функції, що апроксимуються. Найчастіше роль апроксиманта відіграє множина алгебраїчних многочленів або у випадку, якщо функція періодична – множина тригонометричних поліномів заданого порядку. Ідеї та методи теорії апроксимації застосовуються у різних розділах науки, особливо прикладних напрямків, оскільки завдання, пов'язані з необхідністю замінити один об'єкт іншим, близьким у тому чи іншому сенсі до першого, але простішим для вивчення, виникають дуже часто.

Мета роботи. Розглядаються задачі апроксимації функції, яка на деякому проміжку задана своїми значеннями в деякому наборі вузлових точок і належить деякому класу функцій тригонометричними рядами Фур'є з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на даному класі функцій. Основну увагу приділено дослідженню джерел виникнення похибки запропонованого підходу до апроксимації функцій.

Результати. Запропоновано ефективні за точністю алгоритми апроксимації з класів диференційовних функцій за допомогою рядів Фур'є з використанням для визначення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю і близьких до них на заданих класах квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій. Наведено оцінки похибки запропонованих алгоритмів апроксимації з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із класів диференційовних функцій із заданими значеннями у вузлах фіксованої сітки. Наведено відповідні квадратурні формули та конструктивні оцінки похибки методу апроксимації функцій вказаних класів.

Висновки. Побудовано ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класів диференційовних функцій за допомогою рядів Фур’є з використання для обчислення коефіцієнтів Фур’є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із вищевказаних класів функцій. Проведено комплексний аналіз якості побудованих алгоритмів апроксимації функцій скінченними сумами ряду Фур'є.

Ключові слова: апроксимація функцій, ряди Фур’є, коефіцієнти ряду Фур'є, квадратурні формули, похибка апроксимації.

UDC 519.64; 519.65

Olena Kolomys

Efficient by Precision Algorithms for Approximating Functions from Some Classes by Fourier Series

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: kolomys@ukr.net

Introduction. The problem of approximation can be considered as the basis of computational methods, namely, the approximation of individual functions or classes of functions by functions that are in some sense simpler than the functions being approximated. Most often, the role of an approximant is played by a set of algebraic polynomials or (in the case of a periodic function) a set of trigonometric polynomials of a given order. The ideas and methods of approximation theory are used in various fields of science, especially applied areas, since tasks related to the need to replace one object with another, close in one sense or another to the first, but easier to study, arise very often.

The purpose of the paper is consider the problems of approximation of a function, which is given by its values in a certain set of nodal points on a certain interval and belongs to a certain class of functions by trigonometric Fourier series, using the quadrature formulas for calculating integrals of fast oscillating functions on this class of functions, which are optimal in accuracy and close to them. The main attention is paid to the study of the sources of error of the proposed approach to function approximation.

Results. Effective approximation algorithms from classes of differentiable functions with the help of Fourier series are proposed, using the Fourier coefficients optimal in accuracy and close to them on the given classes of quadrature formulas for calculating integrals of fast-oscillating functions to determine the Fourier coefficients. The error estimates of the proposed approximation algorithms using the quadrature formulas for calculating the Fourier coefficients of the optimal accuracy and close to them for calculating integrals of fast-oscillating functions from classes of differential functions with given values at the nodes of a fixed grid are presented. The corresponding quadrature formulas and constructive estimates of the error of the method of approximation of functions of these classes are given.

Conclusions. Efficient by precision algorithms for approximating functions from classes of differentiable functions by means of Fourier series are constructed using the optimal accuracy and close to them quadrature formulas for calculating integrals of fast-oscillating functions from the above classes of functions to calculate the Fourier coefficients. A comprehensive analysis of the quality of the constructed algorithms for approximating functions by finite sums of the Fourier series is carried out.

Keywords: function approximation, Fourier series, Fourier series coefficients, quadrature formulas, approximation error.