ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.854.3

В.А. ВАСЯНИН, А.Н. ТРОФИМЧУК, Л.П. УШАКОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ В МНОГОПРОДУКТОВОЙ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

Аннотация. *В работе рассматриваются формулировки задач оптимизации распределения потоков с нелинейными функциями затрат и построением маршрутов транспортировки потоков и с заданными тарифами на дугах и в узлах на транспортировку и обработку потоков в многопродуктовой коммуникационной сети. Доказано, что задача с тарифами в сетевой постановке может быть за полиномиальное время преобразована к задаче целочисленного линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями. Отмечаются особенности решения преобразованной задачи при использовании известных методов целочисленного программирования и пакетов прикладных программ.*

Ключевые слова: *экономико-математические модели, распределение целочисленных потоков, многопродуктовые сети, задачи оптимизации.*

Введение

В Национальной программе информатизации Украины одними из приоритетных областей экономики определены транспорт и связь, повышение эффективности функционирования которых требует создания комплекса автоматизированных систем обработки данных и управления разного уровня и назначения, взаимосвязанных на принципах технологической, организационной, документационной, программной и информационной совместимости. Эффективность работы транспортных сетей и сетей передачи данных во многом определяет экономические и социальные показатели функционирования хозяйствующих субъектов, поэтому оптимизация и автоматизация процессов управления транспортными потоками в этих коммуникационных сетях являются актуальными и перспективными направлениями в достижении качественно нового уровня управления транспортом и связью, интенсификации рыночных преобразований в Украине и ее интеграции в Европейское Сообщество.

Для того, чтобы возможные инвестиции, выделенные на развитие коммуникационных сетей, были использованы наиболее эффективно, нужен строгий технико-экономический расчет, охватывающий основные

© В.А. Васянин, А.Н. Трофимчук, Л.П. Ушакова, 2016

альтернативные схемы их развития и функционирования при различных функциях затрат на обработку и транспортировку потоков. Необходимо выполнить оценку и отбор различных вариантов совершенствования коммуникационных сетей на основе процедур оптимизации и системного анализа эффектов, возникающих внутри сетей, а также вне их, опосредованно влияющих на развитие и состояние экономики отдельных территориальных регионов и страны в целом. В настоящее время для существующих коммуникационных сетей в различных отраслях хозяйства характерно то, что на всех уровнях управления уже введены различные автоматизированные и информационные системы. Предусматривается дальнейшее их развитие с использованием новейших информационных технологий; современного методического, технического и математического обеспечений; систем поддержки принятия решений, рационально сочетающих формальные и неформальные методы и интерактивный режим анализа и выбора оптимальных решений [1, 2]. Поскольку физическая пространственная структура большинства существующих сетей уже сложилась, в первую очередь, наибольший интерес представляет решение задач тактического (текущего) планирования и оперативного управления, нацеленных главным образом на оптимизацию их функционирования при имеющихся ресурсах.

В большинстве случаев существующие и проектируемые территориально-распределенные коммуникационные сети являются многоуровневыми и состоят из децентрализованной распределенной сети (магистральной) и низовых фрагментарных сетей (зональных и внутренних) на нижних уровнях иерархии. В данной работе рассматриваются транспортные многопродуктовые сети и магистральные сети передачи данных, для которых характерно наличие множества источников и стоков мелкопартионных потоков корреспонденций (продуктов или требований). Под корреспонденцией понимается пара различных узлов сети, между которыми имеется направленный дискретный поток элементов заданной величины, например, неделимых грузов унифицированного размера, бит или символов в передаваемых данных (сообщениях). В многопродуктовой сети каждый узел может обмениваться корреспонденциями со всеми остальными узлами. Корреспонденции могут быть заданы, например, матрицей мелкопартионных дискретных потоков, в которой строки соответствуют узлам-источникам, столбцы – узлам-стокам, а элементы матрицы определяют величину корреспонденций. В магистральной сети и зональных сетях все корреспонденции должны транспортироваться в транспортных средствах или передаваться по каналам связи в транспортных блоках (контейнерах) заданного размера. Размер транспортного блока измеряется количеством вмещающихся в него единиц корреспонденций. Перед транспортировкой мелкопартионные грузы в магистральных узлах транспортной сети рассортировываются по адресам их доставки в сортировочных центрах, а затем упаковываются в транспортные блоки. В сетях передачи данных в магистральных узлах также выполняются похожие технологические операции сортировки информационных потоков, а роль «сортировочной машины» выполняют мультиплексоры передачи данных, которые объединяют отдельные информационные потоки в виртуальные контейнеры, объем которых кратен пропускной способности линий связи.

В [3, 4] рассматривается обобщенная задача упаковки и распределения мелкопартионных корреспонденций в иерархической сети, решение которой осуществляется в несколько этапов. На первом этапе решается задача выбора иерархической структуры магистральной коммуникационной сети и схемы сортировки корреспонденций в узлах сети и упаковки их в транспортные блоки [5]. На втором этапе возникает задача распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков со смешанными вложениями, которые были сформированы при решении первой задачи [6]. Под смешанными вложениями понимаются объединенные в один транспортный блок (контейнер) мелкопартионные тарно-штучные грузы или сообщения с разными адресами назначения, которые могут не совпадать с адресом назначения транспортного блока. Смешанные потоки образуются для максимального сокращения количества транспортных блоков, необходимых для упаковки и транспортировки мелкопартионных корреспонденций.

Как правило, в математических моделях, описывающих процессы обработки и транспортировки многопродуктовых потоков затраты связываются с величиной потока по дугам сети или путям передачи потока. Для сетей передачи данных, где дуги ассоциируются с каналами связи, такие постановки оказываются достаточно приемлемыми. В случае же транспортных сетей очень трудно адекватно определить функции транспортных затрат, а значит, и получить в результате решения задачи достоверный ответ. В математической модели задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков, приведенной в работе [6], объемы и пути распределения потоков связываются с множеством искомых «оптимальных» маршрутов транспортных средств или каналов связи. Такая постановка задачи характерна при проектировании новой или реконструкции существующей сети перевозок или сети передачи данных. В этом случае для каждого определенного в результате решения маршрута легко рассчитать требуемые затраты (например, среднегодовые приведенные затраты) и получить более достоверную оценку транспортных затрат для всей сети. Если транспортные услуги предоставляются сторонними транспортными предприятиями (компаниями) или провайдерами сети передачи данных, то задача распределения потоков упрощается, так как в качестве функций транспортных затрат можно использовать тарифы на перевозку или передачу одного транспортного блока от отправителя к получателю.

Целью настоящей работы является построение математической модели задачи распределения транспортных блоков со смешанными вложениями при использовании заданных тарифов на транспортировку и обработку потоков. Рассматриваются общая сетевая формулировка задачи с нелинейными функциями затрат и построением маршрутов транспортировки потоков и постановка с заданными тарифами на дугах и в узлах в виде задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с блочной структурой, связывающими ограничениями и дополнительными ограничениями на время доставки мелкопартионных корреспонденций получателю. Отмечаются особенности решения задачи при использовании известных методов ЦЛП и пакетов прикладных программ.

1. Общая постановка задачи с нелинейными функциями затрат и построением маршрутов транспортировки потоков

При практическом проектировании и анализе коммуникационных сетей должны использоваться реальные стоимостные показатели, например, среднегодовые приведенные затраты на процессы обработки и транспортировки потоков. На практике существует множество различных функций затрат, используемых при описании таких процессов. По мере организационно-технического совершенствования коммуникационной сети эти функции постоянно подвергаются изменениям и уточнениям. Затраты определяются необходимыми капитальными вложениями и эксплуатационными расходами, зависящими от себестоимости и тарифов на отдельные технологические операции. Для транспортных сетей капитальные вложения зависят от рабочего парка транспортных средств (с различной грузоподъемностью) и контейнеров, необходимых для обеспечения нормального функционирования сети перевозок; оборудования, устанавливаемого в узлах сети для непрерывной автоматизированной сортировки и накопления грузов по адресам назначения; рабочего парка автопогрузчиков и, возможно, для крупных узлов – количества автоматизированных контейнерных терминалов, осуществляющих сортировку и группирование исходящих, входящих и транзитных контейнеров по маршрутам следования транспортных средств. Эксплуатационные расходы состоят из нескольких компонентов и включают расходы, связанные с движением (механической работой по транспортировке грузов); объемами обрабатываемых и перевозимых грузов; расстоянием перевозок; временем доставки грузов получателю; обслуживанием и ремонтом сортировочного оборудования, контейнерных терминалов, рабочего парка транспортных средств, контейнеров и автопогрузчиков; содержанием штата административно-управленческого, инженерно-технического и рабочего персонала; внедрением и освоением новых информационных технологий и средств автоматизации и механизации производства; различными организационными мероприятиями и др. В сетях передачи данных капитальные вложения зависят от суммарной стоимости используемых каналов связи и коммутационного оборудования (аппаратных шлюзов, коммутаторов, мультиплексоров, маршрутизаторов, концентраторов, мостов, повторителей, сетевых адаптеров и пр.). Обычно на практике стоимость каналов определяется как произведение стоимости одного канало-километра выбранного типа на длину канала с учетом рельефа местности. В качестве эксплуатационных расходов часто используется арендная плата за каналы связи, которая в свою очередь зависит от множества факторов.

В каждом случае определение адекватных функций затрат является сложной задачей, которая должна быть решена отдельно перед проведением численного моделирования. Ясно, что при решении задач оптимизации в целевую функцию должны быть включены только наиболее важные составляющие затрат, зависящие от искомых переменных. В сформулированной ниже задаче предполагается использование во всех составляющих целевой функции капитальных и эксплуатационных затрат, приведенных к сопоставимому виду. Отметим также, что в модели принимается сепарабельность и аддитивность всех видов функций затрат по переменным и элементам сети. Для реальных коммуникационных сетей такие условия не всегда выполняются и поэтому фактические понесенные затраты на функционирование сети за определенный период времени могут отличаться от расчетных затрат, полученных при моделировании.

Содержательная постановка задачи заключается в выборе такой схемы распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков, сформированных при решении задачи выбора иерархической структуры магистральной сети и схемы сортировки мелкопартионных корреспонденций в узлах сети, при которой максимально снижаются приведенные затраты на обработку и транспортировку потоков. Решение задачи должно осуществляться в интерактивном режиме и определять основные технико-экономические показатели функционирования магистральной сети при изменении исходных данных, параметров и ограничений транспортной модели. Поскольку не всегда удается формализовать все факторы, влияющие на выбор наилучшего решения, для окончательного выбора схемы распределения и маршрутизации потоков может использоваться практический опыт диспетчеров транспортных сетей и администраторов сетей передачи данных, а также базы знаний в автоматизированной информационно-аналитической системе поддержки принятия решений [1].

В [6] предложена математическая модель NP-трудной задачи распределения и маршрутизации транспортных блоков с упакованными в них мелкопартионными грузами или сообщениями. Следуя этой работе, рассмотрим математическую модель задачи в такой постановке.

Пусть $G(N,P)$ – иерархическая магистральная сеть с множеством неориентированных дуг P, $p=|P|$ и множеством узлов $N=N_1 \cup N_2 \cup N_3$, $n=|N|$, где N_1, N_2, N_3 – множества узлов первого, второго и третьего типа соответственно, $\cup$ – знак объединения множеств, $|\cdot|$ – знак мощности множества. Узлы сети соответствуют пунктам сортировки, отправления, назначения и перегрузки потоков, а дуги – участкам дорог для транспортных сетей или каналам связи для сетей передачи данных, связывающим узлы сети. Узлы второго и третьего типа отличаются от узлов первого типа функциональными возможностями, уровнем технической оснащенности, числом обслуживающего персонала (а значит, и функциями затрат на обработку потоков) и пр. В узлах третьего типа запрещена обработка транзитных потоков транспортных блоков.

Мелкопартионные потоки корреспонденций заданы исходной целочисленной матрицей $A=\| a_{ij} \|_{n\times n}$ и преобразованной целочисленной матрицей $A'=\| a'_{ij} \|_{n\times n}$, полученной после решения задачи упаковки транспортных блоков [7]. Элементы матрицы A' определяются следующим образом:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + \sum\limits_{rs \in \Omega_{ij}} a_{rs}, \text{ если потоки } \{a_{rs}\} \text{ объединены с потоком } a_{ij}, \\ 0, \text{ если поток } a_{ij} \text{ объединен с каким - либо другим потоком или } i = j, \end{cases}$$

для $ij \in S$, где S – множество индексов ij потоков, а Ω_{ij} – множество индексов rs потоков $\{a_{rs}\}$, объединенных с потоком a_{ij}. С матрицей A' связана справочная матрица объединения потоков $C = \| c_{ij} \|_{n \times n}$, элементы которой определяются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, \text{если поток } a_{ij} \text{ объединяется с потоком } a_{ik}, \\ j, \text{если поток } a_{ij} \text{ направляется в узел } j, \\ 0, \text{если } i = j. \end{cases}$$

Матрица C используется для восстановления последовательности узлов сети, в которых выполняется транзитная сортировка мелкопартионных корреспонденций a_{ij}, $ij \in S$ [8].

Кроме того, на вход задачи поступает матрица предварительных оценок времени доставки мелкопартионных корреспонденций получателям $T = \| T_{ij} \|_{n \times n}$, элементы которой выступают в качестве начальных ограничений на время доставки при решении задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков.

Пусть $\widetilde{A} = \| \widetilde{a}_{ij} \|_{n \times n}$, $\widetilde{a}_{ij} = \left\lceil \dfrac{a'_{ij}}{\omega} \right\rceil$ – матрица потоков транспортных блоков, где ω – размер транспортного блока, $\lceil \cdot \rceil$ – знаки округления числа до большего целого. Размер транспортного блока измеряется количеством вмещающихся в него единиц мелкопартионных корреспонденций. Потоки $\widetilde{a}_{ij}$ из источников i в стоки j должны перевозиться в транспортных средствах или передаваться по каналам связи с заданной периодичностью.

Пусть $\{m_k\}$, $k = \overline{1,l}$, – заданное множество проектируемых маршрутов транспортных средств или каналов связи, каждый из которых состоит из последовательности узлов и дуг сети G, соединяющей начальный и конечный узлы маршрута или канала связи. Предполагается, что множество $\{m_k\}$ для каждой неориентированной дуги сети G содержит прямой и обратный маршруты, и в процессе решения задачи во множество $\{m_k\}$ могут включаться новые маршруты, генерируемые по определенным правилам. Множество $\{m_k\}$ может содержать несколько маршрутов, соединяющих любую пару узлов. С каждым маршрутом транспортной сети связаны его характеристики: функция среднегодовых приведенных затрат на эксплуатацию и содержание маршрута или тарифы за перевозку единицы груза на маршруте; грузоподъемность и периодичность движения транспортных средств; время прибытия и отправления транспортного средства для каждого узла в маршруте и др. Для каждого маршрута в сети передачи данных заданы функция среднегодовых приведенных затрат на эксплуатацию и содержание канала связи, его длина и пропускная способность.

Определим маршрутную мультисеть $G_M(N,P_M)$, построенную транзитивным замыканием узлов всех маршрутов из $\{m_k\}$, где N – множество узлов сети, P_M – множество ее ориентированных маршрутных дуг. Между любыми узлами α и β сети G_M существует маршрутная дуга, если они связаны хотя бы одним маршрутом транспортного средства или каналом связи из $\{m_k\}$. Введем переменные: $u_{ij,k}^{\alpha\beta}$ – неизвестный поток транспортных блоков из i в j, проходящий по дуге $p_{\alpha\beta} \in P_M$, полученной из маршрута m_k ($u_{ij,k}^{\alpha\beta}$ определяют дуговые потоки в транспортных блоках на маршрутной сети G_M); $u_{ij,k}^{\eta\xi}$ – неизвестный поток транспортных блоков из i в j, проходящий по дуге $p_{\eta\xi} \in P$ на маршруте m_k.

Требуется минимизировать функцию

$$F = \sum_{k=1}^{l} C_{tr}^{k}\left(\left(\sum_{\eta\xi \in q_k} \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi}\right), d_k\right) + \sum_{\beta=1}^{n} C_{load}^{\beta}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha})\right) \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} \widetilde{a}_{ij} \text{ при } i=\alpha, \\ 0 \text{ при } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -\widetilde{a}_{ij} \text{ при } j=\alpha, \text{ для } \alpha = \overline{1,n}, ij \in S; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) - \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{a}_{\beta j} + \widetilde{a}_{j\beta}) \leq 2b_\beta,\ \beta = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi} \leq W_{\eta\xi}^{k} \text{ для всех } \eta\xi \in q_k,\ k = \overline{1,l}; \qquad (4)$$

$$\sum_{\beta=1}^{n} \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \leq b_{\alpha}^{k},\ \alpha \in \upsilon_k,\ k = \overline{1,l}; \qquad (5)$$

$$t_{av} = 1/\widetilde{a}_{\Sigma} \sum_{k=1}^{l} \sum_{\eta\xi \in q_k} f_{\eta\xi}^{k} / (W_{\eta\xi}^{k} - f_{\eta\xi}^{k}) \leq T_{del}, \text{где } \widetilde{a}_{\Sigma} = \sum_{ij \in S} \widetilde{a}_{ij},\ f_{\eta\xi}^{k} = \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi}; \qquad (6)$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} \geq 0, u_{ij,k}^{\eta\xi} \geq 0 \text{ - целые числа.} \tag{7}$$

Предполагается также, что учитываются ограничения на время доставки корреспонденций получателю $t_{ij} \leq T_{ij}$, $ij \in S$.

В конкретных случаях решения задачи к указанным ограничениям могут быть добавлены ограничения на запрет разветвления потоков:

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \widetilde{a}_{ij}, \text{если поток проходит по дуге } \alpha\beta \in m_k, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{8}$$

В формулах (1)-(8) введены обозначения: C_{tr}^k – нелинейная функция, определяющая зависимость транспортных затрат от количества транспортных блоков, передаваемых по маршруту m_k, и от длины маршрута d_k; q_k – упорядоченное множество дуг из P, составляющих маршрут m_k; C_{load}^{β} – нелинейная функция затрат на обработку транспортных блоков в узле β; b_{β}, $\beta = \overline{1,n}$ – максимальная пропускная способность β-го узла в транспортных блоках, пропускная способность задается для транзитных потоков, так как исходящие и входящие потоки для каждого узла должны быть обработаны безусловно. Для узлов третьего типа $b_{\beta} = 0$; $W_{\eta\xi}^k$ – грузоподъемность транспортного средства или пропускная способность канала связи на маршруте m_k на дуге $\eta\xi \in P$ в транспортных блоках, $W_{\eta\xi}^k \in \{w_1, w_2, ..., w_v\}$, где w_1, $w_2, ...,$ w_v – целые, упорядоченные по возрастанию положительные числа; b_{α}^k – ограничения на максимальное суммарное число транспортных блоков, которое можно обработать в транзитном узле α на маршруте m_k; υ_k – упорядоченное множество узлов из N на маршруте m_k; t_{av}, T_{del} – расчетная средняя и заданная максимальная задержка в передаче транспортных блоков в сети; t_{ij}, T_{ij}, $ij \in S$ – расчетное и заданное время на доставку корреспонденций a_{ij} из i в j.

Первая составляющая функции определяет транспортные затраты, вторая – затраты на обработку транспортных блоков. Условия (2) обеспечивают неразрывность потока, а условия (3)-(6) представляют собой соответственно ограничения на пропускные способности узлов; пропускные способности маршрутов; объемы обработки транспортных блоков в узлах следования транспортных средств или в коммутированных узлах сети передачи данных; среднюю задержку в передаче транспортных блоков.

В связи со сложностью сформулированной задачи в [6] предложен метод ее преобразования к некоторой совокупности более простых линейных многомерных задач о ранце со связывающими ограничениями. Метод основывается на предположении о том, что уменьшение значения функции (1) может быть достигнуто при максимальном увеличении значений $u_{ij,k}^{\eta\xi}$ на всех топологических дугах (участках) $\eta\xi$ маршрутов $\{m_k\}$. При этом исходная задача на минимум целевой функции заменяется на в некотором смысле двойственную к ней задачу на максимум загрузки участков маршрутов транспортных средств или каналов связи при исключении из явного рассмотрения нелинейных функций затрат. Для решения преобразованной задачи разработаны алгоритмы, существенно использующие специфику структуры задачи, абстрактные типы данных [9] и приемы, характерные для эвристических алгоритмов решения многомерной задачи о ранце. Алгоритмы позволяют за приемлемое время получить рациональные, с точки зрения проектировщика сети, решения задачи.

2. Постановка задачи на мультисети с заданными тарифами на дугах и в узлах

Рассмотрим постановку задачи, когда транспортные услуги предоставляются Q сторонними транспортными предприятиями (компаниями). В этом случае в качестве функций транспортных затрат C_{tr}^k можно использовать тарифы на транспортировку одного транспортного блока (физического или виртуального контейнера). Без потери общности предположим, что все транспортные компании могут оказывать услуги по транспортировке потоков между всеми парами узлов в сети. Тогда задачу (1)-(8) можно рассматривать на транспортной мультисети $G(N,P)$ с $|P| = l \le Q(n^2 - n)$ ориентированными дугами, когда маршрутная сеть $G(N,P_M)$ полностью совпадает с $G(N,P)$, так как все маршруты представлены одной дугой. Получаем, что $l = |\{m_k\}| \le Q(n^2 - n)$, а индексы дуг $\eta\xi \in P$ совпадают с индексами дуг $\alpha\beta \in P_M$. Для всех Q предприятий, занумерованных индексом $k = 1,2,...,Q$, заданы тарифы $C_{tr,k}^{\alpha\beta}$ на транспортировку единицы потока и ограничения $W_{\alpha\beta}^k$ на провозные возможности из узла α в узел β, $\alpha,\beta = \overline{1,n}$, $\alpha \ne \beta$. Для узлов сети заданы тарифы C_{load}^{α} на обработку единицы потока и ограничения b_α на величину транзитного потока в узле α, $\alpha = \overline{1,n}$. Задача (1)-(7) упрощается, так как проектировать маршруты не нужно и можно не учитывать ограничения (5) и (6). Транспортные тарифы $C_{tr,k}^{\alpha\beta}$ и тарифы на обработку транспортных блоков в узлах сети C_{load}^{α} должны быть приведены к одной шкале и определять, например, среднегодовые приведенные затраты. Пусть $u_{ij,k}^{\alpha\beta}$ – неизвестный поток транспортных блоков из i в j, проходящий по дуге $\alpha\beta \in \{q_k\}$, где $\{q_k\}$ – множество дуг k-го предприятия $|\{q_k\}| \le n^2 - n$.

Исходная задача преобразуется к следующему виду: требуется найти минимум функции

$$\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\alpha\beta\in\{q_k\}} C_{tr,k}^{\alpha\beta}\cdot\left(\sum_{ij\in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n} C_{load}^{\alpha}\cdot\left(\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n}\sum_{ij\in S}(u_{ij,k}^{\alpha\beta}+u_{ij,k}^{\beta\alpha})\right) \tag{9}$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n} u_{ij,k}^{\alpha\beta}-\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n} u_{ij,k}^{\beta\alpha}=\begin{cases}\tilde{a}_{ij} \text{ при } i=\alpha,\\ 0 \text{ при } i\neq\alpha, j\neq\alpha,\\ -\tilde{a}_{ij} \text{ при } j=\alpha, \text{для } \alpha=\overline{1,n}, ij\in S,\end{cases} \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n}\sum_{ij\in S}(u_{ij,k}^{\alpha\beta}+u_{ij,k}^{\beta\alpha})-\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq\alpha}}^{n}(\tilde{a}_{\alpha j}+\tilde{a}_{j\alpha})\leq 2b_{\alpha},\ \alpha=\overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{ij\in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta}\leq W_{\alpha\beta}^{k}\ \forall\,\alpha\beta\in\{q_k\}, k=\overline{1,Q}, \tag{12}$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta}\geq 0 \text{ - целые числа}, \tag{13}$$

и ограничениях на время доставки мелкопартионных корреспонденций получателю $t_{ij}\leq T_{ij}$, $ij\in S$.

Дополнительные ограничения (8) запишутся в виде

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta}=\begin{cases}\tilde{a}_{ij}, \text{если поток проходит по дуге } \alpha\beta\in\{q_k\},\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases} \tag{14}$$

Задача (9)-(13) максимально содержит до $n(n^2-n)+n+Q(n^2-n)+$ $+Q(n^2-n)^2=Q(n^2-n)[(n^2-n)+1]+n(n^2-n)+n$ ограничений (10) + (11) + (12) + (13) и до $Q(n^2-n)^2$ переменных. Нетрудно видеть, что ограничения (10) можно записать в виде $\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n}\sum_{ij\in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta}-\sum_{\substack{m=1,\\ m\neq\alpha}}^{n}\tilde{a}_{\alpha m}=\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n}\sum_{ij\in S} u_{ij,k}^{\beta\alpha}-\sum_{\substack{m=1,\\ m\neq\alpha}}^{n}\tilde{a}_{m\alpha}$, $\alpha=\overline{1,n}$, а для ограничений (11) упростить запись: $\sum_{k=1}^{Q}\sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\neq\alpha}}^{n}\sum_{ij\in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta}-\sum_{\substack{m=1,\\ m\neq\alpha}}^{n}\tilde{a}_{\alpha m}\leq b_{\alpha}$, $\alpha=\overline{1,n}$. Тогда максимальное количество ограничений задачи сократится до $Q(n^2-n)[(n^2-n)+1]+2n$.

Сведем задачу с тарифами (9)-(13) в целочисленную задачу линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями, когда в качестве матрицы коэффициентов ограничений выступает матрица инциденций узлы-дуги ориентированного графа. Для этого рассмотрим расширенную сеть $\widetilde{G}(\widetilde{N},\widetilde{P})$, в которой каждый узел сети G заменен двумя – левым и правым, причем каждая пара узлов «левый - правый» в сети $\widetilde{G}$ имеют номера i и $i+n$, где i – номер узла в сети G (рис. 1). Все дуги, входящие в узел сети G, заменяются на дуги, входящие в левый узел сети $\widetilde{G}$; дуги, выходящие из узла сети G, заменяются на дуги, выходящие из правого узла сети $\widetilde{G}$.

Каждый левый и правый узлы сети $\widetilde{G}$, соединяются фиктивной дугой, стоимость транспортировки единицы потока по которой является стоимостью обработки единицы потока в расщепленном узле. На сети $\widetilde{G}$ в качестве источников потоков выступают левые узлы, а в качестве стоков – правые. Пусть $\widetilde{n}=n+n$ – число узлов расширенной сети, $\widetilde{l}\le Q(n^2-n)+n$ – число ее дуг.

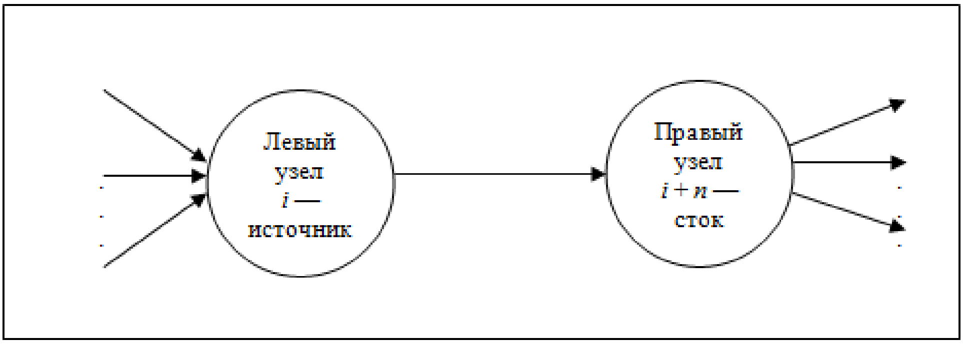

Рисунок 1 – Фрагмент расширенной сети $\widetilde{G}$

Для формулировки задачи определим следующие матрицы и векторы. Составим матрицу инциденций $E=\| e_{ij} \|_{\widetilde{n}\times\widetilde{l}}$ узлы-дуги для расширенной сети таким образом, чтобы первые n ее строк соответствовали номерам узлов источников (левым узлам), а первые n столбцов – фиктивным дугам. Остальные n строк матрицы E соответствуют узлам-стокам (правым узлам), а $\widetilde{l}-n$ столбцов – заданным дугам. Матрица E имеет вид, показанный на рис. 2. Эту матрицу будем использовать для записи условий сохранения потоков в узлах сети. Элементы матрицы

$$e_{ij}=\begin{cases} 1, \text{если дуга } j \text{ направлена к узлу } i, \\ -1, \text{если дуга } j \text{ направлена от узла } i, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $V^i = (v_1^i, v_2^i, ..., v_{\widetilde{n}}^i)^T$ – векторы-столбцы потребностей узлов в потоках $\widetilde{a}_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, исходящих из узлов $i = \overline{1,n}$, где знак «^{T}» означает транспонирование, а

$$v_\xi^i = \begin{cases} -\sum_{m=1}^{n} \widetilde{a}_{im}, \text{если } \xi = i, \\ \widetilde{a}_{ij}, \text{если } \xi = j + n, \\ 0 \text{ в противном случае}, \\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, \xi = \overline{1,\widetilde{n}}. \end{cases}$$

Введем переменные $X^i = \| x_\mu^i \|_{\widetilde{l}}^T$ – векторы-столбцы неизвестных потоков $x_1^i, x_2^i, ..., x_{\widetilde{l}}^i$ по дугам сети от исходящих потоков из узлов i, $i = \overline{1,n}$. Тогда условия сохранения потоков для всех потоков, исходящих из узла i, запишутся в виде $E[\widetilde{n}, \widetilde{l}\,]X^i[\widetilde{l}\,] = V^i[\widetilde{n}]$, $i = \overline{1,n}$.

Для записи ограничений на пропускные способности узлов и дуг сети определим векторы-столбцы $B = \| b_i \|_{\widetilde{l}}^T$ и $F = \| f_i \|_{\widetilde{l}}^T$, где b_i и f_i, $i = \overline{1,\widetilde{l}}$ – суть целые неотрицательные числа. В векторе B первые n элементов содержат значения ограничений на обработку транзитных потоков в узлах сети, а в остальных $\widetilde{l} - n$ элементах записаны значения ограничений на провозные возможности транспортных предприятий. Вектор F формируется следующим образом: $F = (\sum_{j=1}^{n} (\widetilde{a}_{1j} + \widetilde{a}_{j1}), ..., \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{a}_{nj} + \widetilde{a}_{jn}), 0, ..., 0)^T$ и содержит n первых ненулевых значений и $\widetilde{l} - n$ нулей с позиции $n+1$.

Дуги		1	…	…	n	$n+1$	…	$\widetilde{l}$
Узлы источники	1	-1	0	…	0	{1,0}	…	{1,0}
	…	0	-1	…	0	{1,0}	…	{1,0}
	…	0	…	-1	0	{1,0}	…	{1,0}
	n	0	…	0	-1	{1,0}	…	{1,0}
Узлы стоки	$n+1$	1	0	…	0	{-1,0}	…	{-1,0}
	…	0	1	…	0	{-1,0}	…	{-1,0}
	…	0	…	1	0	{-1,0}	…	{-1,0}
	$2n$	0	…	0	1	{-1,0}	…	{-1,0}

Рисунок 2 – Структура матрицы инциденций. В каждом столбце матрицы имеется только два ненулевых элемента с противоположными знаками, а фигурные скобки означают, что элемент матрицы может принимать только одно из двух значений

Пусть $C^i = \| c_j^i \|_{\tilde{l}}$, $i = \overline{1,n}$ – векторы-строки, в которых первые n элементов $c_1^i, \dots, c_n^i$ определяют тарифы на обработку единицы потока в узлах сети с номерами $1, \dots, n$, а остальные элементы $c_{n+1}^i, \dots, c_{\tilde{l}}^i$ определяют тарифы на транспортировку единицы потока по дугам с номерами от $n+1$ до $\tilde{l}$. Без потери общности предположим, что тарифы на транспортировку одного транспортного блока не зависят от источника потока (все потоки однородны, т.е. все транспортные блоки имеют одинаковый размер) и для данного транспортного предприятия k, $k = \overline{1,Q}$ определяются только узлом отправления i и узлом назначения j. Примем $C^i = C$, $i = \overline{1,n}$ и будем формировать только одну вектор-строку тарифов. Тарифы на обработку одного транспортного блока не связаны с транспортными предприятиями и могут отличаться для разных типов узлов сети.

Окончательно сформулированная задача примет вид:

найти

$$\min C[\tilde{l}\,] \cdot \sum_{i=1}^{n} X^i[\tilde{l}\,] \tag{15}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} X^i[\tilde{l}\,] - F[\tilde{l}\,] \le B[\tilde{l}\,], \tag{16}$$

$$E[\tilde{n}, \tilde{l}\,] X^i[\tilde{l}\,] = V^i[\tilde{n}],\ i = \overline{1,n}, \tag{17}$$

$$X^i[\tilde{l}\,] \ge 0, i = \overline{1,n} \text{ и целые }, \tag{18}$$

и дополнительных ограничениях на время доставки мелкопартионных корреспонденций получателю

$$t_{ij} \le T_{ij},\ \forall\, ij \in S, \tag{19}$$

и на запрет разветвления потоков

$$x_\mu^i = \begin{cases} \sum_{ij} \tilde{a}_{ij}, \text{где суммируются потоки из } i \text{ в } j,\ j = \overline{1,n}, \\ \text{которые проходят по дуге } \mu,\ i = \overline{1,n}, \mu = \overline{1,\tilde{l}}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{20}$$

Задача (15)-(18) содержит $2n+1$ векторных ограничений и до $(Q(n^2-n)+n)\cdot n$ переменных. Векторно-матричная запись задачи позволяет использовать программно-аппаратную архитектуру CUDA (Compute Unified Device Architecture) параллельных вычислений на графических процессорах GPU (Graphics Processing Unit) и значительно (в перспективе в десятки и сотни раз) сократить время ее решения [10]. Задача (15)-(18) по сравнению с задачей (9)-(13) максимально содержит до $n+Q(n^2-n)$ + $n(n+Q(n^2-n))$ + $n(n+Q(n^2-n))$ = $= Q(n^2-n)(2n+1)+2n^2+n$ << $Q(n^2-n)[(n^2-n)+1]+2n$ невекторных ограничений (16) + (17) + (18). Так, например, при Q = 10 и n = 100 в задаче (9)-(13) может быть до 9801000000 ~ 10x10^9 переменных и до 980199200 ~ 1x10^9 ограничений, а в задаче (15)-(18) – до 9910000 ~ 10x10^6 переменных и до 19919100 ~ 20x10^6 ограничений.

Известно, что обе задачи (9)-(13) и (15)-(18) являются NP-трудными, так как их соответствующие задачи распознавания NP-полные [11, 12]. Покажем, что любая индивидуальная задача (9)-(13) может быть преобразована в индивидуальную задачу (15)-(18) за полиномиальное время. Для этого приведем один из возможных способов формирования по входным данным задачи (9)-(13) матрицы инциденций $E[\tilde{n},\tilde{l}\,]$, векторов сохранения потоков $V^i[\tilde{n}]$, $i=\overline{1,n}$, вектора тарифов C и векторов $F[\tilde{l}\,]$ и $B[\tilde{l}\,]$ для записи ограничений (16).

Пусть $A=\| a_{ij} \|_{n\times n}$ и трехмерная $D=\| d_{ijk} \|_{n\times n\times Q}$ – целочисленные матрицы потоков и тарифов Q предприятий. Подматрица $D=\| d_{ijk} \|_{n\times n\times 1}$ на главной диагонали содержит тарифы на обработку единицы потока в соответствующем узле, главные диагонали подматриц для $k=2,3,\ldots,Q$ содержат нули. Все остальные элементы d_{ijk} матрицы D содержат тарифы на транспортировку единицы потока из i в j предприятия k, $i,j=\overline{1,n}$, $i\neq j$, $k=\overline{1,Q}$. Если предприятие k не оказывает услуги по транспортировке из i в j, то $d_{ijk}=0$, а соответствующая дуга из i в j для предприятия k отсутствует. Задана также трехмерная целочисленная матрица $W=\| w_{ijk} \|_{n\times n\times Q}$ провозных возможностей Q предприятий в тех же единицах измерения потока – транспортных блоках. Подматрица $W=\| w_{ijk} \|_{n\times n\times 1}$ на главной диагонали содержит заданные значения ограничений на пропускные способности узлов по обработке транзитных потоков, главные диагонали подматриц для $k=2,3,\ldots,Q$ содержат нули. Остальные элементы w_{ijk} матрицы W содержат заданные значения ограничений на провозные возможности предприятий из i в j, $i,j=\overline{1,n}$, $i\neq j$, $k=\overline{1,Q}$. Все ненулевые и нулевые элементы матрицы W строго соответствуют ненулевым и нулевым элементам матрицы D и наоборот. Таким образом, матрицы D и W полностью определяют структуру ориентированной мультисети $G(N,P)$ с $|N| = n$ узлами и $|P| = l \le Q(n^2 - n)$ дугами.

Приведем алгоритм формирования входных данных для индивидуальной задачи (15)-(18).

Алгоритм 1. Формирование $E[\widetilde{n},\widetilde{l}\,]$, $V^i[\widetilde{n}]$, $i = \overline{1,n}$, C, $F[\widetilde{l}\,]$, $B[\widetilde{l}\,]$.

1. $E \leftarrow 0$; $V \leftarrow 0$; $F \leftarrow 0$; $l \leftarrow 0$.
2. Для $\{\, i \mid i = \overline{1,n}\,\}$ выполнить пп. 3-17.
3. $s \leftarrow 0$.
4. Для $\{\, j \mid j = \overline{1,n}\,\}$ выполнить пп. 5-16.
5. $f_i \leftarrow f_i + a_{ij} + a_{ji}$.
6. Если $i \ne j$, то перейти к п. 7, иначе перейти к п. 12.
7. $v_{j+n,i} \leftarrow a_{ij}$.
8. Для $\{\, k \mid k = \overline{1,Q}\,\}$ выполнить пп. 9-11 .
9. Если $d_{jik} \ne 0$, то перейти к п. 10, иначе перейти к п. 11.
10. $l \leftarrow l+1$; $e_{i,n+l} \leftarrow 1$; $e_{j+n,n+l} \leftarrow -1$; $c_{n+l} \leftarrow d_{jik}$; $b_{n+l} \leftarrow w_{jik}$.
11. Перейти к п. 8. *** Конец цикла по k
12. Для $\{\, m \mid m = \overline{1,n}\,\}$ выполнить пп. 13-14 .
13. $s \leftarrow s + a_{im}$.
14. Перейти к п. 12. *** Конец цикла по m
15. $v_{i,i} \leftarrow -s$; $e_{i,j} \leftarrow -1$; $e_{i+n,j} \leftarrow 1$; $c_i \leftarrow d_{ij1}$; $b_i \leftarrow w_{ij1}$.
16. Перейти к п. 4. *** Конец цикла по j
17. Перейти к п. 2. *** Конец цикла по i
18. Конец алгоритма.

В записи алгоритма векторы $V^i[\widetilde{n}]$, $i = \overline{1,n}$ представлены матрицей $V = \| v_{ij} \|_{\widetilde{n}\times n}$, знак $\leftarrow$ означает операцию присваивания, а знаком *** отделяются комментарии.

Из алгоритма видно, что временная сложность преобразования любой индивидуальной задачи (9)-(13) в индивидуальную задачу (15)-(18) составляет в худшем случае $O[n((n-1)Q+n)] = O[(Q+1)n^2 - Qn]$.

Сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема. Любая индивидуальная задача вида (9)-(13) может быть за полиномиальное время $O[(Q+1)n^2 - Qn]$ преобразована в индивидуальную задачу целочисленного линейного программирования вида (15)-(18).

Доказательство теоремы непосредственно следует из корректности работы алгоритма 1 преобразования входных данных экземпляра задачи (9)-(13) во входные данные задачи (15)-(18).

Следствие. Если существует допустимое (не обязательно оптимальное) решение исходной задачи (9)-(13), то оно совпадает с решением преобразованной задачи (15)-(18).

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы и определить направления дальнейших исследований задач распределения потоков в многопродуктовых коммуникационных сетях.

Выводы

Общая задача распределения потоков с нелинейными функциями затрат и построением маршрутов транспортировки потоков может быть сведена к решению некоторой совокупности линейных многомерных задач о ранце со связывающими ограничениями. Для решения задачи могут быть использованы предложенные авторами эвристические методы и алгоритмы.

При формулировке задачи с заданными тарифами на дугах и в узлах она может быть за полиномиальное время преобразована к задаче целочисленного линейного программирования. В этом случае при учете ограничений на время доставки мелкопартионных корреспонденций получателю существующие методы и пакеты программ не могут быть непосредственно применены – требуется проведение дополнительных исследований по возможной их модификации и доработке с учетом новых ограничений.

Если ограничения на время доставки не являются критическими, то задачу с заданными тарифами на дугах и в узлах в виде задачи ЦЛП можно решать с применением известных методов и пакетов программ, однако для установления границ их эффективности и анализа получаемых решений необходимо проведение обширного вычислительного эксперимента на общедоступных серверах, таких как NEOS, GAMS и др. с программами Gurobi, Linear Program Solver, Simplex OPTIMA, CPLEX, MINTO и пр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Автоматизация процессов принятия решений в многопродуктовых коммуникационных сетях с мелкопартионными дискретными потоками // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць. – Київ, 2010. – Вип. 5. – С. 172–213.
2. Довгий С.О., Бідюк П.І., Трофимчук О.М. Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів. – К.: Логос, 2014. – 419 с.
3. Васянин В.А. Обобщенная задача упаковки и распределения мелкопартионных потоков в многопродуктовых иерархических сетях и ее последовательная декомпозиция // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць. – Київ, 2012. – Вип. 11. – С. 136–154.
4. Трофимчук А.Н., Васянин В.А. Моделирование упаковки, распределения и маршрутизации мелкопартионных потоков в многопродуктовой сети // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 4. – С. 132–146.
5. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Задача выбора иерархической структуры многопродуктовой коммуникационной сети с мелкопартионными дискретными

потоками // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць. – Київ, 2012. – Вип. 10. – С. 182–204.
6. Васянин В.А. Задача распределения и маршрутизации транспортных блоков со смешанными вложениями и ее декомпозиция // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 1. – С. 144–156.
7. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Кузьменко В.Н. Алгоритмы оптимизации упаковок мелкопартионных корреспонденций в коммуникационных сетях // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – Том 52. – № 2. – С. 93–106.
8. Васянин В.А. Справочная матрица слияния потоков в задачах оптимизации упаковок на многопродуктовых сетях // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2014. – № 3. – С. 42–49.
9. Васянин В.А., Ушакова Л.П. Структуры данных и процедуры редукции маршрутов в задачах распределения потоков в коммуникационных сетях // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць. – Київ, 2014. – Вип. 14. – С. 192–205.
10. http://www.nvidia.ru/, https://developer.nvidia.com/cuda-zone.
11. Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems // SIAM J: Comput. – 1976. – 5. – P. 691–703.
12. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

Стаття надійшла до редакції 16.05.2016