УДК 519.876.5:517.958:532

П.С. ВЕНГЕРСЬКИЙ, Г.А. ШИНКАРЕНКО

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ СУМІСНОГО РУХУ ПОВЕРХНЕВИХ І ПІДЗЕМНИХ ВОДНИХ ПОТОКІВ НА ВОДОЗБОРІ

Анотація. *Сформульовано варіаційну задачу сумісного потоку поверхневої і ґрунтової води та отримано умови контакту на спільній границі, виходячи із законів руху суцільного середовища. Побудовано і досліджено енергетичні рівняння варіаційної задачі.*
Ключові слова: *поверхневий потік, варіаційна задача, ґрунтова вода, умови інтерфейсу, енергетичні рівняння, закони руху суцільного середовища, стійкість рекурентної схеми.*

Вступ

Важливу роль у вивченні кругообігу води в природі відіграють гідрологічні системи. У загальному дослідження цілісності такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області, що бере участь в кругообігу води. Найвірогіднішим елементом частини території може виступати територія водозбору (рис. 1), яка характеризується подібними кліматичними умовами і знаходиться під впливом подібних факторів, що впливають на рух вологи.

Для спрощення опису руху водних потоків на водозборі проводиться вертикальна декомпозиція області задачі – вся область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху тощо.

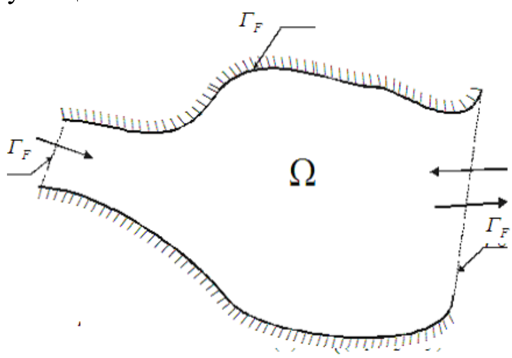

Рисунок 1 – Двомірна проекція території водозбору на площину X_1OX_2

У приземному шарі атмосфери відбуваються процеси випаровування, випадання дощу, снігу, перехоплювання опадів рослинністю, а також перенесення вологи повітряними потоками. На поверхні землі здійснюється русловий стік, стік в пойму ріки при розливі, схиловий стік, рух води в озерах та водоймах, а також накопичення снігу і його танення. У ненасиченій зоні здійснюються процеси фільтрації води, капілярного підйому і випаровування, вбирання води корінням рослин. У водоносних напірних горизонтах рух води відбувається між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія між потоком і вище та нижче розташованими водоносними шарами при наявності проникливого водопідпору. У кожному шарі для опису руху вологи використовуються моделі різної розмірності, і їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов [1, 3, 9, 13, 16].

Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий поверхневий шар $F(t)\in R^3$ (рис. 2) такої структури

$$\Omega_{\overline{F}}(t):\ \left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3,\quad \eta(x)<x_3<\nu(x,t)\quad \forall x=\ (x_1,x_2)\in\Omega(t)\right\}. \tag{1}$$

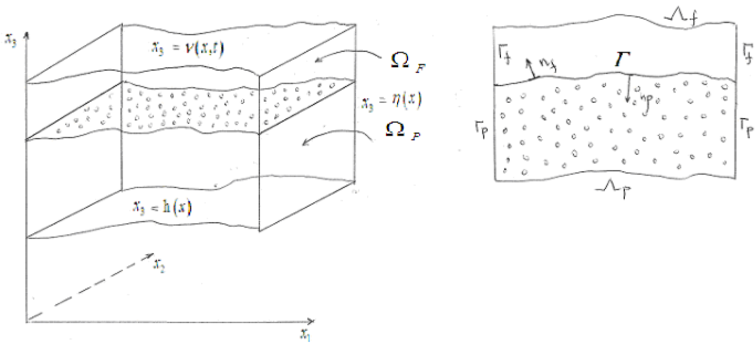

Рисунок 2 – Загальне зображення моделі потоків та їх поперечний розріз

Позначимо проекції його нижньої

$$\Omega(t):\quad \left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\ \ \middle|\ \ x_3\quad \eta(x),\ \forall x=\ (x_1,x_2)\in\Omega(t)\right\} \tag{2}$$

та верхньої

$$\Lambda_{\overline{F}}(t):\quad \left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\ \ \middle|\ \ x_3\quad \nu(x,t)\ \ \forall x=\ (x_1,x_2)\in\Omega(t)\right\} \tag{3}$$

основ на площину $0x_1x_2$. Решту поверхні цього шару

$$\Gamma_F(t):=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3,\quad \eta(x)<x_3<\nu(x,t)\quad \forall x=\ (x_1,x_2)\in\Omega(t)\right\} \tag{4}$$

будемо називати бічною поверхнею шару $F(t)$.

Аналогічно позначимо частину рідини, яка рухається в ґрунті, так

$$\Omega_{\overline{P}}(t):\ \left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3,\quad \mathrm{h}(x)<x_3<\eta(x),\quad \forall x=\ (x_1,x_2)\in\Omega(t)\right\}, \tag{5}$$

проекція нижньої частини (поверхня водопідпору) запишеться

$$\Lambda_{\overline{P}}(t):\quad \left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\ \ \middle|\ \ x_3\quad h(x),\ \forall x=\ (x_1,x_2)\in\Omega(t)\right\}. \tag{6}$$

Тоді, шар ґрунтової води

$$\Gamma_P(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \mathrm{h}(x) < x_3 < \eta(x) \quad \forall x \in \Gamma_P(t) \right\}. \tag{7}$$

1. Початково-крайова задача взаємодії водних потоків

Сформулюємо початково-крайову задачу з врахуванням крайових та початкових умов [1–3].

$$\begin{cases} \textit{Знайти невідомі величини } \{u, p, \varphi\} \textit{ такі, що} \\ \textit{задовольняють наступну систему рівнянь:} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho \; u_i u_k) - \rho \;\; f_i - \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, & (8) \\ \sigma_{ij} = -p_F \delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} = 2\mu \;\; e_{ij}, i, j = 1,2,3 \\ e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial (\rho \;\; u_k)}{\partial x_k} = 0, \qquad \textit{в} \qquad \Omega_F \times (0, T], & (9) \\ m \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(k \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \quad \textit{в} \quad \Omega_P \times (0; T], & (10) \end{cases}$$

де:

$\{u_i(x,t)\}^3_{i=1}$ та $p_F = p_F(x,t)$ – шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно;

$F = \{g \; f_i(x)\}_{i=1}^3$ – масові сили;

$\rho = \rho(x,t) > 0$ – густина маси води потоку;

$\mu = \mu(x) > 0$ – коефіцієнт в'язкості;

$\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$ – тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці x на момент часу t;

δ_{ij} – символ Кронекера;

$k = k(x,t)$ – коефіцієнт фільтрації;

$m = m(x,t)$ – коефіцієнт питомої водовіддачі;

$\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ – відома функція джерел притоку води.

А також п'єзометричний напір представлений наступним чином:

$$\varphi = x_3 + \frac{p_p}{\rho g}. \tag{11}$$

Потік (розхід потоку води) через рівняння:

$$q = -k\nabla\varphi\ . \tag{12}$$

Крім того, позначимо:
$\upsilon = \upsilon(x,t)$ – вектор швидкості рідини в ґрунті;
$\upsilon = \dfrac{q}{\omega}$, ω – об'ємна пористість;
$\overrightarrow{n_F} = -\overrightarrow{n_P}$ – вектори нормалі до границі області Ω_F та Ω_P відповідно;

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_F} \cup \overline{\Omega_P}, \Omega_F \cap \Omega_P = \{\varnothing\}, \overline{\Omega_F} \cap \overline{\Omega_P} = \Gamma,$$
$$\partial\Omega_F = \Gamma_F \cup \Lambda_F \cup \Gamma; \partial\Omega_P = \Gamma_P \cup \Lambda_P \cup \Gamma.$$

Крайові умови представимо наступним чином:

$$\vec{u}_i = 0 \text{ на } \Gamma_F,\ i = 1, 2,3, \tag{13}$$

$$\sigma_{n\tau} = \sigma, \text{ на } \Lambda_F, \tag{14}$$

$$u_3 + R \quad \frac{\partial v}{\partial t} = + u_1^0 \frac{\partial v}{\partial x_1} + u_2^0 \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ в } \Omega_F \times (0, \mathrm{T}], \tag{15}$$

де
R – швидкість падіння капель дощу;
u_1^0, u_2^0 – горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні $v(x.t)(\Lambda_F)$.
А також:

$$\upsilon_\bullet \overrightarrow{n_P} = \hat{\upsilon} \quad на \quad \Gamma_P; \tag{16}$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \quad 0 \quad на \quad \Lambda_P, \tag{17}$$

$$\upsilon_3 = -I \quad на \quad \Lambda_P. \tag{18}$$

Враховуючи, що I – відома функція, яка описує швидкість потоку рідини через поверхню Λ_P.

Та наступні початкові умови:

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0, \\ p|_{t=0} &= p_0, \\ \varphi|_{t=0} &= \varphi_0, \end{aligned}\right. \quad \text{в } \Omega. \tag{19}$$

Наведене є початково-крайовою задачею руху поверхневих і ґрунтових потоків по поверхні водозбору із врахуванням крайових та початкових умов.

2. Варіаційне формулювання задачі взаємодії водних потоків

Щоб побудувати варіаційне формулювання початково-крайової задачі (8)–(19), спочатку введемо простір допустимих векторів швидкості

$$V := \left\{ \xi \quad \{\xi_i\}_{i=1}^{3} \in H^1(\Omega_F)^3 \mid \xi \cdot n_F \,|_{\Gamma_F} = 0 \right\}.$$

Тепер домножимо рівняння руху (8) на довільну функцію $\xi \in V$ і результат проінтегруємо по області Ω_F з використанням інтегрування частинами

$$\int_{\Omega_F} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3} \rho\, u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_{\Omega_F} \rho\, f_i \xi_i ds + \int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds$$
$$- \int_{\partial\Omega_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \overline{\sigma_{ik}}(u, p_F) \overline{n}_{F_k} d\gamma \quad 0, i \quad \overline{1,3} \tag{20}$$

Далі перейдемо до рівняння нерозривності (9). Домножимо це рівняння на $\theta \in Q$, де $Q = L^2(F)$. Проінтегрувавши його, будемо мати

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta\, ds + \int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \theta\, ds = 0. \tag{21}$$

Якщо водний потік є нестисливим, то густина ρ є постійна по часу і отримаємо

$$\int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \theta\, ds = \int_{\Omega_F} div\ u\ \theta\, ds. \tag{22}$$

Перейдемо до інтегралу по границі області F, будемо мати

$$\int_{\partial\Omega_F} u . n_F \theta d\gamma - \int_F u . \nabla\theta ds = 0. \tag{23}$$

Розпишемо значення інтегралу в (23) через складові границі області Ω_F

$$\int_{\partial\Omega_F} u . n_F \theta d\gamma = \int_{\Gamma_F} u . n_F \theta d\gamma + \int_{\Gamma} u . n_F \theta d\gamma + \int_{\Lambda_F} u . n_F \theta d\gamma. \tag{24}$$

Враховуючи те, що нормальні складові вектора швидкості на границі водозбору рівні нулю і кінематичну умову (15), вираз (24) перепишемо наступним чином:

$$\int_{\Gamma} u.n_F \theta d\gamma + \int_{\Lambda_F} u_n^0 \ \theta d\gamma - \int_{\partial\Omega_F} u.\nabla\theta ds = 0 \qquad (25)$$

Введемо простір:

$$W := \left\{ \ \psi \in H^1(\Omega_P) \,|\, \psi\,|_{\Gamma_p \cup \Omega_p} = 0 \right\}. \qquad (26)$$

Домножимо це рівняння на $\frac{\rho\, g\psi}{\omega}$ і проінтегруємо по області $\partial\Omega_P$, і отримаємо

$$\int_{\Omega_P} m \frac{\rho\ g}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \psi\, dp = \int_{\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (k \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) \frac{\rho\ g}{\omega} \psi\, dp + \int_{\Omega_P} \frac{\varepsilon\ \rho\ g}{\omega} \psi\, dp \qquad (27)$$

Використаємо крайові умови в правій частині, для цього перейдемо до інтегрування по границі

$$\int_{\Omega_P} m\frac{\rho\, g}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\psi\, dp - \int_{\partial\Omega_P} \frac{k(x,t)}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}\rho g\psi d\gamma + \int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi\rho g)dp - \\ -\int_{\Omega_P}\frac{\varepsilon(x,t)\rho\, g\psi}{\omega}dp = 0 \quad , \qquad (28)$$

додамо вирази (22) та (27):

$$\sum_{i=1}^{3}[\ \int_{\Omega_F} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}\xi_i ds + \int_{\Omega_F} \sum_{i\ 1}^{3} \rho\, u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\xi_i ds - \int_{\Omega_F} \rho\ f_i \xi_i ds\ + \int_{\Omega_F} \sum_{k\ 1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds \\ - \int_{\partial\Omega_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\ d\gamma\ \ ] + \\ \int_{\Omega_P} m \frac{\rho\ g}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\psi dp - \int_{\partial\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{n}_P}\rho g\psi d\gamma + \int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi\rho g)dp - \\ -\int_{\Omega_P}\frac{\varepsilon(x,t)\rho\ g\psi}{\omega}dp = 0 \qquad (29)$$

Розглянемо інтеграли на границях областей Ω_F і Ω_P:

$$-\int_{\partial\Omega_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\ d\gamma - \int_{\partial\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n_P} \rho g\psi\, d\gamma\ ,$$

та розкладемо їх по складових границі областей Ω_F і Ω_P:

$$-\int_{\Lambda_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma - \int_{\Gamma_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma$$
$$-\int_{\Gamma} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma - \int_{\Lambda_P} \sum_{j=1}^{3} k(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P} \frac{\rho g \psi}{\omega} d\gamma - \tag{30}$$
$$-\int_{\Gamma_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n_P} \rho g \psi\, d\gamma - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n_P} \rho g \psi\, d\gamma$$

Якщо область Ω є територією водозбору, то інтеграли на Γ_F будуть рівні нулю, так як на границі Ω вода стікає тільки всередину області.

Якщо вважати, що область Ω_P обмежена знизу поверхнею непроникливого шару (водопідпором) і частини до цієї поверхні не прилипають, то інтеграл по Λ_P буде також рівний нулю.

Проаналізуємо інтеграли на спільній границі Γ:

$$-\int_{\Gamma} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma - \int_{\Gamma} k \frac{\partial \varphi}{\partial n_p} \psi \frac{\rho g}{\omega} d\gamma = \tag{31}$$
$$= -\int_{\Gamma} (\xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma + k \frac{\partial \varphi}{\partial n_p} \psi \frac{\rho g}{\omega}) d\gamma =$$
$$= -\int_{\Gamma} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma - \int_{\Gamma} \frac{k}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n_p} \psi \rho g\, d\gamma.$$

З означення тензора напружень будемо мати

$$\sigma_{ij} = -p\, \delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$

тоді

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}(u, p_F) &= \left[(-p_F \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}).\bar{n}_{F_i}\right].\bar{n}_{F_i} = \\ &= (-p_F \delta_{in} + 2\mu e_{in}).\bar{n}_{F_i} = \\ &= -p_F + 2\mu \nabla.u \end{aligned} ; \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau n}(u, p_F) &= \left[(-p\, \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}).\bar{n}_{F_i}\right].\tau_i = \\ &= \left[-p\, \delta_{in} + 2\mu e_{in}\right].\tau_i = \\ &= 2\mu \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i}).\tau_i = \\ &= \mu(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau}) = \tau_{n\tau}(u). \end{aligned} \tag{33}$$

Враховуючи умову нерозривності (22), вираз (31) запишеться

$$-\int_{\Gamma}(\xi_n p_F + \xi_\tau \tau_{\tau n} + k\frac{\nabla\varphi.n_P}{\omega}\psi\rho g)d\gamma \ . \qquad (34)$$

Враховуючи суцільність середовища, з (34) запишемо умови поведінки потоків води на спільній границі Г, як:

$$\begin{gathered}\sigma_{nn}(u,p_F)=p_p\,,\\ \sigma_{\tau n}=0\,,\\ u_n=-\upsilon_n\ .\end{gathered} \qquad (35)$$

Проаналізуємо перший доданок у виразі (30), отримаємо:

$$\begin{gathered}-\int_{\Lambda_F}\xi_i\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(u,p_F)n_{F_k}\,d\gamma=\\ -\int_{\Lambda_F}(\xi_n\sigma_{nn}+\xi_\tau\sigma_{\tau n})d\gamma\end{gathered} \qquad (36)$$

Так як на поверхні потоку тиск рівний атмосферному тиску p_a, то

$$\sigma_{nn}(u,p_F)=p_a.$$

Також відомо, що складові напружень тертя на вільній поверхні потоку часто зумовлені дією вітру, і з [6] візьмемо, що вони пропорційні квадрату швидкості потоку:

$$\overline{\tau}_{in}=\chi\frac{\rho_a}{\rho}\upsilon_a^2\cos\psi, i=1,2\ ;$$

де

ρ_a – густина повітря;

χ – емпіричний коефіцієнт напружень;

υ_a – швидкість вітру.

Спростимо доданки у виразі (29), які містять напруження:

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(u,p_F)\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}ds\,. \qquad (37)$$

Розкладемо елементи вектора ξ через компоненти тензорів деформацій і поворотів

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) = e_{ik}(\xi) + \omega_{ik}(\xi).$$

Через те, що $\omega_{ik}(\xi)_{i,k=1}^{3}$ утворюють кососиметричну матрицю, то вираз (37) перепишеться:

$$\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_P) e_{ik}(\xi) ds .$$

Оскільки $\sigma_{ik} = -p_s \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}(u)$, тоді

$$\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} (-p_s \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}(u)) e_{ik}(\xi) ds = -\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_F \delta_{ik} e_{ik}(\xi) ds +$$

$$+\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} 2\mu e_{ik}(u) e_{ik}(\xi) ds = -\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3} p_F e_{ii}(\xi) ds +$$

$$\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} 2\mu e_{ik}(u) e_{ik}(\xi) ds = -\int_{\Omega_F} p_F \, div\xi \, ds + \int_{\Omega_F} 2\mu e(u) : e(\xi) ds .$$

Спростимо інтеграл по області Ω_p

$$\int_{\Omega_p} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi \rho \, g) dp .$$

Допустимо, $\varphi \in H^1(\Omega_P), div\nabla\varphi \in L^2(\Omega_P)$, то в цьому випадку має місце формула Гріна:

$$\int_{\Omega_p} \frac{k(x,t)}{\omega} \nabla\varphi \cdot \nabla(\psi\rho \, g) \, dp = \int_{\partial\Omega_p} \frac{k(x,t)\cdot\nabla\varphi}{\omega} \cdot \overline{n}_p \rho \, g \psi d\gamma - \tag{38}$$

$$-\int_{\Omega_p} div\left(\frac{k(x,t)\cdot\nabla\varphi}{\omega}\right) \rho \, g \psi dp .$$

А з наведеного вище випливає, що на границі Γ_P може бути задано швидкість потоку ґрунтової води наступним чином:

$$-\frac{k(x,t)\nabla\varphi}{\omega} \cdot \overline{n}_p = \hat{\upsilon} . \tag{39}$$

Тоді (39) запишеться

$$\int_{\partial\Omega_p} \hat{\upsilon}\rho\, g\psi\, d\gamma - \int_{\Omega_p} div\left(\frac{k(x,t)\cdot\nabla\varphi}{\omega}\right)\rho\, g\psi dp = \int_{\Gamma_p} \upsilon\, \rho\, g\psi d\gamma +$$

$$+\int_{\Lambda_p} \upsilon_n \rho\, g\psi d\gamma + \int_{\Gamma} \upsilon_n \rho\, g\psi d\gamma - \int_{\Omega_p} div\, \upsilon\, \rho\, g\psi dp.$$

Введемо такі білінійні форми:

$$M_V(r;w,q) = \int_V \sum_{i=1}^{3} r w_i q_i ds,\; N_V(w;u,q) = \int_V \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \rho w_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_i ds,$$

$$C_V(w,q) = \int_V 2\mu\, e(w):e(q)ds,\;\; A_V(w,q) = -\int_V w\, divq ds,$$

$$Y_V(w,q) = -\int_V w\, q_n d\gamma,\; B_V(p,w) = -\int_V \sum_{i=1}^{3} p\, .\nabla w ds.$$

Введемо наступні лінійні функціонали:

$$l_j : W \to R, j = \overline{1,3}\;,\; W := H_F \times L_F \times H_P,$$

$$H_F := \left\{\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{3} \in H^1(\Omega_F)^3 \mid \xi\cdot n_F\, |_{\Gamma_F} = 0\right\}, L_F := \left\{\theta \in L^2(F) \mid \theta|_{\Gamma_F} = 0\right\},$$

$$H_P := \left\{\; \psi \in H^1(\Omega_P) \mid \psi\, |_{\Gamma_p \cup \Omega_p} = 0\right\}, \left\langle l_1,\xi\right\rangle = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_F} \rho f_i \xi_i ds + \int_{\Lambda_F} (\xi_n p_a + \xi_\tau \cdot \hat{\sigma})d\gamma$$

$$\left\langle l_2,\theta\right\rangle = -\int_{\partial\Lambda_F} u_n^0\, \theta\, d\gamma\,,\;\; \left\langle l_3,\psi\right\rangle = \int_{\Omega_p} \frac{\varepsilon(x,t)\rho g\psi}{\omega} dp - \int_{\partial\Lambda_p} \hat{\upsilon}\, \psi\, \rho g d\gamma$$

Позначимо

$$\tilde{\psi} = \psi\; \rho\; g\,, \tilde{m} = \frac{m}{\omega}\;,$$

тоді запишемо наступну варіаційну задачу:

$$\begin{aligned} &\text{Знайти}\;\; \{u,p,\varphi\} \in V\times Q\times W,\\ &M_F(\rho;u',\xi) + N_F(u;u,\xi) + A_F(p,\xi) + C_F(u,\xi)\\ &+Y_\Gamma(u,\xi) = \left\langle \varphi_1,\xi\right\rangle, \forall \xi \in V. \end{aligned} \tag{40}$$

$$B_F(u,\theta) + Y_\Gamma(\theta,u) = \left\langle \varphi_2,\theta\right\rangle, \forall \theta \in Q\,. \tag{41}$$

$$M_P(\tilde{m};\varphi',\tilde{\psi}) + A_P(\tilde{\psi},\upsilon) + Y_\Gamma(\tilde{\psi},\upsilon) = \left\langle \varphi_3,\tilde{\psi}\right\rangle, \forall \tilde{\psi} \in W\,, \tag{42}$$

з початковими умовами:

$$M_F(u'(0)-u_0,\xi)=0, \tag{43}$$

$$B_F(p(0)\text{ - }p_0,\theta)=0; \tag{44}$$

$$M_P(\varphi'(0)-\varphi_0,\tilde{\psi})=0. \tag{45}$$

Обчислюємо, враховуючи початкові умови (43)–(45) та крайову умову (13)–(18), значення змінних *u* та *p* зі співвідношень (41) та (42). Далі з умов спряження (36) та крайової умови (15) обчислюємо з (43) значення змінної φ.

3. Властивості складників і норми варіаційної задачі взаємодії водних потоків

Необхідно зауважити, що трилінійна форма

$$N_v(w;u,q)=\int_v \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho w_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_i ds, \tag{46}$$

є неперервною, а білінійна форма

$$C_v(w,q)=\int_v 2\ \ \mu\ \ e(w):e(q)\,ds \tag{47}$$

неперервна і симетрична.

Вона є скалярним добутком в просторі H_F і утворює норму

$$\left\| w\ \right\|_{H_F}=\sqrt{C_v(w,w)}, \forall w\in H_F\ .$$

Далі запишемо для скалярної функції φ білінійну форму

$$D_v(\varphi,\psi)=\int_v k(x,t)\nabla\varphi\cdot\nabla\psi\ dp\ , \tag{48}$$

яка є неперервна і невід'ємна на просторі допустимих функцій H_P. Вона є також симетрична і утворює напівнорму:

$$\left|\varphi\right|_{H_P}=\sqrt{D_v(\varphi,\varphi)}, \forall\varphi\in H^1(\Omega_P)\ . \tag{49}$$

Розглянемо властивості білінійної форми

$$A_v(w,q)=\int_v div\ w\ div\ q\ ds. \tag{50}$$

У просторі H_F вона є неперервна, невід'ємна і симетрична, і також утворює норму

$$\|q\|_{H_F} = \sqrt{A_v(q,q)}, \forall q \in H_F. \tag{51}$$

4. Енергетичні рівняння сумісного стоку

Покладемо в рівнянні (22) $\xi = u$ і запишемо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} &M_{\Omega_F}(\rho; u', u) + N_{\Omega_F}(u; u, u) + C_{\Omega_F}(u,u) + A_{\Omega_F}(p,u) \\ &\quad = \langle \varphi_1, u \rangle - Y_\Gamma(u,u); \end{aligned} \tag{52}$$

а далі реалізуємо ряд математичних перетворень.

У роботах Темам Р. [12, 16] і в застосуваннях до задач термогідродинаміки Зубова В.М., Шинкаренка Г.А. [4-7] запропоновано наближення умови нестисливості наступним співвідношенням:

$$p\varepsilon + div\ u = 0, \text{ де } \varepsilon = const > 0.$$

Враховуючи зазначене, енергетичні рівняння сумісного потоку можна представити у вигляді доданків, що описують кінетичну енергію, потенціальну, а також дисипацію енергії поверхневого потоку. Умовно це може бути представлене наступним чином:

$K_{\Omega_F}\left[u(t)\right] = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2$ – кінетична енергія,

$P_{\Omega_F}\left[u(t)\right] = \int_0^t \|u(\mathrm{t})\|_w^2 dt$ – потенціальна енергія,

$D_{\Omega_F}\left[u(t)\right] = \frac{1}{2}\int_0^t \|u(t)\|_W^2 dt$ – дисипація енергії поверхневого потоку.

Розглядаючи рівняння для ґрунтового потоку (29) та використовуючи означення норм, означене співвідношення можна навести як порівняння кінетичної енергії та потенціальної енергії ґрунтового потоку:

$$\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\varphi(t)\|_W^2 dt = \frac{1}{2}\|\varphi'(0)\|^2 + \int_0^t < l_2, \varphi > dt. \tag{53}$$

Його можна записати у вигляді:

$$K_{\Omega_P}\left[\varphi(t)\right]+P_{\Omega_P}\left[\varphi(t)\right]=K_{\Omega_P}\left[\varphi(0)\right]+\int_0^t<l_2,\varphi>dt,$$

де

$K_{\Omega_P}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{2}\left\|\varphi(t)\right\|^2$ – кінетична енергія,

$P_{\Omega_P}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{2}\int_0^t\left\|\varphi(t)\right\|_W^2dt$ – потенціальна енергія ґрунтового потоку.

Таким чином, було проаналізовано енергетичні рівняння поверхневого і ґрунтового потоків, показано, які з складників цих рівнянь відповідають за основні види енергії.

5. Висновки

На підставі законів збереження виведено основні рівняння та крайові і початкові умови, що описують сумісний рух потоків поверхневої і ґрунтової води з невідомими величинами вектора швидкості та п'єзометричного напору. Сформульовано варіаційну задачу сумісного потоку та отримано умови контакту на спільній границі, виходячи із законів руху суцільного середовища. Проаналізовано енергетичні норми основних складників варіаційної задачі. Побудовано і досліджено енергетичні рівняння руху поверхневих і ґрунтових потоків. Показано, що повна енергія сумісного потоку в початковий момент часу має скінченні значення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування задачі руху ґрунтової води в насиченій зоні. / Венгерський П.С., Демкович О.Р. // Восьма Всеукраїнська наукова конференція 25–27 вересня 2001 р. "Сучасні проблеми прикладної математики", Львів, 2001. – С. 19.
2. Венгерський П.С. Чисельне дослідження математичної моделі руху поверхневої і ґрунтової вологи / Венгерський П.С., Демкович О.Р., Трушевський В.М. // Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 2002. – С. 25.
3. Венгерський П.С. Математатичне моделювання руху грунтової води в насиченій зоні / Венгерський П.С., Демкович О.Р. // Дев'ята Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 2002. – С. 36.
4. Зубов В.Н. Решение задач термогидродинамики с наличием свободных поверхностей методом конечных элементов / Зубов В.Н. // Материалы 10-й конф. мол. ученых ИППМ АН УССР. – Львов, 1984. – Ч. 1. – С. 83–87. – Деп. в ВИНИТИ 10.11.84, № 7196.
5. Зубов В.Н. Численное исследование течений вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов / Зубов В.Н. // Дис. канд. фіз.-техн. наук: 01.01.07. – Львов, 1990. – 150 с.
6. Зубов В.Н. Сходимость метода регуляризации для краевой задачи с уравнениями Навье-Стокса / Зубов В.Н., Шинкаренко Г.А. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1987. – № 27. – С. 64–69.

7. Зубов В.Н. Применение метода штрафа для решения стационарных задач гидродинамики со смешанными краевыми условиями / Зубов В.Н., Шинкаренко Г.А. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1989. – № 31. – С. 81–84.
8. Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем с примерами из електроэнергетики. / Н.А. Картвелишвили, Ю.И. Галактионов. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
9. Корявов П.П. Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна. / Корявов П.П. // Вод.ресурсы, 1981, № 3 – С. 54–64.
10. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. / Кучмент Л.С. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1980. – 142 с.
11. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. / Полубаринова-Кочина П.Я. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
12. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. / Темам Р. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
13. Трофимчук А.Н. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. / Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. – К.: Наукова думка – 2003. – 232 с.
14. Шаманский В.Е. Численные решения задач фильтрации грунтових вод на ЭЦВМ. / Шаманский В.Е. – Киев: Наукова думка, 1969. – 369 с.
15. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. / Шинкаренко Г.А. – Київ: НМК ВО, 1991. – 87 с.
16. Lions P.-L. Models for the coupled atmosphere and ocean. / Lions P.-L., Temam R., and Wang S. // (CAO I,II). Comput. Mech. Adv., 1(1):120, 1993.

Стаття надійшла до редакції 27.10.16.