

УДК 532.526

І.М. ГОРБАНЬ, О.Г. ЛЕБІДЬ

## МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКОЇ ТЕЧІЇ ЗА НАХИЛЕНИМ АЕРОДИНАМІЧНИМ ПРОФІЛЕМ ПРИ НИЗЬКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

***Анотація.** Узагальнений вихровий метод, в якому рівняння динаміки рідини Нав'є-Стокса розв'язуються в змінних "завихореність-швидкість", розвинуто для моделювання в'язкої течії за аеродинамічним профілем. Виконані розрахунки динамічних характеристик симетричних профілів НАСА різної товщини при  $Re = 500$  в широкому діапазоні кутів атаки – від 0 до 60 градусів. Отримано, що при збільшенні кута атаки режим потоку в сліді профілю змінюється від стаціонарного до багатоперіодичного, що істотно впливає на динамічні характеристики системи. Показано, що тонший профіль має кращі аеродинамічні властивості, але вплив товщини є істотним лише в стаціонарному режимі.*

***Ключові слова:** в'язка течія, аеродинамічний профіль, кут атаки, число Рейнольдса, підймальна сила, сила опору.*

### Вступ

Інтерес до аеродинаміки низьких швидкостей виник у зв'язку з розвитком малої авіації, особливо безпілотних літальних апаратів (БЛА). На початку 2000-х років такі апарати функціонували при числах Рейнольдса ( $Re$ )  $O(10^4)$  [1]. Удосконалення обладнання для сканування, обробки та передачі інформації призвело до істотного зменшення розмірів БЛА, а відповідно, і чисел Рейнольдса, що характеризують їхній політ [2]. Крім того, що безпілотні літальні апарати мають відносно невеликі швидкості, при виконанні маневрів, особливо при посадці, вони рухаються на дуже великих кутах атаки, що супроводжується різкими змінами гідродинамічних навантажень, зокрема, падінням під'ємної сили. Тому, дослідження таких режимів польоту є вкрай важливими для подальшого вдосконалення технології БЛА. Інтерес до цієї проблеми викликаний також створенням вітроенергетичних установок з горизонтальними роторами у формі аеродинамічних профілів. Ці системи експлуатуються при значних нестационарних навантаженнях, зумовлених змінами напрямку і сили вітру. Тому, для попередження нештатних ситуацій на таких установках необхідні оцінки структури течії навколо крила і діючих на нього гідродинамічних сил в широкому діапазоні кутів атаки.

Очевидно, що аеродинаміка польоту при низьких числах Рейнольдса істотно відрізняється від режимів, на яких функціонують традиційні повітряні судна. Це зумовлено, в першу чергу, домінуванням в'язких ефектів навколо крила, таких як відрив граничного шару та інтенсивна вихрова взаємодія. Наслідком цих явищ є істотне підвищення опору крила, через що значно падає ефективність експлуатації крилової системи.

Розвиток технологій, що використовують крила на невеликих швидкостях і в широкому діапазоні кутів атаки, стимулював наукові дослідження щодо проблем нестационарної гідродинаміки крила при малих числах Рейнольдса. В більшості з них розглядаються біомеханічні аналогії крила, тобто, гнучкі або хлопаючі конфігурації [3–5]. Виявлено, зокрема, що при закритичних кутах атаки птахи і комахи досягають додаткової під'ємної сили завдяки генерації стійкої циркуляційної зони (leading vortex) в передній частині крила. Отримані результати дозволили підвищити ефективність експлуатації крилових профілів при нестационарних режимах обтікання.

Обтікання жорстких крил при низьких числах Рейнольдса досліджувалося, головним чином, на прикладі тонкої пластинки. В роботі [6] чисельно отримані картини вихрової течії і динамічні характеристики пластини в широкому діапазоні кутів атаки  $\alpha$  (до  $60^\circ$ ) при числах Рейнольдса 300 та 500, де  $Re$  розраховано по швидкості незбуреного потоку і довжині пластини. Показано, що динаміка потоку навколо пластини істотно залежить від її відносного подовження (aspect ratio –  $AR$ ). Тривимірні ефекти проявляються в тому, що вихори, які генеруються в передній кромці, відриваючись, взаємодіють з кінцевими вихорами, послаблюючи таким чином вплив нестационарності. Як результат, найбільші навантаження мають місце при великих  $AR$ , коли течія навколо пластини є близькою до двовимірної.

Фундаментальні особливості течії за нахилою пластинною при  $Re \in [100, 850]$ ,  $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$  проаналізовані чисельно в роботі [7]. Показано, що в залежності від співвідношення кута атаки і числа Рейнольдса реалізуються різні режими обтікання – від стаціонарного до хаотичного, перехід між якими здійснюється через біфуркацію Хопфа і сценарій подвоєння періоду. У [8] задача про обтікання тонкої пластинки під кутом атаки розглянута у двох постановках – коли нахилені або пластинка, або потік. Розраховувалися структура течії, число Струхаля, що відповідає доріжці Кармана, та коефіцієнти діючих на пластину сил при  $Re = 750$  і  $\alpha = 30^\circ$ . Головний висновок дослідження полягає в тому, що з точки зору аеродинамічного аналізу розглянуті постановки є ідентичними.

Розрахунки аеродинамічних характеристик профілю NACA0012 виконані в роботах [9, 10]. Вони застосовують підхід енергетичної течії (метод Больцмана), який ґрунтується на кінетичній теорії рідини. Одержаний при  $Re = 500$ ,  $\alpha = 0^\circ$  коефіцієнт сили опору  $C_D = 0.1762$ , за інформацією авторів, добре узгоджується з результатами прямого чисельного інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса.

В роботі [11] проведено чисельне моделювання двовимірної в'язкої течії і аеродинамічних характеристик крил різної конфігурації при  $10^3 \leq Re \leq 10^4$ . Досліджувалися крила різної товщини, з різною конфігурацією задньої кромки та з внутрішніми камерами при кутах атаки від  $0^\circ$  до  $10^\circ$ . Головний висновок дослідження полягає в тому, що домінуючим фактором у такому потоці є в'язкість, яка зумовлює стрімке підвищення опору крила. В той же час, існують режими, коли підймальна сила крила при зменшенні числа Рейнольдса збільшується, що відбувається завдяки утворенню області розрідження на боці крила з низьким тиском. Через це якість крила, яка виражається відношенням підймальної сили до сили опору, залишається

незмінною. Цей ефект може підсилюватися вибором оптимальної геометричної конфігурації крила, зокрема, наявність камери має тут такий же позитивний вплив на аеродинаміку крила, як і при великих числах Рейнольдса.

Експериментальні дослідження даної проблеми обмежені аеродинамічними режимами (при  $\alpha < 15^\circ$ ) і числами Рейнольдса в діапазоні від  $10^3$  до  $10^5$ . В роботі [12] головна увага приділена вивченню циркуляційної зони, яка генерується в носовій частині крила внаслідок відриву пограничного шару. Досліджено динаміку цього відривного пузиря, а також його вплив на характеристики крила при різних числах Рейнольдса. Знайдені кути атаки, при яких, подібно до польоту птахів, спостерігається істотне збільшення під'ємної сили крила. Між тим, показано, що при  $Re = 1.3 \cdot 10^5$  на малих кутах атаки відрив пограничного шару може виникнути як на верхньому, так і на нижньому боці крила, через що під'ємна сила різко зменшується, аж до від'ємних значень.

Систематичні дослідження крил різної конфігурації та товщини при  $Re = 4 \cdot 10^3$  виконані в [13, 14]. Виявлено, що тонші крила мають кращі динамічні характеристики, але через меншу жорсткість вони не можуть підтримувати довго сприятливий розподіл тиску. Показано, що за аналогією з крилами комах, для усунення цього недоліку можна застосовувати рифлення поверхні крила.

Одним з головних висновків наведених досліджень є те, що течія навколо крила і його аеродинамічні характеристики при числах Рейнольдса, менших за  $10^6$ , істотно залежать від цього параметра. Тому, для успішного функціонування малих літальних апаратів та інших технічних пристроїв, що використовують крила, необхідне додаткове вивчення особливостей аеродинамічних течій у вказаному діапазоні чисел Рейнольдса.

В цій роботі виконане чисельне моделювання в'язкої двовимірної течії навколо аеродинамічних профілів на основі вихрового методу, в якому рівняння динаміки рідини Нав'є-Стокса розв'язуються в змінних "завихореність-швидкість". Вихрові чисельні схеми розвинені і успішно використовуються для розрахунку багатьох типів течій, які мають місце в технічних застосуваннях і фундаментальних наукових дослідженнях [15–17]. Починаючи з 70-х років минулого століття, багато аеродинамічних проблем були успішно розв'язані за допомогою методу дискретних вихорів, який ґрунтується на моделі ідеальної рідини. Одержані розв'язки описують відривні течії з дуже великими числами Рейнольдса, коли вплив в'язкості є незначним і ним можна знехтувати. В цій постановці тіло, що обтікається, моделюється тонким вихровим шаром, а точки, де завихореність сходиться у слід, є фіксованими і розташовуються в гострих крайках границі. Теоретичне обґрунтування цього підходу можна знайти в роботах [18, 19], а застосування до моделювання течії навколо елементів конструкцій літальних апаратів представлено в [20].

З розвитком обчислювальної техніки з'явилися вихрові схеми, які враховують в'язкість рідини: метод випадкових блукань Чоріна [21], метод "вихор в комірці" [22], метод дифузійної швидкості [23] та інші. Спочатку ці алгоритми розвивалися як швидка версія чисельних схем для розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса. Вони дозволяли отримати загальну картину течії, у той

час, як точністю розрахунків нехтувалося. Удосконалення вихрових схем протягом останніх десятиріч, що включало акуратне інтегрування рівняння дифузії завихореності, точне виконання умови прилипання на твердих границях у відповідності до гіпотези Лайтхілла про потік завихореності з усієї поверхні тіла, що обтікається, а також активний контроль за точністю розрахунків, призвело до істотного підвищення їхньої роздільної здатності [16, 24]. Як результат, останні версії вихрового методу істотно наблизилися за точністю до недисипативних кінцево-різницевого схем високого порядку, особливо, що стосується ідентифікації явищ великого та середнього масштабів.

Перевагою вихрових методів перед іншими схемами є відсутність в рівняннях тиску, що дозволяє уникнути розв'язання складної проблеми про вибір граничних умов на твердих границях; адаптивність, оскільки розглядаються лише локальні області потоку, зайняті завихореністю; можливість прямої фізичної інтерпретації результатів чисельного моделювання; внутрішня здатність алгоритму до розпаралелювання.

Розрахунки, виконані в цьому дослідженні, ґрунтуються на вихровій чисельній схемі, представлений в [25]. Вона належить до лагранжево-ейлерівських моделей, які, разом з дискретизацією поля завихореності вихровими частинками, використовують сітку, що накладається на область течії для обчислення диференціальних операторів, які описують в'язку дифузії і конвективний перенос завихореності. Як і в нев'язких вихрових алгоритмах, генерація завихореності в гострих крайках границі розраховується тут з використанням теореми Кутта-Жуковського. Механізм для моделювання відриву на рівних ділянках поверхні передбачає виконання граничної умови прилипання і може бути реалізований через умови Дірихле або Неймана. В першому випадку на стінці задається значення завихореності, а в другому – її потік у нормальному напрямку [26]. Враховуючи специфіку проблеми, тут застосований другий підхід, який дозволяє акуратно врахувати кривизну поверхні, що розглядається.

В роботі виконане моделювання двовимірної в'язкої течії навколо симетричних профілів НАСА різної товщини при  $Re = 500$ , де  $Re$  розраховується за швидкістю незбуреної течії і хордою крила. В цьому разі течія навколо крила ще є ламінарною, але, в той же час, мають місце нестационарні ефекти в сліді, зумовлені відривом потоку в лобовій частині крила. Апробація розвиненого алгоритму включає порівняння отриманих результатів з чисельними даними, отриманими на основі схем високого порядку.

Визначені фундаментальні особливості вихрової течії, яка генерується за профілем в широкому діапазоні кутів атаки (AoA): від  $0^\circ$  до  $60^\circ$ . Показано, що при збільшенні AoA характер течії в сліді крила змінюється від стаціонарного до багатоперіодичного, переходячи через біфуркацію Хопфа і біфуркацію подвоєння періоду. Розрахунки аеродинамічних характеристик профілів, які відповідають цим режимам, свідчать про те, що найвище відношення підйімальної сили до сили опору досягається при стаціонарному обтіканні. При збільшенні кута атаки якість крила падає аж до значень, менших за одиницю, що зумовлене істотним зростанням опору форми. Аналіз полів тиску в області навколо крила показує, що генерація підйімальної сили в системі зумовлена динамікою вихрового сліду. Як і для великих чисел

Рейнольдса, на аеродинамічних режимах ( $AoA \leq 15^\circ$ ) підймальна сила забезпечується відривом потоку у задній кромці. Зростання кута атаки крила призводить до розвитку нестационарності у його сліді, що, у свою чергу, викликає коливання підймальної сили і зміну механізму її генерації. При  $AoA > 20^\circ$ , підймальна сила залежить, головним чином, від інтенсивності циркуляційної зони, що утворюється через відрив потоку в носовій частині крила. З порівняння аеродинамічних характеристик профілів різної товщини випливає, що тонші крила мають кращу якість, але обтікання товстіших профілів є більш регулярним. В цілому отримані результати свідчать про те, що функціонування крилових систем при малих числах Рейнольдса істотно відрізняється від традиційних аеродинамічних режимів, що зумовлене домінуванням у потоці в'язких ефектів.

## 1. Постановка задачі і метод розрахунку

### 1.1. Математична модель

Розглядається двовимірна течія в'язкої нестисливої рідини швидкості  $V_0$  навколо аеродинамічного профілю з хордою  $d$  (рис. 1). Головними параметрами, які визначають функціонування цієї системи, є кут нахилу профілю  $\alpha$  до потоку, що набігає, та число Рейнольдса  $Re = V_0 d / \nu$ , де  $\nu$  – кінематична в'язкість рідини. Динаміка рідини навколо профілю повністю описується рівняннями нерозривності та Нав'є-Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2)$$

де  $S$  – область течії,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  – радіус-вектор точок площини,  $\mathbf{V}(u, v)$  – безрозмірне поле швидкості,  $p$  – безрозмірний тиск,  $t$  – масштаб часу. Характерним лінійним параметром задачі є довжина хорди профілю  $d$ , швидкості віднесені до  $V_0$ , час масштабований по  $d/V_0$ .

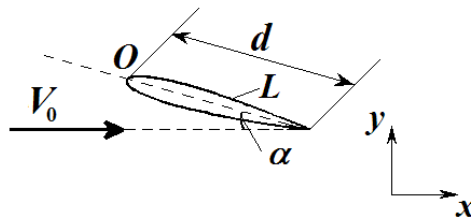


Рисунок 1 – Схема течії

Зазначимо, що використання моделі нестисливого середовища для розрахунку зовнішніх течій реальних рідин та газів при малих дозвукових швидкостях, які відповідають числам Маха, меншим за 0.3, є цілком виправданим і не вносить істотної похибки у розрахунок [27].

На границі тіла повинна виконуватися умова прилипання потоку до поверхні, яка виражається як сукупність умов непротікання:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{r} \in L \quad (3)$$

та ковзання:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{r} \in L, \quad (4)$$

де  $L$  – контур профілю,  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  – одиничні нормаль та дотична до  $L$  відповідно.

На нескінченному віддаленні від тіла і його сліду усі збурення затухають, тобто, виконується:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow V_0, \quad p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p_\infty \quad \text{при } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Вихровий метод, що застосовується для розв’язання задачі (1)–(5), використовує модель руху рідини в змінних “завихореність-швидкість”. Вона ґрунтується на рівнянні переносу завихореності, яке впливає з рівняння моментів (2) при застосуванні до кожного з його членів операції *rotor*, і має наступний вигляд:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (6)$$

де  $\omega = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$  – завихореність,  $\mathbf{k}$  – орт нормалі у вертикальному напрямку.

Таким чином, замість системи рівнянь Нав’є-Стокса (1)–(2), де невідомими є складові вектора швидкості  $\mathbf{V}$  і тиск  $p$ , маємо тепер еволюційне рівняння відносно скалярного поля завихореності  $\omega$ . Це значно спрощує процес моделювання, оскільки дозволяє уникнути складної проблеми про вибір граничних умов для тиску на твердих границях.

Для рівняння (6) виконується аналог теореми Томсона для в’язкого середовища щодо постійності циркуляції по замкненому контуру [28]. Це означає, що нова завихореність утворюється лише на границі області течії, в даному випадку – на контурі  $L$  заданого профілю. Таким чином, у плоскому випадку моделювання течії в’язкої нестисливої рідини зводиться до розрахунку процесів генерації завихореності на тілі та еволюції завихореності, що вже існує в області.

Зв’язок між змінними завихореності та швидкості, якими описується тепер поле течії, забезпечують рівняння Пуассона [26]:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\nabla \omega \quad (7)$$

і його розв'язок – формула Біо-Савара, яка з урахуванням вихрової пелени, що моделює контур тіла, приймає наступний вигляд:

$$V(\mathbf{r}, t) = \iint_S \omega(\mathbf{r}', t) \mathbf{k} \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \int_L \gamma(\mathbf{r}', t) \mathbf{k} \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl(\mathbf{r}') + V_0, \quad (8)$$

де  $G$  – фундаментальний розв'язок оператора Лапласа в необмеженій області:  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ,  $\gamma = \gamma(\mathbf{r}, t)$  – інтенсивність приєднаної вихрової пелени.

Представлення контуру тіла вихровою пеленою дозволяє сформулювати граничну умову для рівняння завихореності (6). Відповідно до механізму генерації завихореності Лайтхілла [26], розподілена вихрова пелена повинна компенсувати хибну дотичну швидкість, яка виникає на поверхні тіла через трансформації поля завихореності у потоці. В чисельних схемах вихрового типу існують різні підходи до розрахунку величини  $\gamma$  та її інкорпорації у граничну умову для рівняння (6). Ми будемо для знаходження  $\gamma$  застосовувати умову ковзання (4), яка з урахуванням співвідношення  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}$  приводить до рівняння Фредгольма другого роду відносно  $\gamma$ :

$$\int_L \gamma(\mathbf{r}', t) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dl(\mathbf{r}') - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot \left( V_0 + \iint_S \omega(\mathbf{r}', t) \mathbf{k} \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \right), \quad (9)$$

де  $\mathbf{r} \in L$ .

Зазначимо, що в радянській школі по вихрових методах загальноприйнятим при знаходженні інтенсивності приєднаної пелени  $\gamma$  було виконання умови непротікання (3), яка трансформується у сингулярне інтегральне рівняння першого роду [18, 20, 25]. В роботі [29] показано, що підхід, який ґрунтується на рівнянні (9), є більш точним у порівнянні з класичним, особливо що стосується обтікання тіл з гострими крайками. Там же доведено, що для тіл, які не обертаються, існує прямий зв'язок між умовами (3), (4), коли виконання однієї з них тягне за собою задоволення іншої.

Крім того, повинна виконуватися теорема Кельвіна про збереження циркуляції в області, яка забезпечує єдиність розв'язку сингулярного рівняння (9):

$$\int_{\Sigma} \gamma(\mathbf{r}', t) dl(\mathbf{r}') + \iint_S \omega(\mathbf{r}', t) ds(\mathbf{r}') = 0. \quad (10)$$

Для завершення побудови математичної моделі необхідно зв'язати пристінну завихореність  $\omega_0$  з інтенсивністю приєднаного вихрового шару  $\gamma$  та описати механізм її переносу в потік. В роботах [21, 25, 30] застосовується гранична умова типу Дирихле, коли  $\omega_0$  виражається через  $\gamma$  відповідно до схеми дискретизації приєднаної пелени. Підхід, що використовується в цій роботі, ґрунтується на умові типу Неймана, яка зв'яже інтенсивність приєднаної вихрової пелени з потоком завихореності з поверхні тіла у потік [15, 16, 26]:

$$v \int_t^{t+\delta t} \frac{\partial \omega_0}{\partial n}(\mathbf{r}) = -\gamma(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L. \quad (11)$$

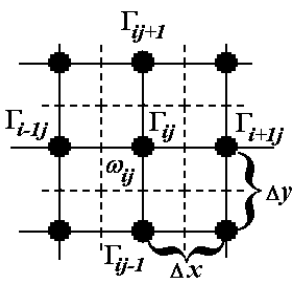
Умова (11) означає, що як тільки в процесі розрахунку на поверхні тіла виникає хибна дотична швидкість, вона повинна компенсуватися потоком завихореності у пристінну область. Якщо вважати, що протягом малого проміжку часу  $\delta t$  потік завихореності залишається постійним, співвідношення (11) можна представити у вигляді:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial n} = -\frac{\gamma}{v \delta t}. \quad (12)$$

Щоб коректно розподілити пристінну завихореність між елементами вихрового поля, необхідно розв'язати відносно  $\omega_0$  рівняння дифузії з нульовою початковою умовою та граничною умовою (12). Цей підхід докладно описаний у класичній щодо в'язких вихрових методів роботі [26] та вдосконалений в роботі [24]. Зазначимо, що він дозволяє акуратно розраховувати течії за тілами довільної конфігурації, в тому числі з великими градієнтами кривизни поверхні.

### 1.2. Чисельна схема

Чисельна схема для реалізації математичної моделі, що представлена в Розділі 2.1, ґрунтується на дискретизації області течії  $S$  регулярною прямокутною сіткою з вузлами  $(i\Delta x, j\Delta y)$ , де  $i = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_y$



(рис. 2). Її густина у горизонтальному і вертикальному напрямках визначається фізичними особливостями задачі, тому, у загальному випадку  $\Delta x \neq \Delta y$ . Вважаємо, що у вузлових точках цієї сітки розташовані точкові вихори, в які “стягнута” завихореність, що займає дискретний об’єм

$$Q(x, y) = \{\xi, \eta : |\xi - x| < \Delta x / 2, |\eta - y| < \Delta y / 2\}.$$

Рисунок 2 – Конфігурація елемента сітки

На рис. 2 ці об’єми позначені пунктирними лініями. Годі циркуляція точкового вихору визначається за формулою:



$$\Gamma_{ij} = \iint_Q \omega(\mathbf{r}, t) dx dy \approx \omega_{ij} \Delta x \Delta y, \quad (13)$$

а дискретна система точкових вихорів з циркуляціями  $\Gamma_{ij}$  апроксимує неперервне поле завихореності  $\omega$ :

$$\omega(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Gamma_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij}), \quad (14)$$

де  $\delta$  – дельта-функція Дірака,  $\mathbf{r}_{ij}$  – радіус-вектори вузлів сітки.

Рівняння еволюції завихореності (6) розв'язується на заданій сітці із застосуванням алгоритму в'язкого розщеплення, коли процес переносу завихореності покроково розкладається на дві складові – конвективну і дифузійну, які описуються наступними рівняннями:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta \omega. \quad (16)$$

Метод розщеплення нелінійного диференційного рівняння на два оператори був запропонований та обґрунтований в роботах М.М. Яненка [31]. Щодо еволюційного рівняння (6), його вперше було застосовано Чорінім [21]. Цей підхід дозволяє інтегрувати рівняння (15), (16) незалежно одне від іншого, застосовуючи схеми, які враховують особливості фізичних процесів, що описуються кожним з цих рівнянь.

Конвективний перенос завихореності, представлений рівнянням (15), моделюється, як правило, переміщеннями дискретних елементів вихрового поля вздовж ліній руху матеріальних частинок. В сіткових алгоритмах [15, 16, 21–23] це потребує перерозподілу циркуляції вихору на вузли сітки, що збільшує штучну в'язкість, породжену похибками розрахункової схеми. В нашій моделі конвекція завихореності розраховується за потоками цієї величини між елементарними об'ємами  $Q_{ij}$  (рис. 2) відповідно до рівняння (15), що призводить до зміни циркуляції вихорів, в той час як їхні положення залишаються постійними. Враховуючи, що нормалі до границь  $Q_{ij}$  співпадають з напрямками координатних осей, можемо записати баланс завихореності за малий часовий проміжок  $\Delta t$  всередині  $Q_{ij}$  у наступному вигляді:

$$\frac{\omega_{ij}^{t+\Delta t} - \omega_{ij}^t}{\Delta t} \Delta x \Delta y \approx (\omega_{i-1,j}^t u_{i-1,j}^t - \omega_{i+1,j}^t u_{i+1,j}^t) \Delta y + (\omega_{ij-1}^t v_{ij-1}^t - \omega_{ij+1}^t v_{ij+1}^t) \Delta x - \omega_{ij}^t (|u_{ij}^t| \Delta y + |v_{ij}^t| \Delta x), \quad (18)$$

де  $u, v$  – компоненти швидкості в горизонтальному і вертикальному напрямках відповідно.

З (18) випливають дискретні рівняння для знаходження циркуляції вихорів сітки на наступному часовому кроці:

$$\Gamma_{ij}^{t+\Delta t} = \Gamma_{ij}^t + [(\Gamma_{i-1,j}^t u_{i-1,j}^t - \Gamma_{i+1,j}^t u_{i+1,j}^t) / \Delta x + (\Gamma_{ij-1}^t v_{ij-1}^t - \Gamma_{ij+1}^t v_{ij+1}^t) / \Delta y - \Gamma_{ij}^t (|u_{ij}^t| / \Delta x + |v_{ij}^t| / \Delta y)] \Delta t. \quad (19)$$

Схема (19) має другий порядок по простору і перший порядок за часом. Відмітимо, що вона є бездисипативною і має покращені дисперсійні властивості у порівнянні з класичними лінійними схемами. Розвиток цього підходу на багат шарових шаблонах представлений в [32].

Процес в'язкої дифузії моделюється інтегруванням рівняння (16) на прямокутній сітці з вузлами  $\Gamma_{ij}$  (рис. 2). Апроксимуючи праву частину (16) за кінцево-різницевою схемою 2-го порядку і застосовуючи метод Ейлера для інтегрування по часові, отримуємо наступні еволюційні рівняння відносно циркуляцій точкових вихорів:

$$\Gamma_{ij}^{t+\Delta t} = \Gamma_{ij}^t + \frac{\Delta t}{\text{Re}} \left( \frac{\Gamma_{i+1,j}^t - 2\Gamma_{ij}^t + \Gamma_{i-1,j}^t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Gamma_{ij+1}^t - 2\Gamma_{ij}^t + \Gamma_{ij-1}^t}{(\Delta y)^2} \right). \quad (20)$$

Виконання операцій (19), (20) призводить до перерозподілу завихореності в області течії в кінці кожного часового проміжку, через що на границі тіла порушується умова про рівність нулю дотичної швидкості. Неперервна вихрова пелена, яка моделює контур тіла і має компенсувати “хибну” дотичну швидкість, в дискретній схемі розбивається на вихрові відрізки з постійним розподілом інтенсивності пелени вздовж кожного з них. Далі ці відрізки стягуються у точкові вихори з циркуляцією  $\Gamma_k^{(p)} = \gamma(r_k^{(p)}) \Delta l_k$ , розташовані посередині панелей. Тут  $\gamma(r_k^{(p)})$  – погонна інтенсивність приєднаної вихрової пелени на  $k$ -тій панелі,  $\Delta l_k$  – довжина панелі,  $k = 1, 2, \dots, N_p$ , де  $N_p$  – кількість панелей.

Після дискретизації поля течії і границі тіла формула (8) для визначення швидкості потоку в області приймає наступний вигляд:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Gamma_{ij} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij}|^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \Gamma_k^{(p)} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(p)})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(p)}|^2} + V_0, \quad (21)$$

де  $\mathbf{r}_{ij}$  та  $\mathbf{r}_k^{(p)}$  – векторні координати вихорів сітки і приєднаних вихорів відповідно.

Циркуляції приєднаних вихорів  $\Gamma_k^{(p)}$  обчислюються із сингулярного інтегрального рівняння (9). Дискретний аналог цього рівняння з додатковою умовою (10) має наступний вигляд:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{N_p} \Gamma_k^{(p)} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}_m^{(p)}) \cdot (\mathbf{r}_m^{(p)} - \mathbf{r}_k^{(p)})}{|\mathbf{r}_m^{(p)} - \mathbf{r}_k^{(p)}|^2} - \frac{\pi \cdot \Gamma_m^{(p)}}{\Delta l_m} + R = \\ = -\tau(\mathbf{r}_m^{(p)}) \cdot \left[ V_0 + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Gamma_{ij} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r}_m^{(p)} - \mathbf{r}_{ij})}{|\mathbf{r}_m^{(p)} - \mathbf{r}_{ij}|^2} \right], \quad m = 1, 2, \dots, N_p, \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^{N_p} \Gamma_k^{(p)} = -\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Gamma_{ij}. \quad (23)$$

Тут  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_m^{(p)})$ ,  $\tau(\mathbf{r}_m^{(p)})$  – нормаль та дотична до контуру на  $m$ -тій панелі,  $R$  – регуляризуюча змінна, яка вводиться через те, що система є перевизначеною. Рівняння (22) записуються в контрольних точках  $\mathbf{r}_m^{(p)}$ , які знаходяться посередині панелей і співпадають з приєднаними вихорами. Такий підхід до побудови дискретного аналогу рівняння (9) застосовувався в роботі [29], де обґрунтована коректність квадратурної формули щодо виділення головного значення сингулярного інтегралу, що розглядається.

Після розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (22)–(23) і обчислення інтенсивності вихрової пелени  $\gamma$  на кожній панелі ( $\gamma_k = \Gamma_k^{(p)} / \Delta l_k$ ), вона має бути розподілена на сусідні до тіла вихрові частинки таким чином, щоб отримати нульову дотичну швидкість на поверхні тіла. Цей процес можна ідентифікувати як генерацію завихореності поверхнею тіла відповідно до рівняння дифузії з однорідною початковою умовою і граничною умовою (12). Розв’язання цієї задачі для тіла довільної геометричної конфігурації представлено в деталях в роботі [26]. Отриманий розв’язок описує зміну циркуляції вихорів поля на часовому проміжку  $\Delta t$ , яка викликана генерацією поверхневої завихореності, наступним алгоритмом:

$$\Gamma_{ij}(t + \Delta t) = \Gamma_{ij}(t) + \Delta x \Delta y \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\gamma_k}{1 - \xi_k \sqrt{\pi \nu \Delta t}} \Phi(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_k, \Delta t), \quad (24)$$

де  $\xi_k$  – кривизна поверхні на  $k$ -тій панелі,  $\nu$  – в’язкість середовища,

$$\Phi(r(x, y), \delta t) = \frac{\exp(-y^2/4\nu\delta t)}{\sqrt{4\nu\delta t}} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{d+x}{\sqrt{4\nu\delta t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d-x}{\sqrt{4\nu\delta t}}\right) \right\}.$$

Зазначимо, що вектор  $(r_{ij} - r_k)$  у формулі (24) проектується на правосторонню систему координат, що задається напрямками дотичної та нормалі в заданій точці контуру. Формула (24) дозволяє розрахувати завихореність, що генерується на гладких стінках контуру, виходячи з в'язкості середовища.

Для моделювання інерційного відриву в гострій задній кромці крила використовується умова Кутта-Жуковського. Щоб забезпечити її виконання, поверхня крила дискретизується таким чином, що в задній кромці розташовується вихор, циркуляція якого зноситься в потік відповідно з формулою (19). Зазначимо, що ця методика успішно застосовувалася для моделювання в'язких течій навколо тіл з гострими кромками в радянській школі по вихрових методах [32].

Таким чином, дискретні оператори (19), (20), (24) повністю описують еволюцію поля завихореності на окремому часовому проміжку. Відмітимо, що адаптивність схеми досягається тим, що розглядаються лише ті вихори сітки, для яких виконується:  $|\Gamma_{ij}| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – мале задане значення ( $\varepsilon = 10^{-8}$ ).

### 1.3. Розрахунок тиску та гідродинамічних навантажень

Описання поля течії в змінних “швидкість-завихореність” і перехід до рівняння (6) дозволяє відокремити кінематичну проблему від динамічної, що значно спрощує чисельне моделювання еволюції вихрового поля. Але для оцінки сил, що діють на тіло, або рівнів акустичного поля у потоці необхідний розрахунок тиску принаймні поблизу тіла. Відомо [33–35], що відновлення тиску за полями швидкості і завихореності є нетривіальною задачею. Так, при прямому розв’язанні рівняння Пуассона для тиску виникає проблема коректного вибору граничних умов. Застосування альтернативних підходів, таких як варіаційний метод [33] чи інтеграл Ульмана [34] ускладнюється наявністю гострої кромки на контурі, що розглядається.

В цій роботі поле тиску розраховується інтегруванням рівнянь Нав’є-Стокса у формі Ламба [36], яка зв’язує змінну  $p$  із змінними  $V(u, v)$  і  $\omega$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2) - \nu \omega = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (25a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2) + u \omega = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (25b)$$

Інтегруючи рівняння (25a) по змінній  $x$ , а рівняння (25b) – по змінній  $y$ , отримуємо наступні формули для розрахунку безрозмірного тиску в області:

$$\bar{p} = 1 - u^2 - v^2 + 2 \int_{-\infty}^x \left( v\omega - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx, \quad (26a)$$

$$\bar{p} = 1 - u^2 - v^2 + 2 \int_{-\infty}^y \left( -u\omega - \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dy, \quad (26б)$$

де  $\bar{p} = 2(p - p_\infty) / \rho U_0^2$ .

Яку з формул, (26a) чи (26б), застосовувати в розрахунках залежить від конфігурації області течії і поля завихореності.

Безрозмірні коефіцієнти сил, що діють на тіло, будемо визначати за розподілом коефіцієнта тиску по його поверхні:

$$C_D = \int_L \bar{p} n_x dx, \quad (27a)$$

$$C_L = \int_L \bar{p} n_y dy, \quad (27б)$$

$C_D, C_L$  – коефіцієнти опору і підйимальної сили відповідно,  $n = (n_x, n_y)$  – внутрішня нормаль до контуру тіла. Зазначимо, що формула (27a) включає в себе лише опір форми. В чисельній схемі, інтеграли в (26a), (26б) розраховуються методом трапецій на заданій ортогональній сітці.

## 2. Результати розрахунків

### 2.1. Параметри дискретизації та апробація чисельної схеми

На основі представленої у Розділі 1 чисельної схеми виконано моделювання двовимірної течії в'язкої нестисливої рідини навколо симетричних профілів серії НАСА при  $Re = 500$  і кутах атаки від  $0^\circ$  до  $60^\circ$ . Геометрична форма таких профілів залежить лише від їхньої товщини і може бути задана аналітично. Це значно спрощує знаходження нормалі та дотичної до контуру, а також його кривизни. Функція, якою визначається геометрія профілів НАСА00XX (де XX вказує на товщину профілю у відсотках), має наступний вигляд [37]:

$$y(x) = \pm \frac{b}{0.2} \left( 0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right), \quad (28)$$

де  $b$  – товщина профілю.

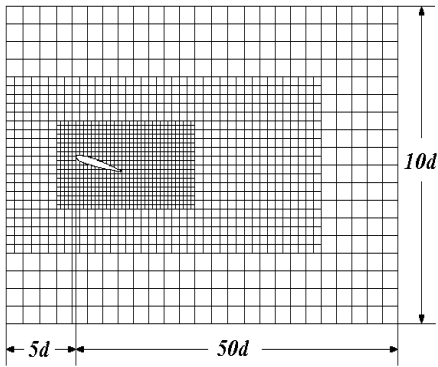


Рисунок 3 – Конфігурація розрахункової сітки

Розрахунки виконані на трьохрівневій сітці з однаковими розмірами комірок у горизонтальному і вертикальному напрямках на кожному рівні. Параметр дискретизації найближчої до тіла сітки вибрано:  $\Delta x = \Delta y = 0.005d$ . Розміри комірок кожної наступної сітки подвоювалися у порівнянні з попередньою. Конфігурація розрахункової області та її розміри представлені на рис. 3.

Як виявили тестові розрахунки, збільшення розрахункової області за межі вибраних значень довжини та ширини практично не впливає на одержувані кінематичні та динамічні характеристики системи, що розглядається. Оскільки чисельний алгоритм застосовує явну схему інтегрування рівнянь по часові, нормалізований крок  $\Delta t$  повинен вибиратися на основі критерію Куранта:

$$\frac{\max\{u,v\} \Delta t}{\min\{\Delta x, \Delta y\}} \leq 1. \quad (29)$$

Максимум локальної швидкості потоку  $\mathbf{V}(u,v)$  залежить від кривизни поверхні, що обтікається, кута атаки та числа Рейнольдса. Розрахунки показали, що при заданих геометрії крила і параметрах течії, вибір  $\Delta t = 0.5h$ , де  $h = \min\{\Delta x, \Delta y\}$ , забезпечує стійкість моделювання протягом довгого часового проміжку.

Для дискретизації профілю застосовується наступна формула [32]:

$$x_k = 1 - \sin^2\left(\pi \frac{k-1}{N_p}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N_p, \quad (30)$$

де  $x_k$  – абсциси контрольних точок при нульовому куті атаки. Їхні ординати  $y_k$  знаходяться за законом (28).

Розвинена чисельна схема застосовувалася авторами раніше для моделювання вихрових течій за тілами і системами тіл різної конфігурації при помірних числах Рейнольдса. Зокрема, в роботі [38] виконані детальні розрахунки вихрового поля і гідродинамічних характеристик для квадратної призми при  $10^2 \leq Re \leq 10^3$ . Аналіз отриманих результатів показав добре узгодження числа Струхаля та осереднених коефіцієнтів діючих на призму гідродинамічних сил з даними експериментальних досліджень та чисельних розрахунків інших авторів. Невелике (до 10%) розходження спостерігалось лише для амплітудних показників нестационарних гідродинамічних сил.

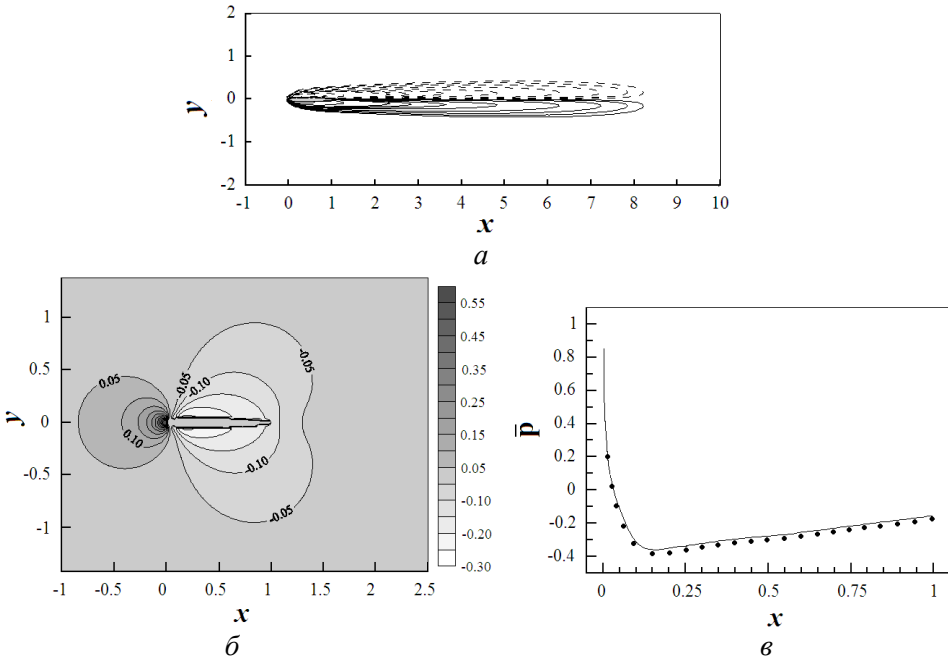


Рисунок 4 – Профіль NACA0012 при куті атаки  $\alpha = 0^\circ$ ,  $Re = 500$ :  
 а – ізолінії завихореності, б – контури тиску в області, в – коефіцієнт тиску  
 вздовж поверхні крила. Суцільна лінія – результати моделювання,  
 маркери – дані роботи [10]

Щодо крилових профілів, то є лише невелика кількість робіт, де представлена інформація, що відповідає числам Рейнольдса із зазначеного діапазону. Чисельне моделювання аеродинамічних характеристик профілю NACA0012 при  $Re = 500$  і  $\alpha = 0^\circ$  виконане в роботах [9, 10]. В них застосований метод енергетичної течії Больцмана, який ґрунтується на кінетичній теорії рідини. Показано, що розраховані параметри течії і динамічні навантаження на крило співпадають з результатами прямого чисельного інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса за схемами високих порядків.

Виконані нами тестові розрахунки в'язкої течії навколо профілю NACA0012 при  $Re = 500$  і  $\alpha = 0^\circ$  показали, що розвинений алгоритм при обраних параметрах дискретизації забезпечує результати, які узгоджуються з даними, наведеними в роботах [9, 10]. Отримані в розрахунках осереднені поля завихореності і тиску в області течії, розподіл тиску на поверхні, а також його порівняння з даними роботи [10] представлені на рис. 4. З цих результатів випливає, що головний внесок в опір крила в цій конфігурації потоку забезпечується тертям поверхні. Тому, коефіцієнт горизонтальної сили  $C_x$  розраховувався тут на основі теореми імпульсів [16, 25], яка дозволяє врахувати як опір форми, так і опір тертя. Отримана величина  $C_x = 0.175$  є дуже близькою до значення 0.1761 з роботи [9]. Наведені порівняння показують, що розвинена чисельна схема здатна коректно спрогнозувати в'язку течію навколо крилових профілів при помірних числах Рейнольдса.

## 2.2. Структура вихрової течії за нахиленим профілем

В цьому розділі досліджується структура вихрової течії, яка генерується навколо симетричних профілів *NACA0008* і *NACA0018* при  $Re = 500$  і кутах атаки від  $0^\circ$  до  $60^\circ$ . На рис. 5 наведені отримані в розрахунках ізолінії завихореності для 8% профілю при різних кутах  $\alpha$  (позитивна завихореність відповідає тут обертанню вихора проти годинникової стрілки і показана суцільними лініями). Рис. 6 ілюструє відповідні частотні спектри для компонент швидкості в точці  $x_u = 1.5d$ ,  $y_u = -0.5d$ , яка розташована в ближньому сліді за крилом. Зазначимо, що частоти на рис. 6 нормалізовані по  $U_0/d$ .

Наведені результати свідчать про те, що в розглянутому діапазоні кутів атаки картина завихореності у сліді профілю змінюється від стаціонарної до багатоперіодичної. При  $\alpha \leq 15^\circ$  (рис. 5 а), слід за крилом є стаціонарним. Він формується двома майже симетричними вихровими пеленами протилежного знаку. При подальшому збільшенні кута атаки вихрова течія через біфуркацію Хопфа переходить до періодичного режиму, коли в сліді крила утворюється доріжка вихорів Кармана (рис. 5 б –  $\alpha = 20^\circ$ ). Про регулярність процесу свідчить спектр швидкості, що відповідає цьому випадку (рис. 6 а), де можна бачити один чітко виражений пік при  $f_1$ , який вказує на частоту утворення вихрової доріжки. Вихори, що відриваються від лобової частини крила і від задньої крайки, мають приблизно однаковий масштаб та майже не взаємодіють між собою. Розрахунки показують, що при  $b = 0.08$  ( $b$  – товщина профілю) біфуркація Хопфа має місце при  $\alpha \approx 18^\circ$ , а утворення регулярної доріжки вихорів спостерігається до  $\alpha \approx 30^\circ$ .

При подальшому зростанні кута атаки вихрова течія за профілем істотно ускладнюється, що відбувається через збільшення інтенсивності вихрових структур та їх взаємодію (рис. 5 в –  $\alpha = 40^\circ$ ). Вихрова доріжка тут є стійкою лише на малій відстані від профілю (приблизно до  $x \approx 12d$ ). Далі вихори протилежного знаку відштовхуються один від одного, через що слід сильно розширюється. Відповідний частотний спектр (рис. 6 б) представляє собою систему піків, яка складається із головної частоти  $f_1$  та її гармонік  $2f_1$ ,  $3f_1$  та ін. З цього випливає, що процеси в сліді крила все ще є регулярними, але наявність низьких періодів вказує на сильну взаємодію між вихорами.

Картина вихрової течії, отримана при  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 5 г), відома, як режим подвоєного періоду [39], коли протилежно спрямовані вихори утворюють стійкі вихрові пари, а у частотному спектрі, крім головної частоти  $f_1$  та її кратних гармонік, проявляється частота  $f_1/2$  (рис. 6 в). Крім того, вихровий слід підіймається вгору, а частина негативної завихореності відривається від “свого” вихору і приєднується до протилежного, через що порушується просторова структура доріжки. Цей стан ще не призводить до хаотизації сліду, але відповідний частотний спектр свідчить про істотне ускладнення вихрової течії. Зазначимо, що в даному разі перехід до режиму подвоєного періоду відбувається при  $\alpha \approx 50^\circ$ .



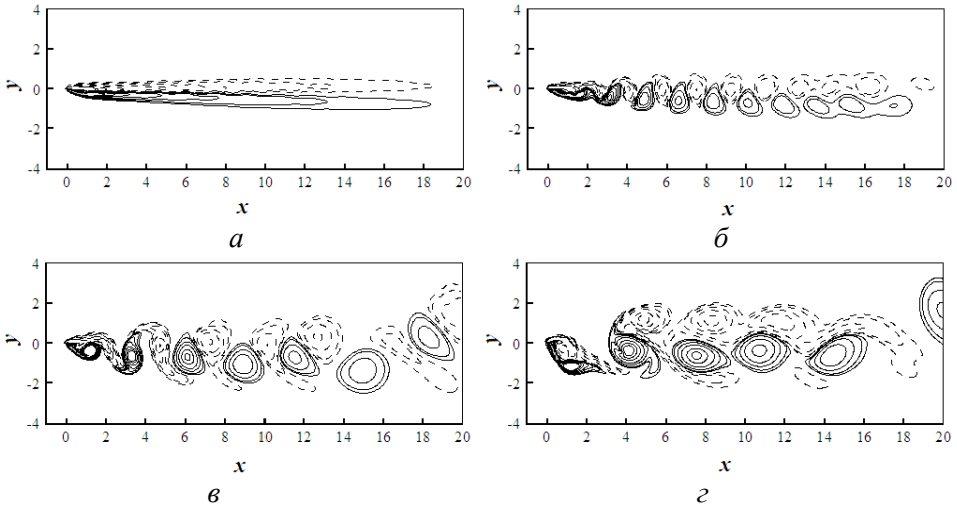


Рисунок 5 – Миттєві картини вихрової течії за 8% профілем при різних кутах атаки: *a* –  $\alpha = 15^\circ$ , *б* –  $\alpha = 20^\circ$ , *в* –  $\alpha = 40^\circ$ , *г* –  $\alpha = 60^\circ$ ,  $t = 50$ ;  
 ——— позитивна циркуляція, - - - негативна циркуляція

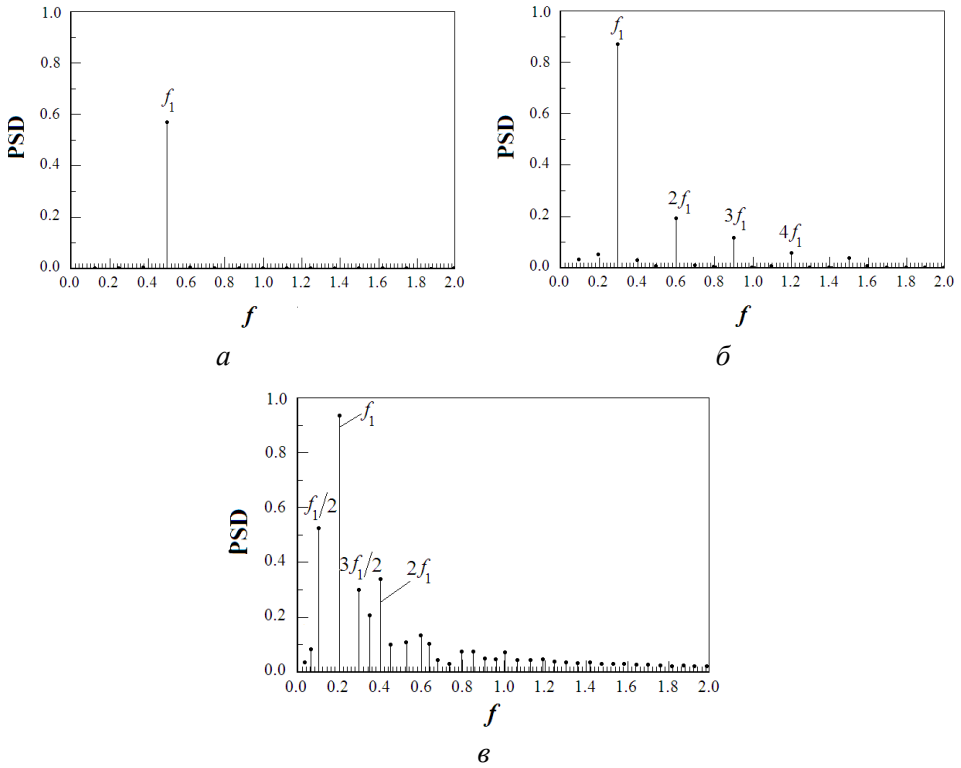


Рисунок 6 – Енергетичний спектр щільності (PSD) компонент швидкості в сліді за 8% профілем при різних кутах атаки: *a* –  $\alpha = 20^\circ$ ,  
*б* –  $\alpha = 40^\circ$ , *в* –  $\alpha = 60^\circ$

Зі збільшенням товщини профілю усі перехідні явища відбуваються раніше відносно кута атаки, так, для 18% профілю біфуркація Хопфа настає при  $\alpha \approx 14^\circ$ , про що свідчить картина завихореності в сліді, представлена на рис. 7. Рис. 8. демонструє залежності головної частоти  $f_1$  (або числа Струхаля  $St$ ), яка характеризує зрив вихорів з поверхні крила, від кута атаки для профілів різної товщини. На цих графіках частота відриву вихорів зменшується від 0.52 до 0.2, що вказує на істотне зростання масштабу та інтенсивності вихрових структур при збільшенні кута атаки. Ці результати показують також, що вплив тілесності на структуру вихрового потоку є істотним при менших кутах  $\alpha$  із заданого діапазону, з переходом до режиму подвоєного періоду (при  $\alpha \approx 50^\circ$ ) він нівелюється.

В цілому, представлені результати свідчать про домінування в'язких ефектів в сліді крила, таких як відрив граничного шару та інтенсивна вихрова взаємодія.

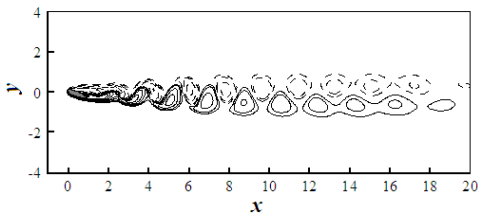


Рисунок 7 – Картина вихрової течії за 18% профілем при  $\alpha \approx 15^\circ$

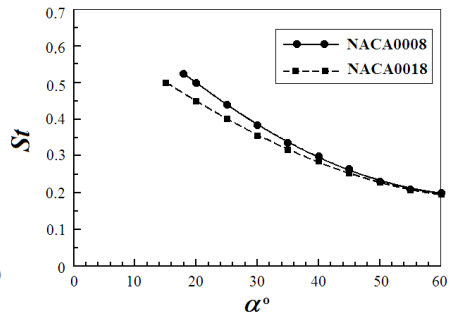


Рисунок 8 – Залежність числа Струхаля  $St$  від кута атаки  $\alpha$  для профілів різної товщини

### 2.3. Динамічні характеристики крила

В цьому розділі досліджується вплив кута атаки на динамічні характеристики профілів, що розглядаються. На рис. 9 представлені залежності від часу коефіцієнтів опору підйимальної сили для профілю NACA0008 при  $\alpha = 20^\circ$  (рис. 9 а) і  $\alpha = 40^\circ$  (рис. 9 б). Можна бачити, що на початку процесу (при  $t \approx 2$ ) має місце локальний максимум цих функцій. Очевидно, що це зумовлене генерацією вихрової пелени у задній крайці та її відривом. Усталення течії відбувається до  $t \approx 10$ , після чого вона переходить до періодичного стану, коли вихрові структури почергово відриваються у задній крайці та носовій частині крила з періодом  $T_1 = 1/St$ , що відображається у коливаннях функцій  $C_D(t)$  та  $C_L(t)$ .

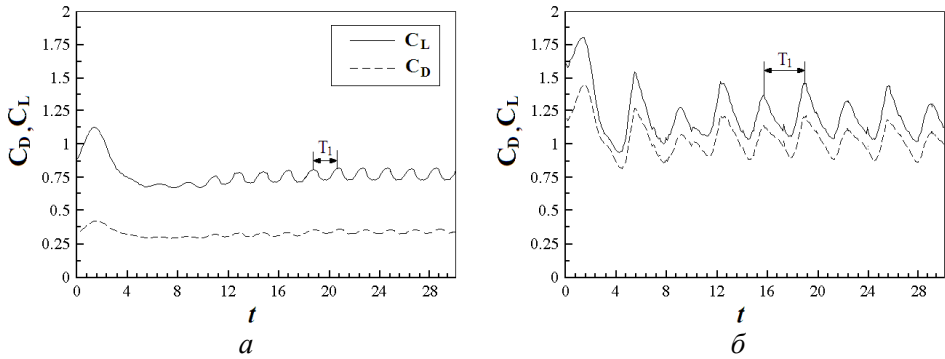


Рисунок 9 – Миттєві коефіцієнти сили опору  $C_D$  та підйимальної сили  $C_L$   
8% профілю:  $a - \alpha = 20^\circ$ ,  $b - \alpha = 40^\circ$

Результати на рис. 9 підтверджують висновки попереднього параграфу про те, що при менших  $\alpha$  із заданого діапазону процес генерації вихрової доріжки є набагато регулярнішим, ніж при великих. Порівняння графіків на рис. 9 *a* і рис. 9 *б* свідчить про зростання обох динамічних коефіцієнтів при збільшенні кута атаки, але опір крила зростає набагато швидше, ніж підймальна сила. При  $\alpha = 40^\circ$ , коефіцієнт сили опору майже дорівнює коефіцієнту підйимальної сили, тобто, якість крила в цьому випадку є близькою до одиниці.

Рис. 10 ілюструє динаміку течії навколо крила через розподіли завихореності (зліва) та тиску (справа). Рис. 10 *a*, 10 *в* відповідають тут моментам часу, коли підймальна сила крила досягає максимуму, а рис. 10 *б*, 10 *г* описують потік, коли підймальна сила є мінімальною. На рис. 10 *a* можна бачити, що при  $\alpha = 20^\circ$  зростання підйимальної сили забезпечується генерацією інтенсивної вихрової пелени у задній крайці крила, а коли ця пелена скручується у вихор і відривається (рис. 10 *б*), підймальна сила падає до мінімуму. При  $\alpha = 40^\circ$ , інтенсивна зона розрідження над крилом утворюється через завихореність, яка сходить у носовій частині крила (рис. 10 *в*). Вихор, що генерується задньою крайкою, в цей момент відривається, що супроводжується розширенням області підвищеного тиску на нижній поверхні крила. Як результат, різниця тисків на протилежних боках профілю збільшується, а, отже, підймальна сила досягає максимального значення. Відрив переднього вихору (рис. 10 *г*) викликає збільшення тиску на верхньому боці профілю, через що підймальна сила зменшується до мінімуму. Отже, при  $\alpha > 20^\circ$  механізм генерації підйимальної сили крила змінюється, тепер вона залежить, головним чином, від інтенсивності циркуляційної зони, що утворюється в носовій частині, а не від вихрової пелени, яка сходить у потік в задній гострій крайці.

Також на рис. 10 можна бачити, що поле тиску поблизу нахиленого профілю істотно трансформується у порівнянні із симетричним випадком ( $\alpha = 0^\circ$ , рис. 4 *б*). Точка стагнації, де швидкість дорівнює нулю, а тиск – одиниці, тепер зміщується вниз, а в носу профілю утворюється область низького тиску. Величина розрідження в цій області залежить від кута атаки. Так,  $\bar{p}_{\min} = -1.5$  при  $\alpha = 20^\circ$  і  $\bar{p}_{\min} = -2.6$  при  $\alpha = 40^\circ$ .

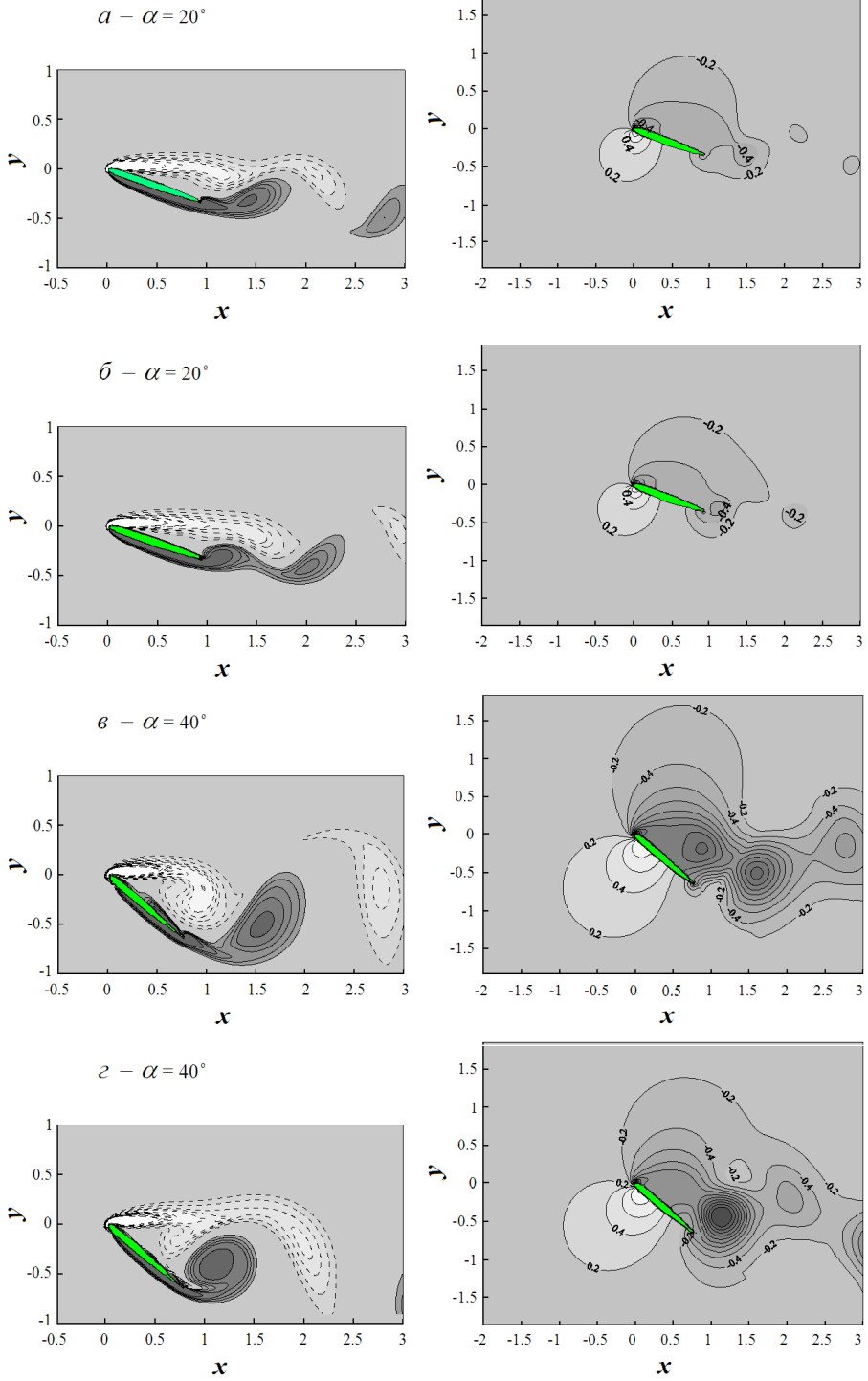


Рисунок 10 – Розподіли завихореності (зліва) та тиску (справа) навколо профілю NACA0008 при  $\alpha = 20^\circ$  ( $a, \delta$ ) та  $\alpha = 40^\circ$  ( $\epsilon, z$ )

Крім того, як область розрідження, так і область підвищеного тиску розширюються, коли кут атаки зростає. На рис. 10 в, з видно, що при  $\alpha = 40^\circ$  зони розрідження з'являються не лише в околі носової частини крила, а й над ним, що зумовлене генерацією тут інтенсивних відривних зон. Відзначимо, що отримані результати якісно співпадають з даними роботи [40], де наведені поля тиску навколо нахиленого до потоку профілю NACA0012 при великих числах Рейнольдса. Різниця спостерігається лише поблизу задньої крайки, де від'ємний тиск у наших розрахунках зумовлений впливом в'язкості.

Загальні висновки щодо ефективності експлуатації крилових систем в заданому діапазоні кутів атаки і чисел Рейнольдса випливають з аналізу поведінки осереднених коефіцієнтів опору та підйимальної сили. На рис. 11 наведені залежності отриманих в розрахунках середніх за період коефіцієнтів опору  $\bar{C}_D$  та підйимальної сили  $\bar{C}_L$  від кута атаки  $\alpha$  для профілів різної товщини. Рис. 12 демонструє обчислені за цими результатами коефіцієнти якості профілів  $\bar{C}_L/\bar{C}_D$  при різних кутах атаки. На цих графіках можна виділити три характерних області щодо поведінки представлених функцій. В першій з них градієнт підйимальної сили є набагато вищим за градієнт сили опору, тому, якість крила із збільшенням кута атаки зростає. Для профілю NACA0008 максимум цієї функції наближається до трьох і досягається при  $\alpha \approx 12^\circ$ . Ефективність профілю NACA0018 є меншою, оскільки його максимальна якість приблизно дорівнює двом. Зазначимо, що цей висновок співпадає з висновками експериментального дослідження [14], виконаного при  $Re = 4 \cdot 10^3$ . Порівняння наших результатів з даними цієї роботи свідчить також про те, що величина  $\bar{C}_L/\bar{C}_D$  при малих числах Рейнольдса є набагато меншою, ніж для великих. В другій області величина  $\bar{C}_L/\bar{C}_D$  зі збільшенням кута атаки зменшується, але ще залишається вищою за одиницю. Для обох профілів, що розглядаються, якість крила досягає одиниці при  $\alpha \approx 45^\circ$ . При  $45^\circ < \alpha \leq 60^\circ$ , опір крила стрімко зростає, в той же час, підйимальна сила залишається постійною, а для тоншого профілю навіть трохи зменшується. Тому, якість крила в цій області падає від 1 до 0.75.

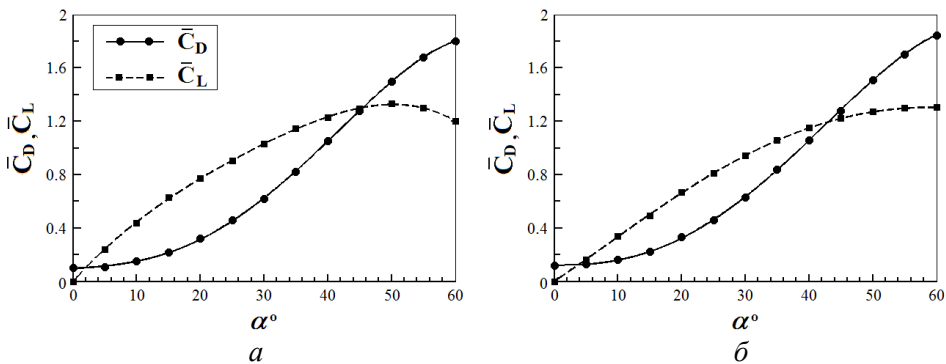


Рисунок 11 – Залежності середніх коефіцієнтів сили опору  $\bar{C}_D$  та підйимальної сили  $\bar{C}_L$  від кута атаки  $\alpha$ : а – NACA0008, б – NACA0018

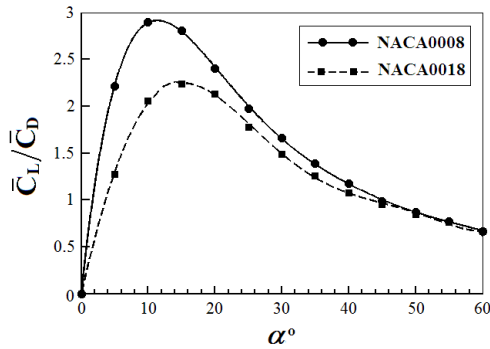


Рисунок 12 – Залежності якості крила  $\bar{C}_L / \bar{C}_D$  від кута атаки  $\alpha$  для профілів різної товщини

З представлених результатів впливає також, що збільшення товщини профілю на 10% істотно впливає на його динамічні характеристики лише при малих кутах атаки, де підймальна сила, що діє на профіль NACA0008, зростає швидше, ніж для профілю NACA0018. Далі вплив в'язких ефектів на течію стає сильнішим, ніж вплив геометрії, тому, навантаження на профілі, що розглядаються, зрівнюються. Отримані оцінки є важливими для розуміння динамічних процесів, що супроводжують функціонування систем в заданому діапазоні кутів атаки і чисел Рейнольдса.

## Висновки

1. Узагальнений вихровий метод, в якому рівняння динаміки рідини Нав'є-Стокса розв'язуються в змінних “завихореність-швидкість”, розвинуто для моделювання в'язкої течії за нахиленим до потоку аеродинамічним профілем. Показано, що він здатен розраховувати коректно нестационарні поля течії та гідродинамічні характеристики крил при числах Рейнольдса в діапазоні від  $10^2$  до  $10^3$ .

2. Розвинену чисельну схему застосовано до моделювання течії навколо симетричних профілів NACA0008 і NACA0018 при кутах атаки від  $0^\circ$  до  $60^\circ$  та  $Re = 500$ . Отримані результати вказують на домінування у потоці в'язких ефектів, внаслідок чого навколо профілю і за ним утворюється інтенсивна циркуляційна течія. Показано, що при збільшенні кута атаки характер вихрового сліду змінюється від стаціонарного до багатоперіодичного через біфуркацію Хопфа і біфуркацію подвоєння періоду.

3. Розрахунки аеродинамічних характеристик профілів, які відповідають цим режимам, свідчать про те, що відношення підймальної сили до сили опору є найвищим при стаціонарному обтіканні (для  $\alpha < 15^\circ$ ). Зі збільшенням кута атаки якість крила зменшується і при  $\alpha \approx 45^\circ$  досягає одиниці. При  $\alpha > 45^\circ$  має місце швидке зростання сили опору, в той час як підймальна сила залишається постійною, через це якість крила падає до значень, менших за одиницю.

4. Аналіз полів тиску в області вказує на існування зони розрідження не лише в носовій частині профілів, як при великих числах Рейнольдса,

а й поблизу задньої крайки, що зумовлено впливом в'язкості. Зі збільшенням кута атаки інтенсивність цих зон істотно зростає.

5. Виявлено, що кращу динамічну якість мають тонкі крила, а вплив тілесності на динамічні характеристики профілю є істотним лише у стаціонарному потоці.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mueller T.J. An overview of micro air vehicle aerodynamics / T.J. Mueller // *Progress in Aeronautics and Astronautics*, 2001. – V. 195. – P. 1–9.
2. Pines D. J. Challenges facing future micro-air-vehicle development / D.J. Pines, F. Bohorquez // *J. Aircraft*, 2006. – V. 34 (2). – P. 290–305.
3. Ifju P. Analysis of a flexible wing micro air vehicle / P. Ifju, B. Stanford, M. Sytsma, R. Albertani // *AIAA Paper*, 2006. – P. 3311.
4. Dickinson M. H. Unsteady aerodynamic performance of model wings at low Reynolds numbers / M.H. Dickinson, K.G. Geotz // *J. Experimental Biology*, 1993. – V. 174. – P. 45–64.
5. Wang Z.J. Vortex shedding and frequency selection in flapping flight / Z.J. Wang // *J. Fluid Mechanics*, 2000. – V. 410. – P. 323–341.
6. Taira K. Three-dimensional flows around low-aspect-ratio flat-plate wings at low Reynolds numbers / K. Taira, T. Colonius // *J. Fluid Mechanics*, 2009. – V. 623. – P. 187–207.
7. Zhang J. Route to a chaotic state in fluid flow past an inclined flat plate / J. Zhang, N.-S. Liu, X.-Y. Lu // *J. Physics Review*, 2009. – V. 79. – P. 045306: 1–4.
8. Yang D. Numerical simulation of flow past a rectangular flat plate / D. Yang, B. Pettersen, H.I. Andersson, V.D. Narasimhamurthy // *Proceeds of V Europ. Conf. Comp. Fl. Dyn. Lisbon, Portugal, 14–17 June, 2010*.
9. Yu D. A multi-block lattice Boltzmann method for viscous fluid flows / D. Yu, R. Mei, W. Shyy // *International J. Numerical Methods in Fluids*, 2002. – V. 39. – P. 99–120.
10. Lockard D.P. Evaluation of powerFLOW for aerodynamics applications / D.P. Lockard, L.-S. Luo, S.D. Milder, B.A. Singer // *J. Statistic Physics*, 2002. – V. 107. – P. 423–478.
11. Kunz P.J. Analysis, design and testing of airfoils for use at ultra-low Reynolds numbers / P.J. Kunz, I. Kroo // *Proceeds of the Conference on fixed, flapping and rotary vehicles at very low Reynolds numbers*, edited by T.J. Mueller, University of Notre-Dam, 2000. – P. 349–372.
12. Mueller T.J. Experimental studies of separation on a two-dimensional airfoil at low Reynolds numbers / T.J. Mueller, S.M. Batill // *AIAA J.*, 1982. – V. 20. – № 4. – P. 457–463.
13. Sunada S. Airfoil section characteristics at a low Reynolds number / S. Sunada, A. Sakaguchi, K. Kawachi // *J. Fluid Engineering*, 1997. – V. 119. – P. 129–135.
14. Sunada S. Comparison of wing characteristics at an ultralow Reynolds number / S. Sunada, K. Kawachi // *J. Aircraft*, 2002. – V. 39. – P. 331–338.
15. Koumoutsakos P. Direct numerical simulation of unsteady separated flows using vortex methods / P. Koumoutsakos – Ph.D. Thesis. California Institute of Technology, 1993. – 173 p.
16. Cottet G.-H. Vortex methods: theory and practice / G.-H. Cottet, P. Koumoutsakos – London: Cambridge University Press, 2000. – 312 p.
17. Kamemoto Y. Vortex methods / Y. Kamemoto, J. Tsutahara // *Proceeds of the 1-st International Conference of Vortex Motions*. Edit. Kamemoto and Tsutahara. Singapore, 2000. – 230 p.
18. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И.К. Лифанов – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.
19. Beale J.T. Vortex methods: higher order accuracy in two and three dimensions / J.T. Beale, A. Majda // *J. Mathematics Computers*, 1982. – V. 39. – № 159. – P. 29–52.

20. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ – М.: Наука, 1978. – 351 с.
21. Chorin A. J. Numerical study of slightly viscous flow / A. J. Chorin // J. Fluid Mechanics, 1973. – V. 57. – P. 785–796.
22. Graham J.M.R. Computation of viscous separated flows using a particle method / J.M.R. Graham – in Book "Numerical Methods of Fluid Mechanics, III", Oxford, 1988. – P. 23–31.
23. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости / Г.Я. Дынникова // Известия РАН, Механика жидкости и газа, 2003. – № 5. – С. 11–19.
24. Ploumhans P. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry / P. Ploumhans, G.S. Winckelmans // J. Computer Physics, 2000. – V. 165. – P. 354–406.
25. Горбань В.О. Вихревая структура потока при обтекании квадратной призмы: числовая модель та алгоритмы управления / В.О. Горбань, І.М. Горбань // Прикладна гідромеханіка, 2005. – Т. 7. – № 2. – С. 8–26.
26. Koumoutsakos P. Boundary conditions for viscous vortex methods / P. Koumoutsakos, A. Leonard, F. Peprin // J. Computer Physics, 1994. – V. 113. – P. 52–61.
27. Черный Г.Г. Газовая динамика / Г.Г. Черный – М.: Наука, 1988. – 434 с.
28. Андронов П.Р. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок / П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова – М.: Изд-во МГУ, 2006. – 184 с.
29. Kempka S.N. Accuracy consideration for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations / S.N. Kempka, M.W. Glass, J.S. Peery, J.H. Strickland // SANDIA Rep. N. SAND96-0583, UC-700, 1996. – 52 p.
30. Wu J.C. Numerical boundary conditions for viscous flow problems / J.C. Wu // AIAA J, 1996. – V. 14. – № 8. – P. 1042–1049.
31. Яненко М.М. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / М.М. Яненко – Новосибирск: Наука, 1967. – 275 с.
32. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Ништ, Р.М. Федоров – М.: Наука, 1988. – 232 с.
33. Nowakowski A. The pressure problem in the stochastic vortex blob method / A. Nowakowski, J. Rocicki, A. Styczek // ESAIM Proceed., – 1996. – V. 1. – P. 125–134.
34. Uhlman J.S. An integral equation formulation of the equations of motion of an incompressible fluid / J.S. Uhlman // NUWC-NPT Technical Report. – 10086, 1992. – 175 p.
35. Dynninkova G.Ya. The integral formula for pressure field in the nonstationary barotropic flows of viscous fluid / G.Ya. Dynninkova // J. Mathematics and Fluid Mechanics, – 2014. – V. 16. – P. 145–162.
36. Ламб Г. Гидромеханика / Г. Ламб – М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. – 928 с.
37. Abbot I.H. Theory of wing sections, including a summary of airfoil data / I.H. Abbot, A.E von Doenhoff – New York: Dover, 1959. – 330 p.
38. Gorban I.M. Flow control near a square prism with the help of frontal flat plates / I.M. Gorban, O.V. Homenko // Continuous and Distributed Systems III: Theory and Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2016. – V. 69. – P. 353–387.
39. Karniadakis G.E. Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects / G.E. Karniadakis, G.S. Triantafyllou // J. Fluid Mechanics, 1992. – V. 238. – P. 1–30.
40. Eleni D.C. Evaluation of the turbulence models for the simulation of the flow over a National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) 0012 airfoil / D.C. Eleni, T.I. Athanasios, M.P. Dionissios // J. Mechanics Engineering Research, 2012. – V. 4. – № 3. – P. 100–111.

*Стаття надійшла до редакції 10.02.17.*