

МАТЕМАТИЧНІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.6:539.3

<https://orcid.org/0000-0002-3523-7505>
<https://orcid.org/0000-0001-5103-1999>

В.А. ВАНІН, С.П. СВІТЛИЧНИЙ

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПТАХОСТІЙКОСТІ ЛОПАТОК АВІАЦІЙНОГО ДВИГУНА

***Анотація.** Розглянуто метод дослідження реакції лопатки авіаційного двигуна на удар птаха. Розроблено гібридну модель контактної взаємодії м'якого тіла з лопаткою авіаційного двигуна з метою впровадження у практику проектування надійних і безпечно ушкоджуваних конструкцій лопаток. Шляхом порівняння результатів чисельного моделювання з результатами натурного експерименту доведено ефективність та працездатність запропонованої моделі та методу дослідження птахостійкості лопаток авіаційних двигунів. Розроблену модель доцільно використовувати у випадках, коли можливість проведення натурних випробувань обмежена, їх реалізація економічно недоцільна або неможлива, а також як інструмент при проектуванні з метою комплексного дослідження впливу конструктивних параметрів лопаток на їх реакцію у разі удару по них м'якого тіла різної маси, з різною швидкістю і під різними кутами. Це, у свою чергу, дозволить скоротити час і матеріальні витрати за рахунок скорочення числа натурних випробувань.*

***Ключові слова:** лопатка авіаційного двигуна, птахостійкість, м'яке тіло, удар, метод скінченних елементів, безсітковий метод згладжених частинок, метод скінченних різниць.*

DOI: 10.35350/2409-8876-2019-14-1-48-62

Вступ

Випадки потрапляння птахів в авіаційний двигун висувують ряд питань, пов'язаних з надійністю авіаційної техніки та безпекою польотів. За період з 1988 по 2014 роки від зіткнення з птахами та іншими тваринами у світі загинуло більше 255 чоловік і втрачено 243 літаки [1]. Число зіткнень літака із птахом у світі зростає пропорційно щільності та інтенсивності польотів повітряних суден. Статистика зіткнень із птахами відображає інтенсивність польотів і зміни у культурі проектування авіаційної техніки. Аналіз чисельності авіапарку комерційних літаків США [2] вказує на тенденцію зменшення числа літаків, обладнаних трьома та чотирма двигунами,

і збільшення числа літаків з двома двигунами. Зменшення кількості двигунів призводить до зменшення надійності літака і збільшення ймовірності виникнення загрозливих для життя льотних пригод, викликаних зіткненнями із птахами. Згідно з даними Європейського агентства авіаційної безпеки [3] 44% випадків зіткнення літака із птахом становлять випадки потрапляння птахів у двигун, внаслідок яких зафіксовані ушкодження різного ступеня тяжкості.

Річний збиток, викликаний зіткненнями із птахами, для комерційних повітряних суден у світі оцінюється у 1,2 млрд доларів США.

Враховуючи те, що найближчими роками ймовірність вирішення проблеми щодо виключення випадків потрапляння птахів у двигун в процесі експлуатації дуже низька, одним з ефективних шляхів зменшення негативного впливу птахів і поліпшення показників якості експлуатації та безпеки польотів є створення двигунів, стійких до ушкоджень, що виникають унаслідок цих зіткнень.

Птахостійкість авіаційних двигунів оцінюють за допомогою методів математичного моделювання та експериментально.

Сучасний авіаційний двигун є дорогим високотехнологічним виробом. Вартість розробки 1 кг конструкції двигуна коштує 5000 тис. доларів США [4]. Однією з причин високої вартості розробки авіаційного двигуна є той факт, що процес проектування пов'язаний з необхідністю проведення дорогих натурних випробувань. Одним з ефективних способів зниження собівартості розробки двигуна є скорочення числа натурних випробувань і їх часткова заміна чисельним експериментом. Крім зниження вартості, застосування обчислювального експерименту дозволяє скоротити терміни розробки в 3 рази і підвищити якість готової продукції [4]. Тому розробка чисельних моделей контактної взаємодії птаха (м'якого тіла) з лопаткою авіаційного двигуна (перешкодою) з метою їх впровадження у практику проектування птахостійких лопаток є актуальним науково-технічним завданням.

1. Постановка завдання

Метою роботи є розробка чисельної моделі контактної взаємодії м'якого тіла з лопаткою авіаційного двигуна і методу дослідження її реакції на удар.

Процес зіткнення м'якого тіла з перешкодою є складним фізико-механічним процесом, з властивими йому особливостями та певними методичними труднощами, пов'язаними з його моделюванням. Задача зіткнення м'якого тіла з перешкодою є нестационарною, просторовою, контактною задачею механіки суцільних середовищ. На рис. 1 показана структурна схема розрахунково-експериментального методу дослідження механічних процесів зіткнення м'якого тіла з лопаткою двигуна.

Практична реалізація методу, що розглядається, передбачає послідовний перехід від реального явища до ідеалізованого подання у вигляді суцільних середовищ з метою отримання якісного і кількісного результату чисельного моделювання реального явища. Фізична модель описує явище гідроудару [5], яке супроводжує процес зіткнення. Виділяють чотири стадії гідроудару: 1) активна (початкова), яка пов'язана з поширенням ударної хвилі; 2) етап спаду тиску, який супроводжується поширенням хвилі розрядження; 3) етап усталеної течії та 4) припинення процесу. Математична модель, яка

представлена системою диференціальних рівнянь у частинних похідних, описує механічний рух і термомеханічний стан деформівних тіл. У сукупності з геометричними і фізичними співвідношеннями, а також граничними, початковими та контактними умовами рівняння математичної моделі складають загальну початково-крайову задачу.

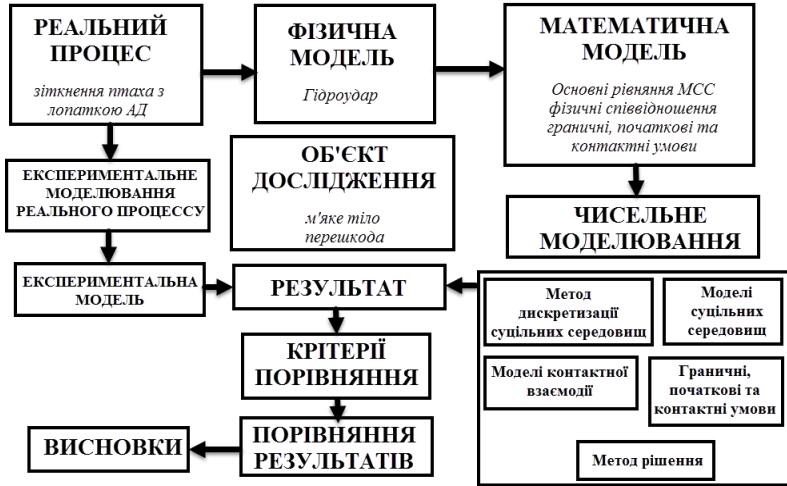


Рисунок 1 – Розрахунково-експериментальний метод дослідження механічних процесів зіткнення м'якого тіла з лопаткою двигуна

Побудова чисельної моделі передбачає перехід від диференціальних рівнянь (сильна форма) до інтегрального рівняння руху (слабка форма) за допомогою варіаційного принципу віртуальних робіт. У рамках цього етапу вирішено наступні завдання: 1) обрано метод дискретизації м'якого тіла і лопатки; 2) досліджено вплив кроку дискретизації на точність отриманого розв'язку; 3) досліджено вплив форми м'якого тіла на розподіл тиску; 4) обрано моделі суцільних середовищ; 5) обрано і описано модель контактної взаємодії; 6) обрано метод рішення.

З метою верифікації чисельної моделі контактної взаємодії м'якого тіла з лопаткою та обґрунтування достовірності одержаних результатів виконано порівняння результатів чисельного моделювання з результатами натурного експерименту. Розроблено критерії порівняння: якісне і кількісне порівняння за допомогою інтегральних показників та за розподілом фізичних параметрів.

2. Фізична модель

Побудову фізичної моделі виконано з урахуванням наступних припущень:

- 1) м'яке тіло являє собою циліндр з відношенням довжини до діаметра, що дорівнює 2;
- 2) матеріал м'якого тіла вважається однорідним;
- 3) міцність м'якого тіла мала у порівнянні з міцністю лопатки, і нею нехтують;
- 4) враховуючи припущення, зазначене у п. 3, відскік м'якого тіла відсутній;

5) силами в'язкого демпфірування у матеріалі та силами тертя на поверхні контакту нехтують;

б) течія у матеріалі за фронтом ударної хвилі одновірною, адіабатичною і незворотною.

На рис. 2 показано чотири фази удару.

Перша фаза – активна (див. рис. 2 а) – характеризується різким наростанням тиску внаслідок різкого гальмування частинок у зоні контакту м'якого тіла з перешкодою і пов'язана з розповсюдженням ударної хвилі у напрямку, протилежному руху. Активну фазу удару описано за допомогою двох параметрів: тиску Гюгоньо та часу наростання тиску. Тиск Гюгоньо [5] визначається відповідно до виразу (1):

$$p_H = p_2 - p_1 = \rho_1 v_s v_0, \tag{1}$$

p_1 і p_2 – тиск перед і позаду фронту ударної хвилі; v_s – швидкість поширення ударної хвилі у середовищі; v_0 – швидкість співударяння.

Друга фаза – поширення хвилі розрядження (див. рис. 2 б) – пов'язана з поширенням хвилі розрядження від вільної поверхні м'якого тіла до центру внаслідок формування зони високих градієнтів тиску. Це, у свою чергу, є причиною радіального руху вільної поверхні м'якого тіла відносно перешкоди. При досягненні хвилею розрядження центру м'якого тіла (точка В, див. рис. 2 б) спостерігається спад тиску. Закон розподілу тиску (2) за радіусом циліндричного об'єму визначається співвідношенням [5]:

$$p_r = p_H e^{\frac{-kr}{R(t)}}, \tag{2}$$

k – константа; r – радіус-вектор, який визначає місце розташування точки, у якій вимірюється тиск; $R(t)$ – максимальний радіус контакту в момент часу t .

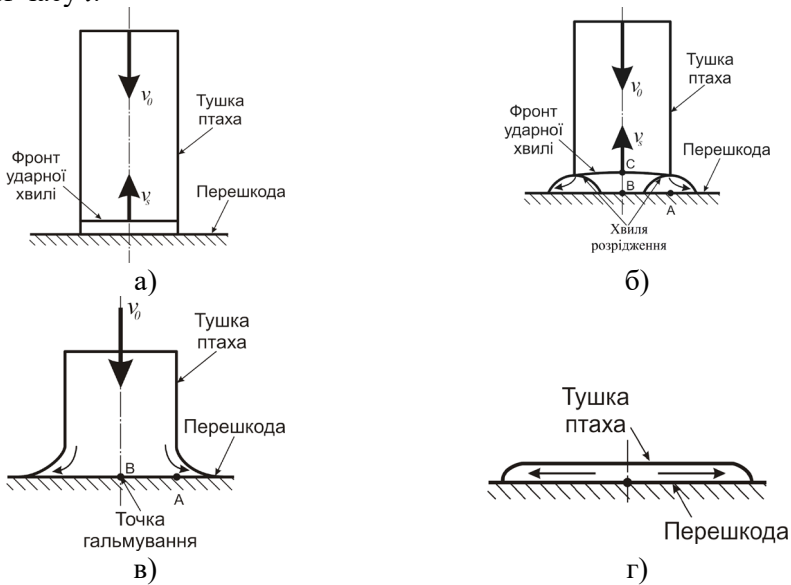


Рисунок 2 – Фази удару

На третій фазі – усталеної течії (див. рис. 2 в) – спостерігається зменшення радіальних тисків у м'якому тілі і виникнення дотичних напружень. Оскільки міцність м'якого тіла при дії дотичних напружень низька, то відбувається його розтікання по поверхні перешкоди. На даному етапі у м'якому тілі виникають стаціонарні поля тиску і швидкості. Тиск гальмування [5] в центральній точці В оцінюють за допомогою виразу (3):

$$p_s = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2, \quad (3)$$

ρ_0 – щільність матеріалу м'якого тіла при нульовій пористості.

На четвертій фазі у міру наближення верхньої вільної поверхні м'якого тіла до перешкоди швидкість її руху зменшується, а тиск зростає. Поле тиску нестационарне і досягає максимального значення у точці гальмування, з подальшим зменшенням до атмосферного в міру віддалення від центру. У міру того, як вільна поверхня м'якого тіла опиняється у даному полі тиску, відбувається миттєвий спад тиску і процес течії припиняється (рис. 2 г).

Тривалість процесу удару [5] можна оцінити за допомогою виразу (4):

$$t_D = L / v_0, \quad (4)$$

L – довжина м'якого тіла.

3. Математична модель

Систему рівнянь [6], що описують рух і термомеханічний стан деформівних суцільних середовищ, записано в актуальній конфігурації, а їх диференціювання та інтегрування виконується за ейлеровими координатами.

$$\rho V = \rho_0, \quad X \in V_T \cup V_b, \quad (5)$$

ρ і ρ_0 – щільність середовища у поточній і початковий момент часу відповідно; $V = J = \det(F)$ – відносний об'єм; V_T – частина простору заданого об'єму, яку займає перешкода; V_b – частина простору заданого об'єму, яку займає м'яке тіло.

$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{div} \sigma, \quad X \in V_T \cup V_b; \quad (6)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = V s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - (p + q) \dot{V}, \quad X \in V_T \cup V_b, \quad (7)$$

v – вектор швидкості; $\frac{dv}{dt}$ – вектор прискорення; $\text{div} \sigma = \nabla \cdot \sigma$ – дивергенція тензора напружень; $\nabla = \frac{\partial(\dots)}{\partial x} i + \frac{\partial(\dots)}{\partial y} j + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} k$ – оператор Гамільтона (оператор Набла); σ – тензор напружень Коші; e – питома

внутрішня енергія; $\dot{\varepsilon}$ – тензор швидкостей деформацій; p – тиск; q – об’ємна в’язкість; s_{ij} – компоненти девіатора напружень.

Систему рівнянь (5)–(7) доповнено кінематичним (8) і геометричними (9), (10) співвідношеннями.

$$\frac{du}{dt} = v, X \in V_T \cup V_b, \quad (8)$$

u – вектор переміщень.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right); \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (10)$$

Особливості поведінки деформівних середовищ, які виявляються у вигляді опору деформації, описано фізичними співвідношеннями (11)–(13).

У разі пружно-пластичної поведінки матеріалу перешкоди компоненти тензора напружень мають вигляд:

$$p = K \left(\frac{1}{V} - 1 \right); \quad (11)$$

$$s_{ij}^\nabla + 2G\dot{\lambda}s_{ij} = 2G(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{kk}g_{ij}), \quad (12)$$

K – модуль об’ємного стиснення; s_{ij}^∇ – похідна Яуманна від девіатора напружень; G – модуль зсуву; $\dot{\lambda}$ – скалярний параметр; g_{ij} – компоненти метричного тензора.

Рівняння стану (13) для м’якого тіла [7, р. 475-476] має вигляд:

$$p = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + C_3\mu^3, \quad (13)$$

$\mu = \rho / \rho_0 - 1$ – коефіцієнт конденсації; $C_0 = 0$, $C_1 = \rho_0 c_0^2$, $C_2 = (2k - 1)C_1$; $C_3 = (k - 1)(3k - 1)C_1$ – константи; k – експериментальний коефіцієнт; c_0 – об’ємна швидкість звуку.

Для отримання єдиного розв’язку система рівнянь доповнена граничними (14), (15), контактними (16), (17) та початковими умовами (18).

$$u = u(x_\Gamma^i, t) = 0, X \in \Gamma_1; \quad (14)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = 0, X \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \quad (15)$$

Γ_1 – границя перешкоди, на якій задані кінематичні граничні умови; Γ_2 і Γ_3 – вільні границі перешкоди і м’якого тіла, на яких задані силові граничні умови у разі відсутності попередніх напружень.

$$(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \cdot n_i = 0, \text{ при } x^+ = x^-, X \in \Gamma_4; \quad (16)$$

$$(v^+ - v^-) \cdot n_i = 0, \text{ при } x^+ = x^-, X \in \Gamma_4, \quad (17)$$

Γ_4 – спільна границя розділу двох середовищ, на якій задаються контактні умови; n – вектор спільної нормалі до поверхонь розділу середовищ.

$$x(X, 0) = X, \quad \frac{dx}{dt}(X, 0) = v_0, \quad \rho(X, 0) = \rho_0. \quad (18)$$

Таким чином, сформульовано систему визначальних рівнянь математичної моделі для розв'язування тривимірної, нестационарної і суттєво нелінійної задачі. Такі рівняння не мають аналітичних розв'язків і розв'язуються наближено з використанням чисельних методів.

4. Чисельна модель

Для побудови чисельного методу розв'язку системи визначальних рівнянь математичної моделі використано варіаційний принцип віртуальних робіт. Нехай δx_i – функція, що задовольняє граничним умовам на границі Γ_l . Помноживши функцію δx_i на відповідні компоненти в рівняннях (6), (15) і (16) і обчислюючи інтеграл для актуальної конфігурації, отримаємо (19):

$$\int_{\Omega} (\rho \ddot{x}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}) \delta x_i d\Omega + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \sigma_{ij} n_j \delta x_i d\Gamma + \int_{\Gamma_4} (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) n_j \delta x_i d\Gamma = 0. \quad (19)$$

Застосувавши теорему Остроградського-Гаусса для обчислення другого доданка в першому інтегралі, після відповідних перетворень отримаємо слабке формулювання завдання (20):

$$\delta \pi = \int_{\Omega} \rho \ddot{x}_i \delta x_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} d\Omega = 0. \quad (20)$$

Для дискретизації лопатки використано чотирьохвузловий оболонковий елемент з однією точкою інтегрування [7, р. 114]. У випадку скінченно-елементної дискретизації інтегральне рівняння (20) зводиться до розв'язку матричного рівняння (21):

$$Ma^n + F_{int}^n(u) - H = 0, \quad (21)$$

a^n – вектор вузлових прискорень на n -му часовому кроці рішення; M – діагональна матриця мас; F_{int}^n – вектор внутрішніх сил на n -му кроці рішення; H^n – вектор сил в'язкого опору.

Вираз для обчислення матриці мас (22) має вигляд:

$$M = \sum_e \int_{\Omega} \rho N N^T d\Omega; \quad (22)$$

N – матриця інтерполяції.

Для визначення швидкості (23), кутової швидкості (24) та координат (25) елемента на серединній поверхні використано білінійну функцію форми (26) [7, р. 114]:

$$v^m = N_J(r, s) v_J; \quad (23)$$

$$\theta^m = N_J(r, s) \theta_J; \quad (24)$$

$$x^m = N_J(r, s) x_J; \quad (25)$$

$$N_J = \frac{1}{4} (1 + r r_J) (1 + s s_J), \quad (26)$$

$J = 1, 2, 3$ і 4 – номери вузлів; v_J, θ_J і x_J – значення швидкості, кутової швидкості та координата відповідного вузла скінченного елемента; r, s – натуральні координати скінченного елемента, r_j, s_j приймають значення $(\pm 1; \pm 1)$ у відповідних вузлах елемента.

Для даного типу скінченного елемента використано формулювання у швидкостях і коротаційну локальну систему координат. Швидкість (27) будь-якої точки елемента визначають наступним чином:

$$v = v^m - \hat{z} e_3 \times \theta, \quad (27)$$

\hat{z} – координата точки у локальній системі координат, пов'язаної із серединною поверхнею елемента; \hat{e}_3 – одиничний вектор нормалі коротаційної (локальної) системи координат.

Компоненти тензора швидкостей деформацій (28)–(32) визначено наступним чином [7, р. 114–115]:

$$\hat{d}_x = B_{1J} \hat{v}_{xJ} + \hat{z} B_{1J} \hat{\theta}_{yJ}; \quad (28)$$

$$\hat{d}_y = B_{2J} \hat{v}_{yJ} - \hat{z} B_{2J} \theta_{xJ}; \quad (29)$$

$$2\hat{d}_{xy} = B_{2J} \hat{v}_{xJ} + B_{1J} \hat{v}_{yJ} + \hat{z} (B_{2J} \hat{\theta}_{yJ} - B_{1J} \hat{\theta}_{xJ}); \quad (30)$$

$$2\hat{d}_{yz} = B_{2J} \hat{v}_{zJ} - N_J \hat{\theta}_{xJ}; \quad (31)$$

$$2\hat{d}_{xz} = B_{1J} \hat{v}_{zJ} + N_J \hat{\theta}_y, \quad (32)$$

де

$$B_{1J} = \frac{\partial N_J}{\partial \hat{x}};$$

$$B_{2J} = \frac{\partial N_J}{\partial \hat{y}},$$

Зв'язок між компонентами глобальної і локальної системи координат (33) здійснюється наступним чином [7, р. 113]:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{Bmatrix} = [\mu] \{ \hat{A} \}, \quad (33)$$

$\{\mu\}$ – матриця перетворення.

Рівнодіючі сили і моменти (34), (35) у точці інтегрування елемента визначено таким чином [7, р. 115]:

$$\hat{f}_{\alpha\beta}^R = \int \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z}; \quad (34)$$

$$\hat{m}_{\alpha\beta}^R = -\int \hat{z} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z}, \quad (35)$$

α, β – індекси простору.

Вузлові сили і моменти пов'язані з рівнодіючими співвідношеннями (36)–(41):

$$\hat{f}_{xJ} = A(B_{1J}\hat{f}_{xx}^R + B_{2J}\hat{f}_{xy}^R); \quad (36)$$

$$\hat{f}_{yJ} = A(B_{2J}\hat{f}_{yy}^R + B_{1J}\hat{f}_{xy}^R); \quad (37)$$

$$\hat{f}_{zJ} = Ak(B_{1J}\hat{f}_{xz}^R + B_{2J}\hat{f}_{yz}^R); \quad (38)$$

$$\hat{m}_{xJ} = A(B_{2J}\hat{m}_{yy}^R + B_{1J}m_{xy}^R - \frac{k}{4}\hat{f}_{yz}^R); \quad (39)$$

$$\hat{m}_{yJ} = A(B_{1J}\hat{m}_{xx}^R + B_{2J}m_{xy}^R - \frac{k}{4}\hat{f}_{xz}^R); \quad (40)$$

$$\hat{m}_{zJ} = 0, \quad (41)$$

A – площа елемента; k – коефіцієнт зсуву.

Вузлові сили і моменти, які наведено вище, перетворюються з локальної системи координат в глобальну за допомогою виразу (33). Після цього виконується поелементне підсумовування вузлових зусиль, визначених у глобальній системі координат, і отримані значення підставляють у рівняння руху (21).

Для дискретизації м'якого тіла використано безсітковий метод згладжених частинок (в іноземній літературі Smoothed Particle Hydrodynamics), який використовує підхід Лагранжа для опису руху суцільного середовища [7, р. 637–642, 8–9]. Суцільне середовище представлено дискретним набором рухомих частинок, які допускають довільну зв'язність одна з одною. Кожна з частинок є точкою інтерполяції, у якій задано властивості середовища. Частинка визначається просторовими координатами $x_i(t)$ і масою $m_i(t)$. Властивості частинки визначено на довжині згладжування (h) за допомогою функції ядра (W). Властивість A

частинки у довільній точці r_i визначено шляхом підсумовування відповідних величин всіх частинок, що знаходяться у межах двох довжин згладжування:

$$A(r_i) = \sum_{j=1}^N m_j \frac{A_j}{\rho_j} W((r_i - r_j), h),$$

m_j – маса j -ї частинки; A_j – значення параметра A j -ї частинки; ρ_j – щільність j -ї частинки; r – координата; h – довжина згладжування; W – вагова функція або ядро; N – кількість сусідніх до j -ї частинок.

Функцію ядра визначено функцією згладжування $\theta(x)$:

$$W(x, h) = \frac{1}{h(x)^d} \theta(x),$$

d – параметр, що визначає мірність простору, $x = r / h$.

$$\theta(x) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{h}\right)^3 & 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 & 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \frac{r}{h} > 2 \end{cases}.$$

Після дискретизації основні рівняння математичної моделі приймають вигляд (42)–(46):

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}, \tag{42}$$

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}^\beta, \tag{43}$$

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j v_{ji}^\alpha \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}^\beta, \tag{44}$$

$$\frac{du_i}{dt} = v_i, \tag{45}$$

$$\frac{d}{dt} (h(t)) = h(t) \operatorname{div}(v). \tag{46}$$

У виразах (43), (44) α, β – індекси простору.

Для дискретизації рівняння руху за часом використано модифікацію методу центральних різниць, який реалізовано у вигляді явної схеми 2-го порядку зі змінним кроком за часом [7, р. 501]. Для відшукування розв’язку рівняння (21) час протікання процесу розбито на n_{TS} часових інтервалів або

кроків за часом Δt^n , де $n = 1 \dots n_{TS}$. Вектор вузлових прискорень (47) на n -му часовому шарі визначено в результаті обертання матриці мас:

$$a^n = M^{-1}(f_{im}(u^n, t^n) + H^n). \quad (47)$$

Скінченно-різницевий вираз для визначення вектора швидкості на напівцілому часовому шарі має вигляд (48):

$$v^{n+\frac{1}{2}} = v^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n a^n. \quad (48)$$

Скінченно-різницевий вираз для визначення вектора вузлових переміщень на наступному часовому шарі t^{n+1} має вигляд (49):

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} v^{n+\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

Оновлене положення вузлів отримуємо шляхом додавання до вектора початкового положення значень вузлових переміщень, обчислених на наступному часовому шарі (50):

$$x^{n+1} = x^0 + u^{n+1}. \quad (50)$$

Приріст кроку за часом на цілому та півцілому часових шарах визначено відповідно до виразів (51), (52):

$$\Delta t^n = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}; \quad (51)$$

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Delta t^n + \Delta t^{n+1}). \quad (52)$$

Для забезпечення стійкості явної різницевої схеми зі змінним кроком за часом повинна виконуватися умова (53):

$$\Delta t_i^2 \leq \frac{4\delta_i}{\omega_{max}^2}, \quad (53)$$

де ω_{max} – вища власна частота системи; параметр $0 \leq \delta_i = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \leq 1$.

5. Результати дослідження

Використовуючи розглянутий у роботі метод і побудовану чисельну модель контактної взаємодії м'якого тіла з лопаткою авіаційного двигуна, проведено чисельні дослідження реакції лопатки з титанового сплаву на удар м'якого тіла різної маси, з різною швидкістю і під різними кутами. З метою верифікації чисельної моделі м'якого тіла виконано тестові розрахунки і порівняння отриманого результату з результатами натурних експериментів. Постановку завдання, математичну і чисельну модель, а також результати дослідження у випадку удару м'якого тіла масою 1 кг по жорсткій перешкоді розглянуто в роботі [10]. Постановку завдання, математичну і чисельну модель, а також результати дослідження у випадку удару м'якого тіла масою 1,8 кг по пружно-деформованій перешкоді наведено в роботі [11].

На рис. 3 показано характер деформування м'якого тіла і лопатки протягом перших 250 мкс для випадку косоного удару м'якого тіла масою 82,6 г зі швидкістю 302,1 м/с під кутом $36,4^\circ$ до консольно закріпленої лопатки з титанового сплаву, яка має наступні розміри: довжина 311,2 мм, ширина 88,9 мм і товщина 4,27 мм. Точка удару м'якого тіла по лопатці розташована на відстані 70% розмаху лопатки.

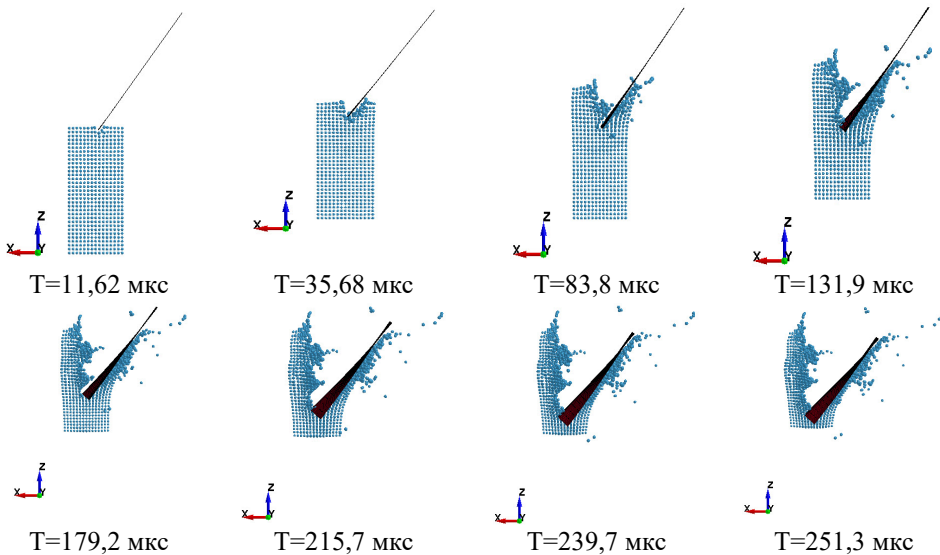


Рисунок 3 – Характер деформування м'якого тіла і лопатки при косому ударі

Отриманий результат дозволяє аналізувати траєкторії руху частинок м'якого тіла і оцінювати розміри і характер ймовірного пошкодження лопатки. У випадку косоного удару м'якого тіла по лопатці відбувається поділ м'якого тіла на дві частини, одна з яких взаємодіє з поверхнею лопатки, а інша рухається у первісному напрямку.

На рис. 4 показано графік зміни динамічного прогину лопатки у кінцевому перетині у випадку фронтального удару м'якого тіла масою 100,5 г зі швидкістю 177,4 м/с по консольно закріпленій лопатці з титанового сплаву. Виконано порівняння результату чисельного моделювання з результатом

натурного експерименту [12]. Отримані результати задовільно узгоджуються з результатами натурного експерименту. У випадку фронтального удару м'якого тіла лопатка робить нелінійні затухаючі згинальні коливання. Слід відзначити, що коливання несиметричні відносно початкового положення рівноваги. Причиною несиметричності коливань є залишкові пластичні деформації, що виникають у кореневому перетині лопатки.

На рис. 5 показано результат порівняння згинальних напружень у кореневому перетині лопатки для випадків фронтального і косого удару. Досліджено вплив швидкості та кута зіткнення на розподіл напружень у кореневому перетині лопатки.

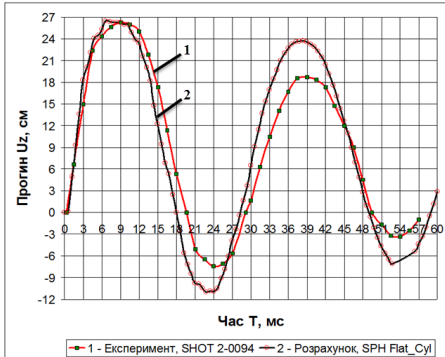
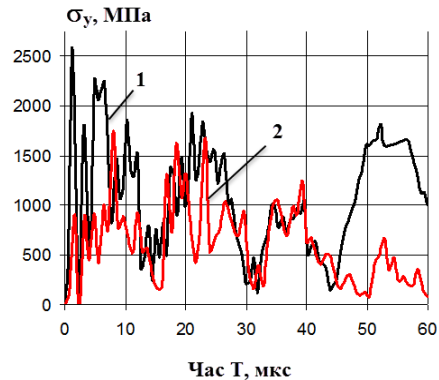


Рисунок 4 – Графік зміни динамічного прогину лопатки у кінцевому перетині при фронтальному ударі



1 – $m = 100,5$ г, $V_{im} = 177,4$ м/с, $\alpha = 90^\circ$;
2 – $m = 82,6$ г, $V_{im} = 302,1$ м/с, $\alpha = 36,4^\circ$;

Рисунок 5 – Вплив параметрів ударного процесу на розподіл нормальних напружень у кореневому перетині лопатки

Аналізуючи розподіл нормальних напружень у кореневому перетині лопатки для обох випадків удару, слід відзначити наступне: з точки зору ймовірності пошкодження випадок фронтального удару є більш небезпечним, ніж випадок косого удару. Незважаючи на те, що у випадку косого удару швидкість м'якого тіла вища, ніж для випадку фронтального удару, проте рівень напружень для цього випадку нижчий за відповідний рівень напружень у разі фронтального удару. Це свідчить про більш суттєвий вплив кута зіткнення на рівень напружень, ніж швидкості. Для обох випадків рівень напружень перевищує межу текучості, про що свідчить розвиток пластичних деформацій у кореневому перетині лопатки.

Висновки

1. Розроблено гібридну модель контактної взаємодії м'якого тіла з лопаткою авіаційного двигуна, яка поєднує два методи дискретизації: метод скінченних елементів для лопатки та безсітковий метод згладжених частинок для м'якого тіла.

2. Використання безсіткового методу згладжених частинок для дискретизації м'якого тіла дозволило усунути проблеми чисельної нестійкості та розширило область моделювання і дослідження механічних процесів, які супроводжують удар.

3. Отримано якісне узгодження результатів чисельного моделювання з результатами натурального експерименту, що свідчить про працездатність запропонованої моделі та можливість застосування у якості альтернативи натурним випробуванням. Це, у свою чергу, спрощує, прискорює і знижує матеріальні витрати на проектування нових птахостійких лопаток.

4. Застосування у чисельній моделі оболонкових елементів першого порядку з однією точкою інтегрування для дискретизації лопатки знижує обчислювальні витрати порівняно з елементами, які використовують повну схему інтегрування, а це, у свою чергу, підвищує обчислювальну ефективність моделі.

5. Модель дає змогу аналізувати можливі наслідки удару м'якого тіла по лопатці, оцінювати розміри і вид ймовірного пошкодження, а також отримувати розподіл параметрів, які характеризують термомеханічний стан лопатки за часом, а також за об'ємом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Wildlife, S.: Civil Aircraft in the United States 1990–2013 // Federal Aviation Administration National Wildlife Strike Database. Report № 20. July 2014.
2. Dolber R. A. Birds and Aircraft: Fighting for airspace in crowded skies [Електронний ресурс] / R. A. Dolber. – Режим доступу: http://www.aphis.usda.gov/wildlife_damage/nwrc/publications/00pubs/00-13.PDF. – 9.10.2011. – Загол. з екрана.
3. Bird population trends and their impact on Aviation safety 1999-2008 [Text]: EASA safety report / European aviation safety agency. Safety analysis and research department executive directorate; Maragakis I. – 2009. – 24 p.
4. Зеленков Ю. А. Использование суперкомпьютеров при проектировании авиационных двигателей [Електронний ресурс] / Ю. А. Зеленков. – Режим доступу: <http://hpc-russia.ru/pdf/Saturn.pdf>. – 24.10.2011 г. – Загол. з екрана.
5. Impact Behavior of Low Strength Projectiles [Text]: Technical report: / University of Dayton Research Institute; Wilbeck J. S. – July 1978. – 129 p. – AFML-TR-77-134. – ADA060423.
6. Светличный С. П. Численный анализ модели косоугольного удара мягкого тела по модельной лопатке АД [Текст] / С. П. Светличный, В. А. Ванин // Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях: Труды междунар. науч.-практ. конф., 22–25 мая 2018 г. – Х.: Харьк. нац. ун-т имени В. Н. Каразина, 2018. – С. 270–273.
7. J. O. Hallquist. LS-DYNA. Theory Manual. – Livermore: LSTC, 2006. – 680 p.
8. J. J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics [Електронний ресурс] / J. J. Monaghan. – Режим доступу: <http://www.astro.lu.se/~david/teaching/SPH/notes/annurev.aa.30.090192.pdf>. – 28.11.2015. – Загол. з екрана.
9. J. J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics [Електронний ресурс] / J. J. Monaghan. – Режим доступу: http://cg.informatik.unifreiburg.de/intern/seminar/particleFluids_Monaghan%20-%20SPH%20-%202005.pdf. – 1.12.2015. – Загол. з екрана.
10. Ванин, В. А. Численное исследование взаимодействия тушки птицы с преградой на основе сеточного и бессеточного методов [Текст] / В. А. Ванин, С. П. Светличный // Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сер.: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Х.: НТУ «ХПИ», 2016. – №16 (1188). – С. 5–15.

11. Светличный, С.П. Анализ деформаций стальной плиты-мишени при ударе мягкого тела [Текст] / С.П. Светличный // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: научно-технический журнал. – 2017. – Вып. 77. С. 73–80.
12. Structural Element and Real Blade Impact Testing [Text]: Technical report: / University of Dayton Research Institute; Bertke, R. S. – January 1983. – 468 p. – AFWAL-TR-82-2121. – ADA127744.

REFERENCES

1. Wildlife, S.: Civil Aircraft in the United States 1990–2013 // Federal Aviation Administration National Wildlife Strike Database. Report № 20. July 2014.
2. Dolber R. A. Birds and Aircraft: Fighting for airspace in crowded skies [Internet resource] / R. A. Dolber. – Rezhim dostupu: http://www.aphis.usda.gov/wildlife_damage/nwrc/publications/00pubs/00-13.PDF. – 9.10.2011. – Zagol. z ekrana.
3. Bird population trends and their impact on Aviation safety 1999-2008 [Text]: EASA safety report / European aviation safety agency. Safety analysis and research department executive directorate; Maragakis I. – 2009. – 24 p.
4. Zelenkov Yu. A. Ispolzovanie superkompyuterov pri proektirovanii aviatsionnykh dvigateley [Internet resource] / Yu. A. Zelenkov. – Rezhim dostupu: <http://hpc-russia.ru/pdf/Saturn.pdf>. – 24.10.2011. – Zagol. z ekrana.
5. Impact Behavior of Low Strength Projectiles [Text]: Technical report: / University of Dayton Research Institute; Wilbeck J. S. – July 1978. – 129 p. – AFML-TR-77-134. – ADA060423.
6. Svetlichnyy S. P. Chislenyy analiz modeli kosogo udara myagkogo tela po modelnoy lopatke AD [Text] / S. P. Svetlichnyy, V. A. Vanin // Kompyuternoe modelirovanie v naukoemkikh tekhnologiyakh: Trudy mezd. nauch.-prakt. konf., 22–25 maya 2018 g. – Kh.: Khark. nats. u-t imeni V. N. Karazina, 2018. – 270–273.
7. J. O. Hallquist. LS-DYNA. Theory Manual. – Livermore: LSTC, 2006. – 680 p.
8. J. J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics [Internet resource] / J. J. Monaghan. – Rezhim dostupu: <http://www.astro.lu.se/~david/teaching/SPH/notes/annurev.aa.30.090192.pdf>. – 28.11.2015. – Zagol. z ekrana.
9. J. J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics [Internet resource] / J. J. Monaghan. – Rezhim dostupu: http://cg.informatik.unifreiburg.de/intern/seminar/particleFluids_Monaghan%20-%20SPH%20-%202005.pdf. – 1.12.2015. – Zagol. z ekrana.
10. Vanin, V. A. Chislennoe issledovanie vzaimodeystviya tushki ptitsi s pregradoy na osnove setochnogo i bezsetochnogo metodov [Text] / V. A. Vanin, S. P. Svetlichnyy // Vestnik Natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta «KhPI». Ser.: Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike i tekhnologiyakh. – Kh.: NTU «KhPI», 2016. – №16 (1188). – 5–15.
11. Svetlichnyy, S.P. Analiz deformatsiy stalnoy plity-misheni pri udare myagkogo tela [Text] / S.P. Svetlichnyy // Otkrytye informatsionnye i kompyuternye integrirovannye tekhnologii: nauchno-tekhnicheskii zhurnal. – 2017. – Vyp. 77. 73–80.
12. Structural Element and Real Blade Impact Testing [Text]: Technical report: / University of Dayton Research Institute; Bertke, R. S. – January 1983. – 468 p. – AFWAL-TR-82-2121. – ADA127744.

Стаття надійшла до редакції 20.01.2019.