УДК 517.91, 531.38, 531.36

©2013. **А.М. Ковалев, Г.В. Горр, В.Н. Неспирный**

ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В МЕХАНИКЕ

Метод инвариантных соотношений, развитый А. Пуанкаре, Т. Леви-Чивитой, С.А. Чаплыгиным, П.В. Харламовым, обобщен на случай неавтономных дифференциальных уравнений. На его основе построены новые решения уравнений движения неавтономного гиростата, отвечающие равномерным вращениям относительно наклонной оси.

Ключевые слова: *инвариантные соотношения, инвариантное множество, неавтономные системы.*

Введение. Методы исследования инвариантных соотношений (ИС) обыкновенных дифференциальных уравнений нашли широкое применение как в построении новых решений уравнений динамики твердого тела [1–3], так и в изучении задач управления и устойчивости механических систем [4,5]. Теория ИС рассматривалась в различных постановках: А. Пуанкаре [6] дал определение системы ИС для автономных дифференциальных уравнений; Т. Леви-Чивита [7] предложил метод исследования одного и системы ИС для неавтономного случая в предположении, что первые производные от них равны нулю на заданных ИС; С.А. Чаплыгин [8] получил систему дифференциальных уравнений для системы ИС; П.В. Харламов [9] развил метод ИС автономных дифференциальных уравнений, который обобщает подход Т. Леви-Чивиты. В последние годы [10–12] теория ИС применена к интегрированию дифференциальных уравнений на инвариантных соотношениях.

В данной статье рассмотрена теория ИС неавтономных систем дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

в которой введены следующие обозначения: t – независимая переменная, $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные функции этой переменной, а $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ – функции от $n+1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве U пространства размерности $n+1$, в котором координатами являются компоненты вектора $(x_1, \ldots, x_n, t)$. Будем предполагать, что функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $i = \overline{1, n}$, бесконечное число раз дифференцируемы в области U.

Следуя [13], преобразуем систему (1) к автономному виду. Запишем, полагая $t = x_{n+1}$, новую систему

$$\dot{u}_i = Y_i(u_1, \ldots, u_{n+1}) \quad (i = \overline{1, n+1}), \tag{2}$$

где $Y_i \equiv X_i,\ i = \overline{1,n},\ \ Y_{n+1} \equiv 1$. В силу принятого предположения о гладкости правых частей системы (1) существует единственное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $x_i(t_0) = x_i^{(0)}\ \big((x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0) \in U\big)$, определенное в некоторой окрестности t_0. Ему будет соответствовать решение $u_{n+1}(t) = t + t_0, \quad u_i(t) = x_i(t + t_0) \quad (i = \overline{1,n})$ уравнений (2) с начальными условиями

$$u_i(0) = x_i^{(0)} \quad (i = \overline{1,n}), \qquad u_{n+1}(0) = t_0. \tag{3}$$

***Определение* 1.** [14] Непустое множество $M \subseteq U$ называется инвариантным множеством (ИМ) по отношению к системе (2), если для любой точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0)$ из M решение уравнения (2) с начальными условиями (3) удовлетворяет условию $(u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)) \in M$ при $t \in (t_1 + t_0, t_2 - t_0)$, где (t_1, t_2) – интервал существования соответствующего решения системы (1).

Инвариантное множество может быть определено системой функциональных уравнений

$$\varphi_i(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0, \qquad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

где функции φ_i предполагаются непрерывно-дифференцируемыми и функционально независимыми в окрестности точки $u^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0)$, удовлетворяющей всем соотношениям (4), причем независимость обеспечивается линейной независимостью градиентов функций φ_i

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_{n+1}}\right) \qquad (i = \overline{1,k})$$

в точке $u^{(0)}$, что эквивалентно ранговому условию [13]:

$$\operatorname{rank}\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_k(u)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_k(u)}{\partial u_{n+1}} \end{pmatrix}\right|_{u=u^{(0)}} = k. \tag{5}$$

Построение решения на ИМ (4) осуществляется следующим образом. Поскольку выполняется условие (5), то в матрице Якоби есть минор k-го порядка, определитель которого отличен от нуля. Без ограничения общности можно считать, что это минор, состоящий из первых k столбцов (в противном случае можно изменить порядок переменных u_j), т. е.

$$\det\left.\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}\right)\right|_{i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,k}} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции в окрестности точки $u^{(0)}$ имеем возможность выразить первые k переменных через остальные:

$$u_i = u_i(u_{k+1}, \ldots, u_{n+1}) \quad (i = \overline{1,k}). \tag{6}$$

Подставив выражения (6) в уравнения (2), получим

$$\dot{u}_i = Z_i(u_{k+1}, \ldots, u_{n+1}) \quad (i = \overline{k+1, n+1}). \tag{7}$$

Пусть общее решение системы (7) представляется в виде

$$u_i = u_i(x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0, t) \quad (i = \overline{k+1, n}), \qquad u_{n+1} = t_0 + t. \tag{8}$$

Тогда система (2) имеет решение (6), (8).

Итак, при рассмотрении системы дифференциальных уравнений на инвариантном множестве порядок системы может быть понижен до размерности множества. Данный результат показывает важность задачи нахождения инвариантных множеств, которую можно сформулировать следующим образом.

Здесь и далее будем рассматривать соотношения (4) как систему независимых функциональных уравнений, определяющих некоторое множество точек из R^{n+1}, не являющееся, вообще говоря, инвариантным для исследуемой системы.

***Задача* 1.** Пусть задана система дифференциальных уравнений (2) и система соотношений вида (4). Требуется определить, является ли множество точек, удовлетворяющих соотношениям (4), инвариантным по отношению к системе (2).

Если данная задача имеет отрицательный ответ, то возникает вопрос о нахождении инвариантного подмножества и представлении его в виде (4).

***Задача* 2.** Пусть имеем систему дифференциальных уравнений (2) и множество G, заданное уравнениями (4). Требуется найти максимальное по включению подмножество $M \subset G$, которое было бы инвариантным по отношению к системе (2). Или, другими словами, необходимо дополнить систему (4) минимальным количеством соотношений, сохраняя выполненным ранговое условие так, чтобы все они в совокупности определяли инвариантное множество.

Следует отметить, что, согласно определению 1, пустое множество не является инвариантным, так что задача 2 может не иметь решения.

Исследуем сначала задачи 1 и 2 для случая одного уравнения

$$f(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0. \tag{9}$$

Будем предполагать, что функция $f(u_1, \ldots, u_{n+1})$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем переменным. Ранговое условие запишется в виде неравенства нулю градиента функции

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}\right) \neq 0, \tag{10}$$

которое должно выполняться во всей области U.

Определение 2. Соотношение (9) называется инвариантным соотношением системы (2), если множество G точек, удовлетворяющих этому соотношению, содержит некоторое инвариантное множество.

Таким образом, чтобы задача 2 для соотношения (9) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы это соотношение было инвариантным.

2. Условие инвариантности соотношения (9). Для ИС (9) построим последовательность функций

$$f^{(1)}(u_1,\dots,u_{n+1}) = f(u_1,\dots,u_{n+1}), \tag{11}$$
$$f^{(l)}(u_1,\dots,u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{(l-1)}(u_1,\dots,u_{n+1})}{\partial u_j} Y_j(u_1,\dots,u_{n+1}),\ l=2,3,\dots,$$

члены которой являются производными от соответствующих функций в силу уравнений (2).

Лемма 1. *Пусть для уравнений* (2) *соотношение* (9) – *инвариантное, и множество G, определяемое им, содержит инвариантное множество M. Тогда для точек множества M должны выполняться соотношения*

$$\begin{array}{l} f^{(1)}(u_1,\dots,u_{n+1}) = 0, \\ f^{(2)}(u_1,\dots,u_{n+1}) = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ f^{(l)}(u_1,\dots,u_{n+1}) = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \end{array} \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку (9) – ИС, то множество G содержит M, являющееся ИМ. Выбирая произвольную точку $u^{(0)} = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},t_0)$ из M, возьмем решение $u_i = u_i(t)$, удовлетворяющее начальным условиям (3). Подстановка этого решения в уравнение (9) дает, согласно определению ИМ, тождество

$$f^{(1)}(u_1(t),\dots,u_{n+1}(t)) \equiv 0. \tag{13}$$

Многократно дифференцируя это тождество по t, получим

$$\begin{array}{l} f^{(2)}(u_1(t),\dots,u_{n+1}(t)) = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ , \\ f^{(l)}(u_1(t),\dots,u_{n+1}(t)) = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ . \end{array} \tag{14}$$

Так как равенства (13) и (14) справедливы для всех t, для которых определено решение уравнения (2), то они верны и при $t=0$, а значит, и для точки $u^{(0)}$. В силу произвольности $u^{(0)}$ заключаем, что соотношения (12) выполнены всюду на M. □

Полученная на основе (11) бесконечная система функциональных уравнений (12) для функции (9) должна описывать непустое множество в U. Таким образом, справедливо следующее следствие из леммы.

***Следствие* 1.** Необходимым условием инвариантности соотношения (9) является совместность бесконечной системы уравнений (12).

Рассмотрим пример неавтономной системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + \frac{1}{t^2+1}x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\frac{1}{t^2+1} + a(t)x_2, \tag{15}$$

где $a(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция в окрестности t_0. Исследуем, при каких условиях у системы (15) существует линейное по фазовым переменным ИС следующего вида:

$$f(x_1, x_2, t) = x_2 + tx_1 = 0. \tag{16}$$

Найдем производные от функции (16) в силу системы (15) всех порядков:

$$\begin{aligned} &\dot{f}(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t)\psi(t), \\ &\ddot{f}(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t)(\psi^2(t) + \dot{\psi}(t)), \\ &\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\psi(t) = a(t) + \dfrac{t}{t^2+1}$. Очевидно, что и все последующие производные будут содержать f как множитель. Следовательно, система (12) в нашем случае совместна на множестве (16). Из (17) вытекает, что при $a(t) = -\dfrac{t}{t^2+1}$ система (15) допускает первый интеграл $x_2 + tx_1 = C$ (C – произвольная постоянная).

Данный пример показывает, что представляет особый интерес случай, когда множество G является ИМ. Он рассмотрен Т. Леви-Чивитой [7]. Согласно определению [7], соотношение (9) называется инвариантным соотношением по отношению к системе (1), если из условия $f(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), t_0) = 0$ вытекает равенство $f(x_1(t), \dots, x_n(t), t) = 0$, справедливое для всех t (имеются ввиду те значения, для которых существует решение $x_i = x_i(t)$ уравнений (1)). Для функции (9) получено уравнение

$$\frac{df(x_1, \dots, x_n, t)}{dt} = f(x_1, \dots, x_n, t)\lambda(x_1, \dots, x_n, t), \tag{18}$$

где левая часть является полной производной функции $f(x_1, \dots, x_n, t)$. Для выяснения условий, при которых справедливо уравнение (18), продифференцируем (9) в силу системы (1). Подставляя в полученное выражение точки множества G, имеем

$$F(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i} X_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0. \tag{19}$$

При условии (10) из (9) определим

$$x_1 = x_1(x_2, \dots, x_n, f, t).$$

Внесем это значение в уравнение (19) и предположим, что функция $F(x_1(x_2, \dots, x_n, f, t), x_2, \dots, x_n, t)$ является аналитической функцией переменной f. Запишем разложение (19) в окрестности $f = 0$:

$$F_0(x_2, \dots, x_n, t) + fF_1(x_1, \dots, x_n, t) + f^2F_1(x_1, \dots, x_n, t) + \ldots = 0. \tag{20}$$

При $f = 0$ из (20) следует равенство

$$F_0(x_2, \dots, x_n, t) = 0, \tag{21}$$

тождественное выполнение которого служит условием инвариантности (9). На основании представления (20) с учетом (21), функция $F(x_1, \dots, x_n, t)$ может быть приведена к виду, аналогичному правой части (18). Таким образом, аналитичность первой производной от функции (9) по $f(x_1, \dots, x_n, t)$ является достаточным условием справедливости уравнения (18). В более общем случае для функции $f(x_1, \dots, x_n, t)$ можно ввести уравнение

$$\frac{df(x_1, \dots, x_n, t)}{dt} = f^{\mu}(x_1, \dots, x_n, t)\lambda(x_1, \dots, x_n, t), \tag{22}$$

где $\mu > 1$, которое для автономной системы дифференциальных уравнений было указано С.А. Чаплыгиным [8].

Поскольку вопрос об инвариантности соотношения (9) в случаях (18), (22) решается достаточно просто, перейдем к рассмотрению системы (12) в общем случае.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если в последовательности* (11) *существует k независимых функций, то независимыми будут и первые k функций последовательности* (11).

Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Предположим, что первые k функций последовательности из (11) зависимы. Найдем наименьшее такое число k^*, что первые k^* членов последовательности (11) зависимы. Тогда система функций $f^{(1)}, \dots, f^{(k^*-1)}$ независима, а функции $f^{(1)}, \dots, f^{(k^*)}$ уже зависимы в области U, причем $k^* \leqslant k$. Следуя [13], достроим независимую систему $v_1 = f^{(1)}$, $\dots$, $v_{k^*-1} = f^{(k^*-1)}$ до независимой системы $n+1$ функций путем введения функций $v_k = v_k(u_1, \dots, u_n)$, $\dots$, $v_{n+1} = v_{n+1}(u_1, \dots, u_n)$. На основе их выполним замену переменных $v = v(u)$, где $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$, $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$. В силу того, что ранг матрицы $\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial u_j}\right)$ равен $n+1$, уравнение $v = v(u)$ можно обратить: $u = u(v)$. Полагая $W(v) = f^{(k)}(u(v))$, можно доказать [13], что эта функция имеет вид

$$f^{(k^*)}(u_1, \dots, u_{n+1}) = W\big(f^{(1)}(u_1, \dots, u_{n+1}), \dots, f^{(k^*-1)}(u_1, \dots, u_{n+1})\big). \tag{23}$$

Функция (23) определена и дифференцируема на множестве U и зависит только от функций $f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)}$. Вычислим производную от левой и правой частей выражения (23) в силу уравнений (2):

$$f^{(k^*+1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=\sum_{j=1}^{k^*-1}\frac{\partial W(f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)})}{\partial f^{(j)}}f^{(j+1)}(u_1,\ldots,u_{n+1}).$$

Функция $f^{(k^*+1)}$ зависит от функций с индексами $1,\ldots,k^*-1$. По аналогии с данным свойством можно показать, что и все функции с большим порядком производной из (11) функционально зависят от $f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)}$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана. □

Отсюда вытекает, что первые независимые функции в системе (12) определяют уравнения для ИМ.

Следствие 2. Если система (12) совместна, то первые ее k уравнений определяют ИМ, где k – максимальное количество независимых функций в последовательности (11).

Доказательство. Поскольку k уравнений из (12) функционально независимы, то выполняется ранговое условие

$$\operatorname{rank}\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial u_{n+1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f^{(k)}}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(k)}}{\partial u_{n+1}}\end{pmatrix}\right|_{u^{(0)}}=k. \qquad (24)$$

Из первых k уравнений (12) в окрестности точки $u^{(0)}$ в силу (24) получаем представление

$$u_i=u_i^*(u_{k+1},\ldots,u_{n+1})\quad (i=\overline{1,k}).$$

Подставив эти функции в уравнения (2), получим дифференциальные уравнения на неизвестные функции u_{k+1}, $\ldots$, u_{n+1}. Они совместно с первыми функционально-независимыми членами последовательности (12) и определяют инвариантное многообразие. □

Применение теоремы. Задача о нахождении уравнений, определяющих множество M при заданном ИС (9), решается следующим образом. Согласно доказанной выше теореме, необходимо построить цепочку производных (11), а затем поэтапно провести исследование зависимости входящих в (12) уравнений. То есть на первом этапе следует провести исследование зависимости функции $f^{(2)}(u_1,\ldots,u_{n+1})$ (первой производной f) от ИС (9). Если будут найдены условия, при выполнении которых

$$f^{(2)}(u_1,\ldots,u_{n+1})\Big|_{f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0}\equiv 0,$$

то множество G будет инвариантным. При дальнейшем изучении системы (12) необходимо рассмотреть случаи

$$f^{(l)}(u_1,\ldots,u_{n+1})\Big|_{f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0,\ldots,f^{(l-1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0} \equiv 0. \qquad (25)$$

В формуле (25) предусмотрены все варианты исследования системы (12). При выполнении (25) получим систему $l-1$ уравнений, которая задает ИМ M.

Векторный случай. Вернемся теперь к общей задаче построения инвариантного множества для системы ИС (4). В этом случае цепочка производных строится одновременно для всех соотношений. Сначала вычисляются первые производные от функций f_j. Если все они тождественно обращаются в нуль на множестве G, то это множество является инвариантным, и исследование завершается. В противном случае нужно продолжить построение, исключив предварительно производные, которые зависят от функций, ранее включенных в цепочку. На каждом последующем шаге следует брать производные в силу системы только от тех функций, которые были добавлены на предыдущем шаге, а проверка зависимости новых функций от полученных ранее должна осуществляться лишь на множестве, на котором все предыдущие функции цепочки обращаются в нуль. Так как функционально независимыми в пространстве R^{n+1} могут быть не более $n+1$ функции, то описанный алгоритм позволит построить ИМ за конечное число шагов.

3. Равномерные вращения тяжелого гиростата. Рассмотрим применение полученных результатов к задаче об условиях существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{L} + \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\omega} + A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{L}. \qquad (26)$$

В уравнениях (26) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{L}$ – вектор-функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимых тел; A – тензор инерции; $\boldsymbol{s} = (s_1,s_2,s_3)$ – вектор, пропорциональный весу гиростата и сонаправленный с вектором OC, где O – неподвижная точка, C – центр тяжести гиростата.

Уравнения (26) имеют два интеграла:

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} = k, \qquad (27)$$

где k – произвольная постоянная.

Пусть тело-носитель совершает равномерное вращение вокруг вектора $\boldsymbol{\gamma}_*$ в неподвижном пространстве. В силу известного свойства этот вектор будет неизменным и в теле-носителе, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{a}, \qquad (28)$$

где $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор, неизменный в теле носителе, ω_0 – скорость равномерного вращения. Рассмотрим уравнения Пуассона из (26). В силу (28) из него получим

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \omega_0(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}). \tag{29}$$

Выберем подвижную систему координат так, чтобы ее третья ось была направлена по вектору $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$). Из уравнения (29) и геометрического интеграла из (27) вытекает [15]

$$\nu_1 = a_0' \sin \omega_0 t, \qquad \nu_2 = a_0' \cos \omega_0 t, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{30}$$

где $a_0 = \cos\theta_0$, $a_0' = \sin\theta_0$, а $\theta_0 = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}})$. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}(t)$ вектор с координатами (30). Подставим (28) и $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}$ в первое уравнение системы (26)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \omega_0(\boldsymbol{\lambda}(t) \times \boldsymbol{a}) + (A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a})\omega_0^2 + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}(t). \tag{31}$$

Таким образом, исследование существования равномерных вращений в задаче (26) сводится к исследованию решения неавтономного уравнения (31).

Изучение уравнения (31) будем проводить при условии, что тело-носитель имеет два вращающихся ротора. Тогда

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}, \tag{32}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = 1$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$. Подставим выражение (32) в уравнение (31):

$$\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = \omega_0\lambda_1(t)(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \omega_0\lambda_2(t)(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}) + \omega_0^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}(t). \tag{33}$$

Структура уравнения (33) показывает, что целесообразно рассмотреть равенства, которые получим в результате скалярного умножения левой и правой частей (33) на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega_0\gamma_3\lambda_2(t) + \mu_0 + \mu_3 \sin\omega_0 t + \mu_4 \cos\omega_0 t, \tag{34}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\omega_0\gamma_3\lambda_1(t) + \varepsilon_0 + \varepsilon_3 \sin\omega_0 t + \varepsilon_4 \cos\omega_0 t, \tag{35}$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2, t) = \omega_0(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) + \sigma_0 + \sigma_3 \sin\omega_0 t + \sigma_4 \cos\omega_0 t = 0. \tag{36}$$

В (34)–(36) введены обозначения

$$\begin{array}{lll}
\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, & \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, & \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \\
B_1 = A_{13}\omega_0^2 + a_0 s_1, & B_2 = A_{23}\omega_0^2 + a_0 s_2, & \\
\mu_3 = a_0'(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2), & \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 s_3 - \beta_3 s_2), & \sigma_3 = a_0'(\gamma_2 s_3 - \gamma_3 s_2), \\
\mu_4 = a_0'(\alpha_3 s_1 - \alpha_1 s_3), & \varepsilon_4 = a_0'(\beta_3 s_1 - \beta_1 s_3), & \sigma_4 = a_0'(\gamma_3 s_1 - \gamma_1 s_3), \\
\mu_0 = \alpha_1 B_2 - \alpha_2 B_1, & \varepsilon_0 = \beta_1 B_2 - \beta_2 B_1, & \sigma_0 = \gamma_1 B_2 - \gamma_2 B_1.
\end{array} \tag{37}$$

Применим указанный выше метод ИС к неавтономным дифференциальным уравнениям. Вычислим первую и вторую производные от ИС (36) в силу уравнений (34), (35) и приравняем их нулю:

$$\frac{\dot{f}(\lambda_1,\lambda_2,t)}{\omega_0} = \gamma_3\omega_0(\alpha_3\lambda_1(t)+\beta_3\lambda_2(t)) + p_0 + p_3\sin\omega_0 t + p_4\cos\omega_0 t = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\ddot{f}(\lambda_1,\lambda_2,t)}{\omega_0^2} = \gamma_3^2\omega_0(\alpha_3\lambda_2(t)-\beta_3\lambda_1(t)) + P_0 + P_3\sin\omega_0 t + P_4\cos\omega_0 t = 0. \quad (39)$$

Здесь в силу (37)

$$\begin{array}{ll} p_0 = \beta_3\mu_0 - \alpha_3\varepsilon_0, & P_0 = \gamma_3(\alpha_3\mu_0+\beta_3\varepsilon_0), \\ p_3 = \beta_3\mu_3 - \alpha_3\varepsilon_3 - \sigma_4, & P_3 = \gamma_3(\alpha_3\mu_3+\beta_3\varepsilon_3) - p_4, \\ p_4 = \beta_3\mu_4 - \alpha_3\varepsilon_4 + \sigma_3, & P_4 = \gamma_3(\alpha_3\mu_4+\beta_3\varepsilon_4) + p_3. \end{array} \quad (40)$$

Так как $\omega_0 \neq 0$, исследование уравнений (36), (38), (39) будем проводить для следующих случаев:

$$1)\ \alpha_3=\beta_3=0,\ \ \gamma_3=\pm1; \quad 2)\ \gamma_3=0,\ \ \alpha_3^2+\beta_3^2=1; \quad 3)\ \gamma_3\neq0,\ \ \alpha_3^2+\beta_3^2\neq0. \quad (41)$$

В случае 1) векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ ортогональны вектору $\boldsymbol{a}$, т. е. гиростатический момент расположен в плоскости, перпендикулярной оси вращения. С учетом (37) из уравнения (36) получим

$$s_1 = s_2 = 0. \quad (42)$$

Теперь уравнения (36), (38) и (39) выполняются тождественно. Значит, любое решение уравнений (34), (35), имеющее при указанных условиях вид

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) = &-\omega_0(\alpha_1 A_{23} + \alpha_2 A_{13}) + \\ &+ (C_1 - s_3 a_0' \alpha_1 t)\cos\omega_0 t + (C_2 + s_3 a_0'\alpha_2 t)\sin\omega_0 t, \\ \lambda_2(t) = &-\omega_0(\beta_1 A_{23} + \beta_2 A_{13}) + \\ &+ (\gamma_3 C_1 - s_3 a_0'\beta_1 t)\cos\omega_0 t + (-\gamma_3 C_1 + s_3 a_0'\beta_2 t)\sin\omega_0 t, \end{aligned} \quad (43)$$

обеспечивает режим равномерных вращений. Условие (42) означает, что центр тяжести гиростата лежит на оси вращения. Поскольку в реальных конструкциях значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ из (43) ограничены, необходимо положить

$$s_3 = 0. \quad (44)$$

Следовательно, центр тяжести гиростата находится в точке закрепления гиростата.

Когда имеет место случай 2) из (41), векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ лежат в одной плоскости. Уравнение (38) при $\gamma_3 = 0$ не зависит от λ_1, λ_2, т. е. должно быть тождеством по t. Это возможно лишь при выполнении (44) и еще одного дополнительного условия

$$\gamma_2(A_{23}\omega_0^2 + a_0 s_2) + \gamma_1(A_{13}\omega_0^2 + a_0 s_1) = 0. \quad (45)$$

Нетрудно убедиться в том, что при выполнении (45) свободные члены μ_0, ε_0 в правых частях уравнений (34), (35) становятся равными нулю. Интегрирование этих уравнений с учетом ИС (36) приводит к решению

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \omega_0^{-1}\{\alpha_3[a_0'(s_1\sin\omega_0 t + s_2\cos\omega_0 t) + C] + \alpha_1 B_2 + \alpha_2 B_1\},\\ \lambda_2(t) &= \omega_0^{-1}\{\beta_3[a_0'(s_1\sin\omega_0 t + s_2\cos\omega_0 t) + C] + \beta_1 B_2 + \beta_2 B_1\}, \end{aligned} \tag{46}$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотрим общий случай, т.е. случай 3) из (41). Составляя линейную комбинацию уравнений (36) и (39), можно получить уравнение, которое не содержит величины λ_1 и λ_2. Чтобы оно выполнялось для любых значений t, необходимо потребовать выполнение условия (44). В этом случае производная $\ddot{f}$ станет зависимой от f, а система $\{f, \dot{f}\}$ – независимой. Инвариантное многообразие тогда задается уравнениями (36) и (38) и содержит единственное решение

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) = \Delta^{-1}[&(\alpha_3 p_0 + \gamma_3\beta_3\sigma_0)+\\ &+ (\alpha_3 p_3 + \gamma_3\beta_3\sigma_3)\sin\omega_0 t + (\alpha_3 p_4 + \gamma_3\beta_3\sigma_4)\cos\omega_0 t],\\ \lambda_2(t) = \Delta^{-1}[&(\beta_3 p_0 - \gamma_3\alpha_3\sigma_0)+\\ &+ (\beta_3 p_3 - \gamma_3\alpha_3\sigma_3)\sin\omega_0 t + (\beta_3 p_4 - \gamma_3\alpha_3\sigma_4)\cos\omega_0 t], \end{aligned} \tag{47}$$

где $\Delta = \omega_0\gamma_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)$. Функции (47) определяют гиростатический момент вида (32), который обеспечивает режим равномерного вращения гиростата. Согласно (44), такое решение имеет место, если барицентрическая ось ортогональна оси равномерного вращения.

4. Сравнительный анализ методов ИС. Проведем сравнительный анализ результатов, полученных в настоящей статье, и подходов в исследовании ИС, применяемых в других работах. Термин “инвариантные соотношения” впервые появился в трактате А. Пуанкаре [6]. Он был введен для систем автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{48}$$

правые части которых непрерывно-дифференцируемы до некоторого порядка k. Рассматривая систему уравнений

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = \overline{1, m}) \tag{49}$$

и вводя оператор абсолютного дифференцирования функций f_j в силу (48)

$$\frac{df_j}{dt} = \dot{f}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} X_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{50}$$

А. Пуанкаре требует, чтобы наряду с (49) выполнялось равенство

$$\dot{f}_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \tag{51}$$

Соотношения (49) названы им инвариантными соотношениями.

Т. Леви-Чивита изучал инвариантные соотношения для системы неавтономных уравнений (1). Вначале, рассматривая лишь одно ИС (9), он получил уравнение (18), а затем указал и дифференциальные уравнения для системы ИС

$$f_j(x_1,\ldots,x_n,t)=0 \quad (j=\overline{1,m}). \tag{52}$$

Дифференциальные уравнения на функции из (52) таковы:

$$\begin{aligned}
&\dot f_1(x_1,\ldots,x_n,t)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{1j}(x_1,\ldots,x_n,t)f_j(x_1,\ldots,x_n,t),\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&\dot f_m(x_1,\ldots,x_n,t)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{mj}(x_1,\ldots,x_n,t)f_j(x_1,\ldots,x_n,t).
\end{aligned} \tag{53}$$

Метод получения системы (53) аналогичен методу, который применялся при нахождении уравнения (18). Приравняем нулю производные от (52):

$$\begin{aligned}
F_j(x_1,\ldots,x_n,t)=\frac{\partial f_j(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}+\\
+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial x_i}X_i(x_1,\ldots,x_n,t)=0 \quad (j=\overline{1,m})
\end{aligned} \tag{54}$$

и подставим в (54) выражения

$$x_i=x_i(x_{m+1},\ldots,x_n,t,f_1,\ldots,f_m) \quad (i=\overline{1,m}),$$

найденные из уравнения (52). В предположении, что преобразованные функции F_j являются аналитическими функциями от переменных f_i $(i=\overline{1,m})$, получим уравнения (53). Анализ метода вывода уравнений (18) и (53) показывает наглядность получения функций λ_{ij} (множителей Леви-Чивиты).

Обобщения уравнений (53) указаны С.А. Чаплыгиным [8] (он рассматривал автономный случай)

$$\begin{aligned}
&\dot f_1(x_1,\ldots,x_n,t)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{1j}(x_1,\ldots,x_n,t)f_j^{l_{1j}}(x_1,\ldots,x_n,t),\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&\dot f_m(x_1,\ldots,x_n,t)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{mj}(x_1,\ldots,x_n,t)f_j^{l_{mj}}(x_1,\ldots,x_n,t),
\end{aligned} \tag{55}$$

где $l_{ij}>1$ $(i,j=\overline{1,m})$.

Методы ИС нашли широкое применение в динамике твердого тела. С.А. Чаплыгин [16] и П.В. Харламов [17] использовали аналог метода Т. Леви-Чивиты в задаче о движении тела в жидкости. В работе [12] на основе уравнений Т. Леви-Чивиты получены достаточные условия существования первого интеграла уравнений (48). Сформулируем этот результат в обобщенном виде, т.е. для неавтономной системы уравнений (1).

Пусть система (1) допускает ИС вида (52), для каждого из которых выполняются уравнения Т. Леви-Чивиты

$$\dot{f}_j(x_1,\ldots,x_n,t)=\lambda_j(x_1,\ldots,x_n,t)f_j(x_1,\ldots,x_n,t),\quad j=\overline{1,m}. \tag{56}$$

Тогда имеет место утверждение: если функции λ_j удовлетворяют условию

$$\alpha_1\lambda_1(x_1,\ldots,x_n,t)+\ldots+\alpha_m\lambda_m(x_1,\ldots,x_n,t)=0, \tag{57}$$

где α_j – некоторые постоянные, не равные нулю одновременно, то система (1) допускает первый интеграл

$$f_1^{\alpha_1}(x_1,\ldots,x_n,t)\ldots f_m^{\alpha_m}(x_1,\ldots,x_n,t)=C, \tag{58}$$

где C – произвольная постоянная. Доказательство этого утверждения основано на определении первого интеграла. Если продифференцировать соотношения (58) в силу уравнений (56) для ИС (52) и учесть равенство (57), то получим тождество.

Теории ИС Т. Леви-Чивиты и С.А. Чаплыгина использованы в [10, 11] для решения задачи интегрирования уравнений динамики твердого тела на инвариантных соотношениях.

Остановимся на результатах П.В. Харламова [9]:

«*Определение инвариантного соотношения.* В связи с системой дифференциальных уравнений (48) [1] любой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ сопоставлена последовательность[2]

$$f^{(i)}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad i=0,1,2,\ldots\,, \tag{59}$$

члены которой определены так:

$$f^{(i)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \\ =\sum_{j=1}^{n}X_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}f^{(i-1)}(x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad i=1,2,\ \ldots\,. \tag{60}$$

Если многообразие

$$\Sigma:\ f^{(i)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\quad i=0,1,2,\ldots \tag{61}$$

[1] Нумерация формул изменена: им присвоены номера, продолжающие нумерацию, принятую в данной статье.

[2] Полагаем в дальнейшем $f^{(0)}\equiv f$.

не пусто, оно называется инвариантным многообразием системы дифференциальных уравнений (48), а соотношение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ – инвариантным соотношением этих уравнений.»

В статье [9] отмечено, что в случае непустого Σ в системе конечных соотношений (61) имеется $l \leqslant n$ функционально независимых членов в Σ. При $l = n$ множество Σ определяет некоторое подмножество особых точек уравнения (48). В дальнейшем предполагается, что $l < n$. Доказана следующая теорема.

Основное утверждение [9]. Многообразие Σ определено первыми l уравнениями (61).

На стр.18 работы [9] П.В. Харламов вводит понятие слоя ИС.

«Чтобы установить, что соотношение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{62}$$

является инвариантным, необходимо проверить функциональную независимость уравнений $f^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, l-1$, – первых l уравнений системы (61), а для этого необходимо выполнить $l-1$ раз операцию (60) построения следующих за $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ членов последовательности (59). Образно говоря, чтобы установить "глубину залегания" искомого инвариантного соотношения, необходимо "снять $l-1$ слой", проверяя на каждом шаге его независимость от предшествующих "слоев". В связи с этим может быть предложено такое определение.

Инвариантное соотношение (62) называют $l-1$-слойным (или инвариантным соотношением $l-1$-го слоя), если последовательность (59) содержит l функционально независимых членов.

В соответствии с этим определением интеграл уравнений (48) есть инвариантное соотношение нулевого слоя (он, так сказать, "лежит на поверхности"), а интегральная кривая – инвариантное соотношение $n-2$-го слоя.»

В книге [15] при анализе методов ИС отмечено, что цепочку производных от ИС рассматривали С.А. Чаплыгин [18] и Г.Г. Аппельрот [19], которые изучали условия существования некоторых классов решений уравнений Эйлера—Пуассона.

Приведенное в данной работе обобщение результатов П.В. Харламова не затрагивает понятия слоя ИС, так как следующий пример показывает, что оно требует дополнительных обоснований.

Пусть дана система трех дифференциальных уравнений [15]

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = x^2 + z^2 - a^2, \qquad \dot{z} = -\frac{1}{z}(2x^2 + z^2 - a^2) \tag{63}$$

на множестве $z \neq 0$. Составим систему (12) для следующих ИС:

$$1.\ x = 0, \qquad 2.\ y = 0, \qquad 3.\ xy = 0\ . \tag{64}$$

В силу (63) из (64)

$$x = 0, \quad \dot{x} = x = 0, \quad \ddot{x} = x = 0, \quad \dots , \tag{65}$$

$$y = 0, \quad \dot{y} = x^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad \ddot{y} = -2(x^2 + z^2 - a^2) = 0, \quad \dots , \tag{66}$$

$$xy = 0, \quad (xy)^{\cdot} = x(y + x^2 + z^2 - a^2) = 0, \quad (xy)^{\cdot\cdot} = xy = 0, \ \dots . \tag{67}$$

На основании (65)–(67) можно сделать вывод о том, что в системе (65) содержится один независимый член последовательности, а $x = 0$ – ИС нулевого слоя; в системе (66) – два независимых члена последовательности, а $y = 0$ – ИС первого слоя; в системе (67) – два независимых члена последовательности, а $xy = 0$ – ИС первого слоя.

Заключение. В статье исследованы инвариантные соотношения для неавтономных дифференциальных уравнений; обобщена теорема П.В. Харламова, полученная им для случая автономных дифференциальных уравнений; в качестве примера исследованы равномерные вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом; выполнен анализ подходов, используемых А. Пуанкаре, Т. Леви-Чивитой, С.А. Чаплыгиным для исследования ИС.

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – К.: Наук. думка, 1978. – 296 с.
2. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 2012. – 402 с.
3. *Харламов П.В.* Решения с инвариантными соотношениями некоторых задач динамики твердого тела // В кн.: История механики гиростатических систем. – М.: Наука, 1975. – С. 5-19.
4. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – К.: Наук. думка, 1980. – 174 с.
5. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
6. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. – Избр. тр.: В 3 т. – Т. 1.– М.: Наука, 1971. – 771 с.
7. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
8. *Чаплыгин С.А.* О принципе последнего множителя // Собр. соч. – М.;Л.: Гостехтеориздат, 1948. – Т. I: Теоретическая механика. Математика. – С. 5–14.
9. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
10. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях // Докл. НАН Украины. – 2007. – № 1. – С. 60–66.
11. *Мазнев А.В.* Об одном случае существования интегрирующего множителя уравнений динамики твердого тела на инвариантных соотношениях класса С.А. Чаплыгина // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 155–161.
12. *Ковалев А.М.* Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32 – С. 16-31.
13. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 331 с.

14. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений // Докл. НАН Украины. – 7 с. (В печати)
15. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
16. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **6**, вып. 2. – С. 20–42.
17. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
18. *Чаплыгин С.А.* Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1896. – **9**, вып. 2. – С. 17–21.
19. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61–156.

A.M. Kovalev, G.V. Gorr, V.N. Nespirnyy

Invariant relations for nonautonomous systems of differential equations with application in mechanics

The method of invariant relations developed by H. Poincaré, T. Levi-Civita, S.A. Chaplygin, P.V. Kharlamov is generalized for the case of nonautonomous differential equations. Using this method, new solutions for the motion equations of nonautonomous gyrostate are constructed. These solution are corresponding to uniform rotations around inclined axis.

Keywords: *invariant relations, invariant set, nonautomonous equations.*

О.М. Ковальов, Г.В. Горр, В.М. Неспірний

Інваріантні співвідношення неавтономних систем диференціальних рівнянь із застосуванням у механіці

Метод інваріантних співвідношень, розвинений А. Пуанкаре, Т. Леві-Чивітою, С.О. Чаплигіним, П.В. Харламовим, узагальнено на випадок систем неавтономних диференціальних рівнянь. На його основі побудовано нові розв'язки рівнянь руху неавтономного гіростата, що відповідають рівномірним обертанням відносно похилої осі.

Ключові слова: *інваріантні співвідношення, інваріантна множина, неавтономні системи.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 29.08.13
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua