УДК 531.38

©2013. **А.В. Зыза**

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНВАРИАНТНЫМ СООТНОШЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Исследованы условия существования полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Построено два новых частных решения рассматриваемых уравнений с квадратичными инвариантными соотношениями по вспомогательной переменной, которая выражается в виде функций, полученных обращением гиперэллиптических и эллиптических интегралов.

Ключевые слова: *полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа–Пуассона, гиростат, инвариантное соотношение, потенциальные и гироскопические силы.*

Интегрирование уравнений динамики тяжелого твердого тела в случае, когда применение теории Якоби невозможно в силу отсутствия дополнительного интеграла, проводится с помощью других методов [1, 2]. Полиномиальные решения уравнений Эйлера–Пуассона структуры Стеклова–Ковалевского–Горячева [1] занимают значительную часть в списке известных случаев интегрируемости этих уравнений. Как показано в [3–5], рассмотрение условий существования полиномиальных решений указанного выше класса и класса А.И. Докшевича [6, 7] позволило в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил построить новые решения уравнений Кирхгофа–Пуассона. В данной статье продолжено изучение указанных выше полиномиальных решений в предположении, что заданное полиномиальное решение имеет дополнительное квадратичное инвариантное соотношение. Получены новые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата.

1. Постановка задачи. Преобразование дифференциальных уравнений движения гиростата. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при ньютоновском притяжении масс и взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку параллельно вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Уравнения движения рассматриваемого гиростата относится к уравнениям класса Кирхгофа [5, 8] и в векторной форме [5] таковы

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E_0, \quad 2(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2k_0, \\ \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, 0, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E_0 и k_0 – постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$, $B = \mathrm{diag}\,(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}\,(C_1, C_2, C_3)$:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + B_3\omega_2\nu_3 - B_2\omega_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + B_1\omega_3\nu_1 - B_3\omega_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 - \\ &\quad - \lambda_1\omega_3 - s_1\nu_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + B_2\omega_1\nu_2 - B_1\omega_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \\ &\quad + \lambda_1\omega_2 + s_1\nu_2; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s_1\nu_1 + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E_0, \\ 2(A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + 2A_2\omega_2\nu_2 + 2A_3\omega_3\nu_3 - B_1\nu_1^2 - B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 = 2k_0, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Следуя [3, 4], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) решений вида

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} b_i\sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} c_j\sigma^j, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^{l} a_i\sigma^i, \quad \nu_2 = \frac{\psi(\sigma)}{\sigma}\omega_2, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma}\omega_3, \\ \psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{n_1} g_j\sigma^j, \quad \varkappa(\sigma) = \sum_{i=0}^{m_1} f_i\sigma^i, \end{gathered} \tag{6}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа; коэффициенты b_i, c_j, a_i, g_j, f_i – параметры, подлежащие определению. Указанный класс решений характеризуется квадратичным инвариантным соотношением по вспомогательной переменной σ.

Подставим выражения (6) в уравнения (4), (3) и геометрический интеграл из (5):

$$P(\sigma) = (\psi(\sigma) - \varkappa(\sigma))(\varphi'(\sigma))^{-1}; \tag{7}$$

$$\dot{\sigma} = P(\sigma)\sigma^{-1}\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}; \tag{8}$$

$$\begin{gathered}(Q(\sigma)\psi^2(\sigma)\sigma^{-2})'P(\sigma) = 2\psi(\sigma)(\sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma)),\\ (R(\sigma)\varkappa^2(\sigma)\sigma^{-2})'P(\sigma) = 2\varkappa(\sigma)(\varphi(\sigma) - \sigma\psi(\sigma));\end{gathered} \tag{9}$$

$$2\sigma^2 A_1 P(\sigma) = (C_3 - C_2)\psi(\sigma)\varkappa(\sigma) + (B_3\varkappa(\sigma) - B_2\psi(\sigma))\sigma + (A_2 - A_3)\sigma^2; \tag{10}$$

$$\begin{gathered}A_2 Q'(\sigma)P(\sigma) = 2[(C_1 - C_3)\varphi(\sigma)\varkappa(\sigma) + (B_1\varphi(\sigma) - B_3\varkappa(\sigma)\sigma +\\ + (A_3 - A_1)\sigma^2 - \lambda_1)\sigma - s_1\varkappa(\sigma)],\\ A_3 R'(\sigma)P(\sigma) = 2[(C_2 - C_1)\varphi(\sigma)\psi(\sigma) - (B_1\varphi(\sigma) - B_2\psi(\sigma)\sigma +\\ + (A_2 - A_1)\sigma^2 - \lambda_1)\sigma + s_1\psi(\sigma)];\end{gathered} \tag{11}$$

$$(\varphi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + Q(\sigma)\psi^2(\sigma) + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \tag{12}$$

В уравнениях (7), (9), (11) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной σ. Если функции $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\varkappa(\sigma)$ определены, то зависимость σ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (8).

2. Одно новое частное решение. Рассмотрим случай, когда в (6) $n = m = 3$, а $l = n_1 = m_1 = 2$. Тогда

$$\begin{gathered}\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0,\\ \omega_3^2 = R(\sigma) = c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,\\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2, \quad \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3,\\ \psi(\sigma) = g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \quad \varkappa(\sigma) = f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0.\end{gathered} \tag{13}$$

Подставим полиномы $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\varkappa(\sigma)$ из (13) в динамическое уравнение (10). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях рассматриваемого уравнения, заключаем, что (10) при $a_1 \neq 0$ может быть тождеством по σ только при выполнении условий

$$C_2 = C_3, \quad B_3 f_0 - B_2 g_0 = 0. \tag{14}$$

С учетом (14) динамическое уравнение (10) упрощается:

$$\begin{gathered}P(\sigma) = (d_1\sigma + d_0)(2A_1)^{-1},\\ d_1 = B_3 f_2 - B_2 g_2, \quad d_0 = B_3 f_1 - B_2 g_1 + A_2 - A_3.\end{gathered} \tag{15}$$

Соотношение (15) позволяет упростить другие уравнения исследуемой системы (9), (11). Исключим функцию $P(\sigma)$ из уравнений (9), (11). Затем подставим в упрощенные уравнения и уравнения в (7), (12), (15) полиномы из

(13). Требования того, чтобы полученные равенства при условиях (14) были тождествами по σ, приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (13):

$$\begin{gathered}
A_1(g_2-f_2)-a_2d_1=0,\ \ 2A_1(g_1-f_1)-2a_2d_0-a_1d_1=0,\\
2A_1(g_0-f_0)-a_1d_0=0,\ \ \gamma_5d_1+4A_1g_2=0,\\
\gamma_5d_0+\gamma_4d_1-4A_1(a_2-g_1)=0,\ \ \gamma_4d_0+\gamma_3d_1-4A_1(a_1-g_0)=0,\\
\delta_5d_1-4A_1f_2=0,\ \ \delta_5d_0+\delta_4d_1-4A_1(f_1-a_2)=0,\\
\delta_4d_0+\delta_3d_1-4A_1(f_0-a_1)=0,\ \ \gamma_3d_0+\gamma_2d_1-4A_1a_0=0,\\
\gamma_2d_0+\gamma_1d_1=0,\ \ \gamma_1d_0+\gamma_0d_1=0,\ \ \gamma_0d_0=0,\\
\delta_3d_0+\delta_2d_1+4A_1a_0=0,\ \ \delta_2d_0+\delta_1d_1=0,\ \ \delta_1d_0+\delta_0d_1=0,\ \ \delta_0d_0=0,\\
(B_2-\beta a_2)g_2=0,\ \ (B_3-\beta a_2)f_2=0,\\
3c_3d_1A_3+4A_1(\beta(a_2g_1+a_1g_2)+B_1a_2-B_2g_1+A_2-A_1)=0,\\
3b_3d_1A_1-4A_1(\beta(a_2f_1+a_1f_2)+B_1a_2-B_3f_1+A_3-A_1)=0,\\
A_3(3c_3d_0+2c_2d_1)+4A_1(\beta(a_2g_0+a_1g_1+a_0g_2)+\\
+B_1a_1-B_2g_0-s_1g_2)=0,\\
A_2(3b_3d_0+2b_2d_1)-4A_1(\beta(a_2f_0+a_1f_1+a_0f_2)+\\
+B_1a_1-B_3f_0-s_1f_2)=0,\\
A_3(2c_2d_0+c_1d_1)+4A_1(\beta(a_1g_0+a_0g_1)+B_1a_0-s_1g_1-\lambda_1)=0,\\
A_2(2b_2d_0+b_1d_1)-4A_1(\beta(a_1f_0+a_0f_1)+B_1a_0-s_1f_1-\lambda_1)=0,\\
A_3c_1d_0+4A_1(\beta a_0-s_1)g_0=0,\\
A_2b_1d_0-4A_1(\beta a_0-s_1)f_0=0,\\
a_0^2-1+(b_2g_0+2b_1g_1)g_0+(2g_2g_0+g_1^2)b_0+\\
+(c_2f_0+2c_1f_1)f_0+(2f_2f_0+f_1^2)c_0=0.
\end{gathered}\tag{16}$$

Здесь $\qquad \gamma_0=-2c_0f_0,\quad \gamma_1=-c_1f_0,\quad \gamma_2=2c_0f_2+c_1f_1,$

$$\gamma_3=c_3f_0+2c_2f_1+3c_1f_2,\quad \gamma_4=3c_3f_1+4c_2f_2,\quad \gamma_5=5c_3f_2,$$

$$\delta_0=-2b_0g_0,\quad \delta_1=-b_1g_0,\quad \delta_2=2b_0g_2+b_1g_1,$$

$$\delta_3=b_3g_0+2b_2g_1+3b_1g_2,\quad \delta_4=3b_3g_1+4b_2g_2,\quad \delta_5=5b_3g_2,\quad \beta=C_1-C_3.$$

Система алгебраических уравнений (14), (16) разрешима относительно параметров A_1,A_3,B_3,a_0. Считая $p=A_3A_1^{-1}$, $\eta=260p^4-1216p^3+1841p^2-$ $-1139p+250$, запишем соотношения (14) и решение системы (16) в виде

$$C_2=C_3,\quad \beta=-B_3^2A_1^{-1},\quad B_1=-\frac{1}{5}B_3,\quad B_2=B_3,\quad A_2=\frac{5p-3}{8p-5}A_1,$$

$$f_1=\frac{(240p^3-514p^2+387p-100+\sqrt{5\eta})A_1}{(240p^2-344p+125)B_3},\quad f_0=0,$$

$$a_2 = -A_1 B_3^{-1}, \quad a_1 = -(2p-1)A_1^2 (B_3^2 f_2)^{-1}, \quad d_1 = \frac{2(4p-3)B_3 f_2}{8p-5},$$

$$b_3 = \frac{2A_1(8p-5)^2}{5(4p-3)B_3 f_2},$$

$$b_2 = \frac{A_1(8p-5)^2((12p^2-15p+7)A_1 - 2(6p-5)B_3 f_1)}{5(4p-3)(B_3 f_2)^2},$$

$$b_1 = \frac{2A_1(8p-5)^2}{15(4p-3)(B_3 f_2)^3}[2(8p-5)(6p-5)(B_3 f_1)^2 - (192p^3 - 380p^2 + \\ +267p - 65)A_1 B_3 f_1 + (2p-1)(48p^3 - 96p^2 + 73p - 16)A_1^2],$$

$$b_0 = \frac{A_1(8p-5)^2}{15(4p-3)(B_3 f_2)^4}[-2(8p-5)^2(6p-5)(B_3 f_1)^3 + (8p-5)(288p^3 - \\ -580p^2 + 403p - 95)A_1(B_3 f_1)^2 - (2p-1)^2(576p^3 - 1264p^2 + \\ +1004p - 275)A_1^2 B_3 f_1 + (2p-1)^2(4p-3)(48p^3 - 96p^2 + \\ +73p - 16)A_1^3 - 15B_3^3 f_2^2 a_0],$$

$$c_3 = -\frac{2A_1}{5(4p-3)B_3 f_2}, \quad c_2 = \frac{A_1(5(4p^2-9p+4)A_1 - 2(10p-7)B_3 f_1)}{5(4p-3)(B_3 f_2)^2}, \tag{17}$$

$$c_1 = -\frac{2A_1}{15(4p-3)(B_3 f_2)^3}[2(7-10p)(B_3 f_1)^2 + \\ +5(4p^2-9p+4)A_1 B_3 f_1 + 5(2p-1)(8p-5)A_1^2],$$

$$c_0 = \frac{A_1}{15(4p-3)B_3^3 f_2^4}[2(7-10p)B_3^2 f_1^3 + 5(4p^2-9p+4)A_1 B_3 f_1^2 + \\ +5(2p-1)(8p-5)A_1^2 f_1 + 15(8p-5)(B_3 f_2)^2 a_0],$$

$$g_2 = \frac{f_2}{8p-5}, \quad g_1 = -\frac{(2p-1)(4p-3)A_1 + (5-8p)B_3 f_1}{(8p-5)B_3}, \quad g_0 = 0,$$

$$s_1 = -\frac{1}{5A_1 B_3 f_2^2}[-(60p^2-76p+25)A_1^2 B_3 f_1 + \\ +(60p^3 - 111p^2 + 78p - 20)A_1^3 + 5B_3^3 f_2^2 a_0],$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{15(8p-5)(B_3 f_2)^2}[(1440p^3 - 2744p^2 + 1754p - 375)A_1(B_3 f_1)^2 - \\ -(2880p^4 - 7208p^3 + 7002p^2 - 3104p + 525)A_1^2 B_3 f_1 + (2p-1)(720p^4 - \\ -1872p^3 + 1975p^2 - 967p + 180)A_1^3 + 3(8p-5)B_3^3 f_2^2 a_0].$$

Здесь f_2 – отличный от нуля действительный корень уравнения

$$\Delta_2 f_2^4 + \Delta_1 f_2^2 + \Delta_0 = 0,$$

а

$$\Delta_2 = 15(a_0^2 - 1)B_3^6;$$

$$\Delta_1 = (2(5-8p)((2p-1)A_1 - B_3f_1)B_3f_1 + \\ +(2p-1)^2(4p-3)A_1^2)(-15A_1B_3^3a_0);$$

$$\Delta_0 = A_1((2p-1)^4(4p-3)^2(48p^3-96p^2+73p-16)A_1^5 - \\ -B_3f_1[5(2p-1)^3(4p-3)(384p^4-1024p^3+1080p^2-508p+87)A_1^4 - \\ -5(2p-1)^3(8p-5)(384p^3-848p^2+672p-183)A_1^3B_3f_1 + \\ +20(2p-1)(8p-5)(384p^4-1008p^3+1016p^2-459p+78)(A_1B_3f_1)^2 + \\ +5(-12288p^5+38912p^4-49536p^3+31616p^2-10104p+1293)A_1(B_3f_1)^3 + \\ +8(4p-3)^2(96p^2-104p+29)(B_3f_1)^4]).$$

Решение (13) при условиях (17) будет действительным, если

$$\eta > 0, \quad A_2 > 0, \quad b_0 > 0, \quad c_0 > 0, \quad \Delta_1^2 > 4\Delta_2\Delta_0, \quad \Delta_2\Delta_1 < 0. \tag{18}$$

Зависимость σ от времени находим из (8)

$$\dot{\sigma} = \frac{d_1}{2A_1}\sqrt{(b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0)(c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0)}. \tag{19}$$

Приведем числовой пример решения (13), (17)–(19) уравнений (3), (4). Пусть $a > 0, b > 0$ и

$$A_2 = \frac{5}{7}A_1, \quad A_3 = \frac{4}{5}A_1, \quad A_1 = a, \\ B_1 = -\frac{B_3}{5}, \quad B_2 = B_3 = b, \quad C_2 = C_3, \quad \beta = -\frac{b^2}{a}, \quad \eta_0 = \sqrt{118}. \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{32719265 + 2770021\eta_0}{107471875(bf)^2}a^3, 0, 0\right), \quad \boldsymbol{s} = \left(\frac{14579\eta_0 - 3272715}{21494375bf^2}a^2, 0, 0\right); \tag{21}$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \ \ \omega_2^2 = Q(\sigma) = \frac{7}{25}\left(\frac{14a}{bf}\sigma^3 + \frac{7(263+2\eta_0)a^2}{85(bf)^2}\sigma^2 - \\ -\frac{14(3232+689\eta_0)a^3\sigma}{7225(bf)^3} + \frac{9(70855+6719\eta_0)a^4}{614125(bf)^4}\right),$$

$$\omega_3^2 = R(\sigma) = -\frac{2a}{bf}\sigma^3 - \frac{2(224+5\eta_0)a^2}{85(bf)^2}\sigma^2 + \\ +\frac{2(4993+1040\eta_0)a^3}{7225(bf)^3}\sigma + \frac{9(70855+6719\eta_0)a_0^4}{3070625(bf)^4}, \tag{22}$$

$$\nu_1 = -\frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{3a^2}{5b^2f}\sigma + \frac{(5902615+642896\eta_0)a^3}{21494375b^3f^2};$$

$$\nu_2 = \left(\frac{5f}{7}\sigma + \frac{(113+7\eta_0)a}{119b}\right)\sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \left(f\sigma + \frac{(88+5\eta_0)a}{85b}\right)\sqrt{R(\sigma)}.$$

Здесь

$$f = -\frac{3\sqrt{7}}{175}\left(\frac{232942943249046046}{700280639945138 - 64436115905755\eta_0}\right)^{1/4}\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}.$$

Так как зависимость $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = \frac{bf}{7a}\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \tag{23}$$

то действительность решения (20)–(23) вытекает из условия, что функции $Q(\sigma)$ и $R(\sigma)$ в (22), (23) при $\sigma = 0$ – положительны. При этом $\sigma(t)$ – функция времени, полученная в результате обращения гиперэллиптического интеграла.

Приведенный пример (22), (23) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a и b. Зависимость всех переменных задачи от времени устанавливается подстановкой $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (22).

3. Второе новое частное решение. Случай $n = 3$, $m = 4$, $l = 2$, $n_1 = m_1 = 1$. Пусть теперь полиномы решения (6) имеют вид

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \sigma^2,\ \ \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0,\\
\omega_3^2 = R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,\\
\nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0,\ \ \nu_2 = \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2,\ \ \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3,\\
\psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0,\ \ \varkappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Подставим значения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ из (24) в уравнения (7), (9)–(12) и потребуем выполнения их при всех σ. Это требование при $a_1 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, $f_0 \neq 0$ приводит к алгебраической системе на параметры задачи и решения (24):

$$\begin{gathered}
C_2 = C_3,\ \ \beta_0 = C_1 - C_3,\ \ \mu = B_3f_1 - B_2g_1 + A_2 - A_3,\ \ a_2 - f_1 = 0,\\
B_3f_0 - B_2g_0 = 0,\ \ A_1(g_1 - f_1) - a_2\mu = 0,\ \ 2A_1(g_0 - f_0) - a_1\mu = 0,\\
3b_3g_1\mu - 4A_1(f_0 - a_1) = 0,\ \ (2b_2g_1 + b_3g_0)\mu + 4A_1a_0 = 0,\ \ b_1 = 0,\\
b_0 = 0,\ \ c_4f_1\mu - A_1(a_2 - g_1) = 0,\ \ (2c_4f_0 + 3c_3f_1)\mu - 4A_1(a_1 - g_0) = 0,\\
(c_3f_0 + 2c_2f_1)\mu - 4A_1a_0 = 0,\ \ c_1 = 0,\ \ c_0 = 0.\\
\beta_0a_2f_1 + B_1a_2 - B_3f_1 + A_3 - A_1 = 0,\ \ \beta_0a_0 - s_1 = 0,\\
3b_3A_2\mu - 4A_1(\beta_0(a_2f_0 + a_1f_1) + B_1a_1 - B_3f_0) = 0,\\
b_2A_2\mu - 2A_1(\beta_0(a_1f_0 + a_0f_1) + B_1a_0 - \lambda_1 - s_1f_1) = 0,\\
c_4A_3\mu - A_1(-\beta_0a_2g_1 - B_1a_2 + B_2g_1 + A_1 - A_2) = 0,\\
3c_3A_3\mu - 4A_1(-\beta_0(a_2g_0 + a_1g_1) - B_1a_1 + B_2g_0) = 0,\\
c_2A_3\mu - 2A_1(-\beta_0(a_1g_0 + a_0g_1) - B_1a_0 + \lambda_1 + s_1g_1) = 0,\\
a_0^2 - 1 + b_2g_0^2 + c_2f_0^2 = 0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Считая свободными параметрами A_2, A_3, g_1, f_1 запишем решение системы (25)

$$\frac{g_1}{f_1} = k, \quad \frac{A_2}{A_3} = p_0, \quad C_2 = C_3, \quad \beta_0 = \frac{(k^2 - 3k + 2p_0)\mu_2 A_2}{k(k-1)\mu_1 f_1^2},$$

$$A_1 = \frac{((p_0+4)k^4 - 13p_0k^3 + (2p_0+7)p_0k^2 + (4p_0-3)p_0k - 2p_0^2)A_3}{k(k-1)\mu_1},$$

$$B_1 = -\frac{k^5 - 2k^4 + (5p_0-3)k^3 + 6p_0(1-2p_0)k^2 + 3p_0(4p_0-1)k - 4p_0^2)A_3}{k(k-1)\mu_1 f_1},$$

$$B_2 = -\frac{2(k^2 - 2p_0k + p_0)\mu_3 A_3}{k^2(k-1)\mu_1 f_1},$$

$$B_3 = \frac{(k^2 - 2p_0k + p_0)(k^3 - 2k^2 - (4p_0+3)k + 8p_0)A_3}{k(k-1)\mu_1 f_1},$$

$$\begin{gathered} \lambda_1 = -\frac{\mu_2 A_3 f_0^2}{2k(k-1)(k-p_0)\mu_1\mu_3^2 f_1^2}\{k^{10} - 4(p_0+1)k^9 + (3p_0^2 + 26p_0 + \\ +18)k^8 - 2(13p_0^2 + 64p_0 + 18)k^7 + (6p_0^3 + 178p_0^2 + 292p_0 - 27)k^6 - \\ -2p_0(43p_0^2 + 316p_0 - 30)k^5 + 3p_0(212p_0^2 + 53p_0 - 18)k^4 - \\ -2p_0^2(104p_0^2 + 290p_0 + 3)k^3 + 2p_0^2(160p_0^2 + 171p_0 + 18)k^2 - \\ -6p_0^3(40p_0 + 21)k + 80p_0^4\}, \quad s_1 = \beta_0\xi_1 f_0^2, \\ a_2 = f_1, \quad a_1 = -\mu_1\mu_3^{-1} f_0, \quad a_0 = \xi_1 f_0^2, \\ b_3 = \frac{4\mu_2 f_0}{k(k-1)\mu_3 f_1}, \quad b_2 = \xi_2 f_0^2, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 0, \\ c_4 = -1, \quad c_3 = \frac{2(k-3)\mu_2 f_0}{(k-1)\mu_3 f_1}, \quad c_2 = \xi_3 f_0^2, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \quad g_0 = \xi_4 f_0. \end{gathered} \tag{26}$$

Здесь
$$\mu_1 = k^3 + 3k^2 - 10p_0k + 6p_0,$$

$$\mu_2 = k^3 + (1-p_0)k^2 - 2p_0k + p_0,$$

$$\mu_3 = 2k^3 - 3p_0k^2 + 4p_0k - 3p_0;$$

$$\xi_1 = \frac{(k^5 - 3(p_0+2)k^4 + (20p_0+9)k^3 - 55p_0k^2 + 6p_0(4p_0+5)k - 20p_0^2)\mu_2}{2(k-p_0)\mu_3^2 f_1},$$

$$\xi_2 = -\frac{(k^5 - (3p_0+7)k^4 + (21p_0+11)k^3 + (3-53p_0)k^2 + (20p_0+19)p_0k - 12p_0^2)\mu_2}{k(k-1)(k-p_0)\mu_3^2 f_1^2},$$

$$\xi_3 = -\frac{(k^5 - 2p_0k^4 + (3p_0^2 - p_0 - 9)k^3 - (13p_0-40)p_0k^2 - 3p_0(3p_0+7)k + 11p_0^2)\mu_2}{(k-1)(k-p_0)\mu_3^2 f_1^2},$$

$$\xi_4 = -k(k^3 - 2k^2 - (4p_0+3)k + 8p_0)(2\mu_3)^{-1}; \qquad f_0 = (\xi_1^2 + \xi_2\xi_4^2 + \xi_3)^{-\frac{1}{4}}.$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени получим из дифференциального уравнения (8)

$$\dot{\sigma} = \frac{\mu}{2A_1}\sigma\sqrt{(b_3\sigma + b_2)(c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2)}. \tag{27}$$

Рассмотрим числовой пример действительного решения (24), (26), (27) уравнений (3), (4). Пусть $a > 0, b > 0$ и

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{46}{27}A_2, \quad A_3 = \frac{10}{9}A_2, \quad A_2 = a, \quad p_0 = \frac{9}{10}, \quad k = \frac{3}{2}, \\ B_1 = -\frac{b}{27}, \quad B_2 = -\frac{20}{27}b, \quad B_3 = -\frac{17}{27}b, \quad C_2 = C_3, \quad \beta_0 = -\frac{4b^2}{27a}, \\ \mu = \frac{23}{27}a, \quad f = \left(\frac{33750}{2659}\right)^{1/4}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \\ \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{154}{2025}\frac{b^2f^2}{a}, 0, 0\right), \quad \boldsymbol{s} = \left(\frac{64}{2025}\frac{b^3f^2}{a^2}, 0, 0\right). \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = \sigma\sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad \omega_3 = \sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \\ Q^*(\sigma) = \frac{8}{675}\frac{bf}{a^2}(120a\sigma + 7bf), \quad R^*(\sigma) = -\sigma^2 - \frac{8bf}{5a}\sigma - \frac{2(bf)^2}{75a^2}, \\ \nu_1 = \frac{2a}{b}\sigma^2 - \frac{3f}{5}\sigma - \frac{16bf^2}{75a}, \\ \nu_2 = \left(\frac{3a}{b}\sigma + \frac{17f}{20}\right)\sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad \nu_3 = \left(\frac{2a}{b}\sigma + f\right)\sqrt{R^*(\sigma)}; \end{gathered} \tag{29}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4}\sigma\sqrt{Q^*(\sigma)R^*(\sigma)}, \tag{30}$$

где $-\dfrac{7bf}{120a} < \sigma < \dfrac{(\sqrt{138} - 12)bf}{15a}$. На указанном интервале функции $Q^*(\sigma)$ и $R^*(\sigma)$ принимают положительные значения. Следовательно, действительность этому решению обеспечена.

В приведенном примере (28)–(30) решения дифференциальных уравнений (3), (4) присутствуют произвольные положительные параметры a и b. Функция $\sigma = \sigma(t)$ получается обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, полученного из (30). Это позволяет установить из (29) зависимость от времени всех переменных задачи.

Итак, найдено два новых частных решения полиномиального вида уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Каждое из найденных решений зависит от четырех независимых параметров: первое – от A_1, A_3, B_3, a_0, а второе – от A_2, A_3, g_1, f_1 и выражается в эллиптических функциях времени, полученных, соответственно, в результате обращения гиперэллиптического и эллиптического интегралов.

1. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
2. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
3. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12-21.
4. *Зыза А.В.* Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103-109.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
6. *Зыза А.В.* Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2006. – № 1. – С. 40-46.
7. *Зыза А.В.* Новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **25**. – С. 92–99.
8. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.

A.V. Zyza

On polynomial solutions with the quadratic invariant relation of the motion equations of a gyrostat

In this paper, the existence conditions for polynomial solutions of the differential equations of gyrostat motion under the potential and gyroscopic forces are studied. Two new solutions with quadratic relation that is invariant with respect to the auxiliary variable are obtained for the mentioned equations. This auxiliary variable is expressed in terms of inversions of elliptic and hyperelliptic integrals.

Keywords: *polynomial solutions, the Kirchhoff–Poisson equation, gyrostat, invariant relation, potential and gyroscopic forces.*

О.В. Зиза

Про поліноміальні розв'язки з квадратичним інваріантним співвідношенням рівнянь руху гіростата

Досліджено умови існування поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Отримано два нові частинні розв'язки цих рівнянь з квадратичними інваріантними співвідношеннями за допоміжною змінною, яка виражається у вигляді функцій, отриманих оберненням гіпереліптичного та еліптичного інтегралів.

Ключові слова: *поліноміальні розв'язки, рівняння Кірхгофа–Пуассона, гіростат, інваріантні співвідношення, потенціальні і гіроскопічні сили.*

Донецкий национальный ун-т

Получено 01.10.13

`3bl3a@mail.ru`