УДК 531.38

©2013. **Г.А. Котов**

ПРЕЦЕССИИ ОБЩЕГО ВИДА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА МАХОВИКА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Предложен общий метод исследования прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда носимыми телами являются два маховика с переменным гиростатическим моментом. Установлен новый случай интегрируемости уравнений движения гиростата под действием силы тяжести, отвечающий маятниковым движениям тела-носителя.

Ключевые слова: *прецессии, гиростат, потенциальные и гироскопические силы, маятниковые движения.*

Введение. Постановка задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента описана в [1, 2] и является обобщением исследований [3, 4]. Обоснование актуальности решения задач движения гиростата с переменным гиростатическим моментом представлено в [5, 6]. Например, результаты П.В. Харламова, полученные им в случае постоянного гиростатического момента и посвященные анализу равномерных вращений гиростата, послужили примером для рассмотрения таких движений в задаче о движении неавтономного гиростата [7, 8]. Прецессионные движения гиростата имеют более сложный характер, чем равномерные вращения, так как они являются суперпозицией двух вращений тела-носителя относительно осей, одна из которых неизменно связана с телом, а другая неподвижна в пространстве (см., например, [6]). Тем не менее и при изучении этого класса движений установлены многочисленные результаты [9–16].

В данной статье рассмотрен более общий случай, когда тело-носитель содержит два маховика, вращающихся вокруг ортогональных осей. Предложен общий метод исследования прецессий гиростата относительно вертикали, установлен вид дифференциального уравнения на функции, задающие скорости прецессии и собственного вращения. Указан пример разрешимости этого уравнения, который характеризует маятниковые движения тела-носителя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гиростат, момент количества движения которого выражается формулой [2] $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\beta}$. Уравнения движения гиростата имеют вид [2, 11]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\beta} - B\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — единичные ортогональные векторы, фиксированные в теленосителе; λ_1, λ_2 — дифференцируемые функции времени, являющиеся компонентами гиростатического момента в базисе векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ — симметричные постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, λ_1, λ_2 обозначает дифференцирование по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1 \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Рассмотрим прецессионные движения гиростата относительно вертикали [6, 12]. Третью ось подвижной системы координат направим по единичному вектору $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, который образует постоянный угол с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Тогда имеем [6]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos\theta_0, \quad \boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi,\ a_0' \cos\varphi,\ a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{a} + \dot{\psi}(t)\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$, φ и ψ – новые переменные, кинематический смысл которых состоит в том, что они могут трактоваться как углы Эйлера.

Подстановка соотношений (4) в кинематическое уравнение (2) дает тождество. Внесем выражение для $\boldsymbol{\omega}$ в (1):

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi} A\boldsymbol{a} + \ddot{\psi} A\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\Big[Sp(A)\big(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}\big) - 2\big(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}\big)\Big] - \dot{\varphi}^2\big(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}\big) - \\
&- \dot{\psi}^2\big(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}\big) + \dot{\varphi}\big(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}\big) + \dot{\psi}\big(B\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}\big) - \lambda_1\Big[\dot{\varphi}\big(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}\big) + \dot{\psi}\big(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}\big)\Big] - \\
&- \lambda_2\Big[\dot{\varphi}\big(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}\big) + \dot{\psi}\big(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}\big)\Big] + \dot{\lambda}_1 \boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2 \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $Sp(A)$ – след матрицы A.

По аналогии с [11, 12] при анализе уравнения (5) удобно использовать базис с ортами $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Так как

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \qquad |\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \tag{6}$$

то, умножая левую часть уравнения (5) скалярно соответственно на $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$, получим

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1 - \lambda_2\Big[\gamma_3\dot{\varphi} + \big(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3\big)\dot{\psi}\Big] + F_1 = 0, \\
&\dot{\lambda}_2 + \lambda_1\Big[\gamma_3\dot{\varphi} + \big(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3\big)\dot{\psi}\Big] + F_2 = 0, \\
&\lambda_2\Big[\alpha_3\dot{\varphi} + \big(a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_2 \cos\varphi + a_0\alpha_3\big)\dot{\psi}\Big] - \\
&\qquad -\lambda_1\Big[\beta_3\dot{\varphi} + \big(a_0'\beta_1 \sin\varphi + a_0'\beta_2 \cos\varphi + a_0\beta_3\big)\dot{\psi}\Big] + F_3 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
F_i &= d_{0,i}\ddot{\varphi} + \big(d'_{1,i}\sin\varphi + d_{1,i}\cos\varphi + a_0 d_{0,i}\big)\ddot{\psi} + A_{0,i}\dot{\varphi}^2 - \\
&- \Big(A_{2,i}\cos 2\varphi + A'_{2,i}\sin 2\varphi + a_0 A_{1,i}\cos\varphi + a_0 A'_{1,i}\sin\varphi + \varkappa_0 A_{0,i}\Big)\dot{\psi}^2 + \\
&+ \dot{\varphi}\dot{\psi}\Big[\big(d'_{1,i} - A_{1,i}\big)\cos\varphi - \big(d_{1,i} + A'_{1,i}\big)\sin\varphi + 2a_0 A_{0,i}\Big] + \big(h'_{1,i}\sin\varphi + \\
&+ h_{1,i}\cos\varphi + a_0 h_{0,i}\big)\dot{\varphi} + \Big(B_{2,i}\cos 2\varphi + B'_{2,i}\sin 2\varphi + a_0 B_{1,i}\cos\varphi + \\
&+ a_0 B'_{1,i}\sin\varphi - \varkappa_0 h_{0,i}\Big)\dot{\psi} + C_{2,i}\cos 2\varphi + C'_{2,i}\sin 2\varphi + \delta_{1,i}\cos\varphi + \\
&+ \delta'_{1,i}\sin\varphi + \delta_{0,i},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\quad \boldsymbol{e}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}) \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\gamma}),$

$$\begin{aligned}
&d_{0,i} = e_{1,i}A_{13} + e_{2,i}A_{23} + e_{3,i}A_{33}, \qquad d'_{1,i} = a'_0\big(e_{1,i}A_{11} + e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\big),\\
&d_{1,i} = a'_0\big(e_{1,i}A_{12} + e_{2,i}A_{22} + e_{3,i}A_{23}\big), \qquad A_{0,i} = e_{2,i}A_{13} - e_{1,i}A_{23},\\
&A_{1,i} = a'_0\Big[e_{1,i}\big(A_{22} - A_{33}\big) - e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\Big],\\
&A'_{1,i} = a'_0\Big[e_{2,i}\big(A_{33} - A_{11}\big) + e_{1,i}A_{12} - e_{3,i}A_{23}\Big],\\
&A_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\big(2e_{3,i}A_{12} - e_{1,i}A_{23} - e_{2,i}A_{13}\big),\\
&A'_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\Big[e_{2,i}A_{23} - e_{1,i}A_{13} + e_{3,i}(A_{11} - A_{22})\Big],\\
&h_{1,i} = a'_0\big(e_{1,i}B_{22} - e_{2,i}B_{12}\big), \qquad h'_{1,i} = a'_0\big(e_{1,i}B_{12} - e_{2,i}B_{11}\big),\\
&h_{0,i} = e_{1,i}B_{23} - e_{2,i}B_{13}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{2}(a'^2_0 - 2a_0^2),\\
&B_{1,i} = a'_0\Big[e_{1,i}\big(B_{22} - B_{33}\big) - e_{2,i}B_{12} + e_{3,i}B_{13}\Big],\\
&B'_{1,i} = a'_0\Big[e_{2,i}\big(B_{33} - B_{11}\big) + e_{1,i}B_{12} - e_{3,i}B_{23}\Big],\\
&B_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\big(2e_{3,i}B_{12} - e_{1,i}B_{23} - e_{2,i}B_{13}\big),\\
&B'_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\Big[e_{2,i}B_{23} - e_{1,i}B_{13} + e_{3,i}(B_{11} - B_{22})\Big],\\
&C_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\big(2e_{3,i}C_{12} - e_{1,i}C_{23} - e_{2,i}C_{13}\big),\\
&C'_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\Big[e_{2,i}C_{23} - e_{1,i}C_{13} + e_{3,i}(C_{11} - C_{22})\Big],\\
&\delta'_{1,i} = a'_0\Big[a_0\big(e_{2,i}C_{33} - e_{2,i}C_{11} - e_{1,i}C_{12} - e_{3,i}C_{23}\big) + e_{3,i}s_2 - e_{2,i}s_3\Big],\\
&\delta_{1,i} = a'_0\Big[a_0\big(e_{1,i}C_{22} - e_{1,i}C_{33} - e_{2,i}C_{12} + e_{3,i}C_{13}\big) + e_{1,i}s_3 - e_{3,i}s_1\Big],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_{0,i} = \varkappa_0\big(e_{2,i}C_{13} - e_{1,i}C_{23}\big) + a_0\big(e_{2,i}s_1 - e_{1,i}s_2\big),\\
&A_2 = \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad A_2' = a_0'^2 A_{12}, \quad A_1' = a_0' A_{13}, \quad A_1 = a_0' A_{23},\\
&B_2 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22} - B_{11}), \quad B_2' = a_0'^2 B_{12}, \quad B_1' = a_0' B_{13}, \quad B_1 = a_0' B_{23},\\
&A_0 = \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} + A_{11}) + a_0^2 A_{33}^2, \quad B_0 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22} + B_{11}) + a_0^2 B_{33}^2.
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&M = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2\cos\varphi + a_0\alpha_3,\\
&N = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + a_0\beta_3,\\
&L = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + a_0\gamma_3,\\
&F_4 = A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} + 2k) = (A_1'\sin\varphi + A_1\cos\varphi + a_0A_{33})\dot\varphi +\\
&\quad + (A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + 2a_0A_1\cos\varphi + 2a_0A_1'\sin\varphi + A_0)\dot\psi -\\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(B_2'\sin 2\varphi + B_2\cos 2\varphi + 2a_0B_1\cos\varphi + 2a_0B_1'\sin\varphi + B_0 + 2k\Big) = 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Запишем с учетом (9) интеграл моментов из (3):

$$
\lambda_1 M + \lambda_2 N + F_4 = 0. \tag{10}
$$

Из интеграла (10) и третьего соотношения из (7) найдем

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{NF_3 - F_4(\alpha_3\dot\varphi + M\dot\psi)}{\dot\varphi(\alpha_3M + \beta_3N) + \dot\psi(M^2 + N^2)},\\
\lambda_2 &= -\frac{MF_3 + F_4(\beta_3\dot\varphi + N\dot\psi)}{\dot\varphi(\alpha_3M + \beta_3N) + \dot\psi(M^2 + N^2)}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Отметим, что в силу (6) для векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ справедливы очевидные соотношения

$$
\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j,\\ 1, \text{ если } i = j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{12}
$$

Учитывая (12), (4) и (9), преобразуем знаменатель в (11):

$$
\dot\varphi(\alpha_3M + \beta_3N) + \dot\psi(M^2 + N^2) = a_0\dot\varphi + \dot\psi - L(\gamma_3\dot\varphi + L\dot\psi).
$$

Введем следующие замены:

$$F_1 = R_1\ddot{\varphi} + R_2\ddot{\psi} + R_3\dot{\varphi}\dot{\psi} + R_4\dot{\varphi}^2 + R_5\dot{\psi}^2 + R_6\dot{\varphi} + R_7\dot{\psi} + R_8,$$
$$NF_3 - F_4(\alpha_3\dot{\varphi} + M\dot{\psi}) = P_1\ddot{\varphi} + P_2\ddot{\psi} + P_3\dot{\varphi}\dot{\psi} + P_4\dot{\varphi}^2 + P_5\dot{\psi}^2 + P_6\dot{\varphi} +$$
$$+ P_7\dot{\psi} + P_8, \qquad MF_3 + F_4(\beta_3\dot{\varphi} + N\dot{\psi}) = Q_1\ddot{\varphi} + Q_2\ddot{\psi} + Q_3\dot{\varphi}\dot{\psi} +$$
$$+ Q_4\dot{\varphi}^2 + Q_5\dot{\psi}^2 + Q_6\dot{\varphi} + Q_7\dot{\psi} + Q_8, \tag{13}$$

где

$$R_1 = d_{0,1},\ \ R_2 = d'_{1,1}\sin\varphi + d_{1,1}\cos\varphi + a_0 d_{0,1},$$
$$R_3 = (d'_{1,1} - A_{1,1})\cos\varphi - (d_{1,1} + A'_{1,1})\sin\varphi + 2a_0 A_{0,1},\ \ R_4 = A_{0,1},$$
$$R_5 = -(A_{2,1}\cos 2\varphi + A'_{2,1}\sin 2\varphi + a_0 A_{1,1}\cos\varphi + a_0 A'_{1,1}\sin\varphi + \varkappa_0 A_{0,1}),$$
$$R_6 = h'_{1,1}\sin\varphi + h_{1,1}\cos\varphi + a_0 h_{0,1},$$
$$R_7 = B_{2,1}\cos 2\varphi + B'_{2,1}\sin 2\varphi + a_0 B_{1,1}\cos\varphi + a_0 B'_{1,1}\sin\varphi - \varkappa_0 h_{0,1},$$
$$R_8 = C_{2,1}\cos 2\varphi + C'_{2,1}\sin 2\varphi + \delta_{1,1}\cos\varphi + \delta'_{1,1}\sin\varphi + \delta_{0,1},$$
$$P_1 = d_{0,3}(a'_0\beta_1\sin\varphi + a'_0\beta_2\cos\varphi + a_0\beta_3),$$
$$P_2 = \frac{a'_0}{2}(\beta_2 d_{1,3} - \beta_1 d'_{1,3})\cos 2\varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_1 d_{1,3} + \beta_2 d'_{1,3})\sin 2\varphi +$$
$$+ a_0(a'_0\beta_2 d_{0,3} + \beta_3 d_{1,3})\cos\varphi + a_0(a'_0\beta_1 d_{0,3} + \beta_3 d'_{1,3})\sin\varphi +$$
$$+ \frac{a'_0}{2}(\beta_1 d'_{1,3} + \beta_2 d_{1,3}) + a_0^2\beta_3 d_{0,3},$$
$$P_3 = \Big[\frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A'_1 - \alpha_2 A_1 + \beta_1(d_{1,1} + A'_{1,1}) + \beta_2(d'_{1,1} - A_{1,1})) -$$
$$- \alpha_3 A_2\Big]\cos 2\varphi + \Big[\frac{a'_0}{2}(\beta_1(d'_{1,1} - A_{1,1}) - \beta_2(d_{1,1} + A'_{1,1}) - \alpha_2 A'_1 -$$
$$- \alpha_1 A_1) - \alpha_3 A'_2\Big]\sin 2\varphi + a_0(\beta_3(d'_{1,1} - A_{1,1}) + 2a'_0\beta_2 A_{0,3} - 3\alpha_3 A_1 -$$
$$- a'_0\alpha_2 A_{33})\cos\varphi + a_0(2a'_0\beta_1 A_{0,3} - \beta_3(d_{1,1} + A'_{1,1}) - 3\alpha_3 A'_1 -$$
$$- a'_0\alpha_1 A_{33})\sin\varphi + \frac{a'_0}{2}(\beta_2(d'_{1,1} - A_{1,1}) - \beta_1(d_{1,1} + A'_{1,1}) - \alpha_2 A_1 -$$
$$- \alpha_1 A'_1) + a_0^2(2\beta_3 A_{0,3} - \alpha_3 A_{33}) - \alpha_3 A_0, \qquad P_4 = (a'_0\beta_1 A_{0,3} -$$
$$- \alpha_3 A'_1)\sin\varphi + (a'_0\beta_2 A_{0,3} - \alpha_3 A_1)\cos\varphi + a_0(\beta_3 A_{0,3} - \alpha_3 A_{33}),$$
$$P_5 = \frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A'_2 - \alpha_2 A_2 + \beta_1 A'_{2,3} - \beta_2 A_{2,3})\cos 3\varphi - \frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A_2 + \alpha_2 A'_2 +$$
$$+ \beta_1 A_{2,3} + \beta_2 A'_{2,3})\sin 3\varphi + a_0\Big[\frac{a'_0}{2}(2\alpha_1 A'_1 - 2\alpha_2 A_1 + \beta_1 A'_{1,3} - \beta_2 A_{1,3}) -$$
$$- \alpha_3 A_2 - \beta_3 A_{2,3}\Big]\cos 2\varphi - a_0\Big[\frac{a'_0}{2}(2\alpha_1 A_1 + 2\alpha_2 A'_1 + \beta_1 A_{1,3} + \beta_2 A'_{1,3}) +$$
$$+ \alpha_3 A'_2 + \beta_3 A'_{2,3}\Big]\sin 2\varphi - \Big[\frac{a'_0}{2}(\alpha_1 A'_2 + \alpha_2(A_2 + 2A_0) + \beta_1 A'_{2,3} + \tag{14}$$

$$+\beta_2(A_{2,3}+2\varkappa_0 A_{0,3})\big)+a_0^2(2\alpha_3 A_1+\beta_3 A_{1,3})\Big]\cos\varphi+\Big[\frac{a_0'}{2}\big(\beta_1(A_{2,3}-$$

$$-2\varkappa_0 A_{0,3})-\beta_2 A_{2,3}'+\alpha_1(A_2-2A_0)-\alpha_2 A_2'\big)-a_0^2(2\alpha_3 A_1'+$$

$$+\beta_3 A_{1,3}')\Big]\sin\varphi-\frac{a_0}{2}\Big[a_0'(2\alpha_1 A_1'+2\alpha_2 A_1+\beta_1 A_{1,3}'+\beta_2 A_{1,3})+2\alpha_3 A_0+$$

$$+2\beta_3\varkappa_0 A_{0,3}\Big],$$

$$P_6=\Big[\frac{a_0'}{2}(\beta_2 h_{1,3}-\beta_1 h_{1,3}')+\frac{1}{2}\alpha_3 B_2\Big]\cos 2\varphi+\Big[\frac{a_0'}{2}(\beta_1 h_{1,3}+$$

$$+\beta_2 h_{1,3}')+\frac{1}{2}\alpha_3 B_2'\Big]\sin 2\varphi+a_0(a_0'\beta_2 h_{0,3}+\beta_3 h_{1,3}+\alpha_3 B_1)\cos\varphi+$$

$$+a_0(a_0'\beta_1 h_{0,3}+\beta_3 h_{1,3}'+\alpha_3 B_1')\sin\varphi+\frac{a_0'}{2}(\beta_1 h_{1,3}'+\beta_2 h_{1,3})+a_0^2\beta_3 h_{0,3}+$$

$$+\alpha_3\big(k+\frac{B_0}{2}\big),\ \ P_7=\frac{a_0'}{4}(\alpha_2 B_2-\alpha_1 B_2'+2\beta_2 B_{2,3}-2\beta_1 B_{2,3}')\cos 3\varphi+$$

$$+\frac{a_0'}{4}(\alpha_1 B_2+\alpha_2 B_2'+2\beta_1 B_{2,3}+2\beta_2 B_{2,3}')\sin 3\varphi+\frac{a_0}{2}\Big[a_0'(\alpha_2 B_1-\alpha_1 B_1'+$$

$$+\beta_2 B_{1,3}-\beta_1 B_{1,3}')+\alpha_3 B_2+2\beta_3 B_{2,3}\Big]\cos 2\varphi+\frac{a_0}{2}\Big[a_0'(\alpha_1 B_1+\alpha_2 B_1'+$$

$$+\beta_1 B_{1,3}+\beta_2 B_{1,3}')+\alpha_3 B_2'+2\beta_3 B_{2,3}'\Big]\sin 2\varphi+\Big\{\frac{a_0'}{4}\Big[\alpha_2(B_2+2B_0+4k)+$$

$$+\alpha_1 B_2'+2\beta_2(B_{2,3}-2\varkappa_0 h_{0,3})+2\beta_1 B_{2,3}'\Big]+a_0^2(\alpha_3 B_1+\beta_3 B_{1,3})\Big\}\cos\varphi+$$

$$+\Big\{\frac{a_0'}{4}\Big[\alpha_1(4k+2B_0-B_2)+\alpha_2 B_2'-2\beta_1(B_{2,3}+2\varkappa_0 h_{0,3})+2\beta_2 B_{2,3}'\Big]+$$

$$+a_0^2(\alpha_3 B_1'+\beta_3 B_{1,3}')\Big\}\sin\varphi+\frac{a_0}{2}\Big[a_0'(\alpha_1 B_1'+\alpha_2 B_1+\beta_1 B_{1,3}'+\beta_2 B_{1,3})+$$

$$+\alpha_3(2k+B_0)-2\beta_3\varkappa_0 h_{0,3}\Big],\quad P_8=\frac{a_0'}{2}(\beta_2 C_{2,3}-\beta_1 C_{2,3}')\cos 3\varphi+$$

$$+\frac{a_0'}{2}(\beta_2 C_{2,3}'+\beta_1 C_{2,3})\sin 3\varphi+\Big[\frac{a_0'}{2}(\beta_2\delta_{1,3}-\beta_1\delta_{1,3}')+a_0\beta_3 C_{2,3}\Big]\cos 2\varphi+$$

$$+\Big[\frac{a_0'}{2}(\beta_1\delta_{1,3}+\beta_2\delta_{1,3}')+a_0\beta_3 C_{2,3}'\Big]\sin 2\varphi+\Big[\frac{a_0'}{2}(\beta_2 C_{2,3}+\beta_1 C_{2,3}'+$$

$$+2\beta_2\delta_{0,3})+a_0\beta_3\delta_{1,3}\Big]\cos\varphi+\Big[\frac{a_0'}{2}(\beta_2 C_{2,3}'-\beta_1 C_{2,3}+2\beta_1\delta_{0,3})+$$

$$+a_0\beta_3\delta_{1,3}'\Big]\sin\varphi+\frac{a_0'}{2}(\beta_1\delta_{1,3}'+\beta_2\delta_{1,3})+a_0\beta_3\delta_{0,3}.$$

Выражения для Q_i получаются из P_i заменой α_k на $-\beta_k$, а β_k – на α_k соответственно ($i=\overline{1,8},\ k=1,2,3$).

Подставим выражения (11) в первое уравнение из (7):

$$\begin{gathered}\big[a_0\dot\varphi+\dot\psi-L(\gamma_3\dot\varphi+L\dot\psi)\big]\Big\{P_1\dddot\varphi+P_2\dddot\psi+\ddot\varphi\big[(2P_4+P_1'+\gamma_3Q_1)\dot\varphi+(P_3+\\+Q_1L)\dot\psi+P_6\big]+\ddot\psi\big[(2P_5+Q_2L)\dot\psi+(P_2'+P_3+\gamma_3Q_2)\dot\varphi+P_7\big]+(P_4'+\\+\gamma_3Q_4)\dot\varphi^3+Q_5L\dot\psi^3+\dot\varphi^2\big[(P_3'+Q_3\gamma_3+Q_4L)\dot\psi+P_6'+\gamma_3Q_6\big]+\dot\psi^2\big[(P_5'+\\+\gamma_3Q_5+Q_3L)\dot\varphi+Q_7L\big]+\dot\varphi\dot\psi(P_7'+\gamma_3Q_7+LQ_6)+(P_8'+\gamma_3Q_8)\dot\varphi+\\+LQ_8\dot\psi\Big\}-\Big\{P_1\ddot\varphi^2(a_0-\gamma_3L)+P_2\ddot\psi^2(1-L^2)+\ddot\varphi\ddot\psi\big[P_2(a_0-\gamma_3L)+\\+P_1(1-L^2)\big]+\ddot\varphi\big[\dot\varphi^2\big(P_4(a_0-\gamma_3L)-\gamma_3P_1L'\big)+\dot\psi^2P_5(a_0-\gamma_3L)+\\+\dot\varphi\dot\psi\big(P_3(1-L^2)-2P_2LL'\big)+(1-L^2)(P_6\dot\varphi+P_7\dot\psi+P_8)\big]-L'\big[\gamma_3P_4\dot\varphi^4+\\+\dot\varphi^3\big(\gamma_3P_6+\dot\psi(\gamma_3P_3+2P_4L)\big)+2P_5L\dot\varphi\dot\psi^3+(2P_3L+\gamma_3P_5)\dot\varphi^2\dot\psi^2+\\+\dot\varphi^2\big(\gamma_3P_8+\dot\psi(2P_6L+\gamma_3P_7)\big)+2\dot\varphi\dot\psi L(P_7\dot\psi+P_8)\big]\Big\}+\big[a_0\dot\varphi+\dot\psi-\\-L(\gamma_3\dot\varphi+L\dot\psi)\big]^2(R_1\ddot\varphi+R_2\ddot\psi+R_3\dot\varphi\dot\psi+R_4\dot\varphi^2+R_5\dot\psi^2+R_6\dot\varphi+\\+R_7\dot\psi+R_8)=0,\end{gathered}\tag{15}$$

где $P_i'=dP_i/d\varphi\;\;(i=\overline{1,8}),\qquad L'=dL/d\varphi.$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение (15) на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, которое с учетом (13) и (14) задает прецессионные движения общего вида относительно вертикали для гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом, оси которых ортогональны.

2. Маятниковые движения. Положим $B=0$, $C=0$, $\dot\psi=0$, а скорость собственного вращения зададим соотношением

$$\dot\varphi^2=p_0+p_1\sin\varphi.\tag{16}$$

Тогда система (7) примет вид

$$\begin{aligned}&\dot\lambda_1=\gamma_3\dot\varphi\lambda_2-F_1,\\&\dot\lambda_2=-\gamma_3\dot\varphi\lambda_1-F_2,\\&\dot\varphi(\alpha_3\lambda_2-\beta_3\lambda_1)+F_3=0,\end{aligned}\tag{17}$$

где с учетом (8) и (16) обозначено:

$$F_1=g_1\sin\varphi+g_2\cos\varphi+g_0,\qquad F_2=h_1\sin\varphi+h_2\cos\varphi+h_0,$$

$$F_3=f_1\sin\varphi+f_2\cos\varphi+f_0,$$

$$g_1=(\alpha_2A_{13}-\alpha_1A_{23})p_1+a_0'(\alpha_3s_2-\alpha_2s_3),$$

$$
\begin{aligned}
g_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33})p_1 + a_0'(\alpha_1 s_3 - \alpha_3 s_1),\\
g_0 &= (\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23})p_0 + a_0(\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2),\\
h_1 &= (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23})p_1 + a_0'(\beta_3 s_2 - \beta_2 s_3),\\
h_2 &= \frac{1}{2}(\beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33})p_1 + a_0'(\beta_1 s_3 - \beta_3 s_1),\\
h_0 &= (\beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23})p_0 + a_0(\beta_2 s_1 - \beta_1 s_2),\\
f_1 &= (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23})p_1 + a_0'(\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3),\\
f_2 &= \frac{1}{2}(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33})p_1 + a_0'(\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1),\\
f_0 &= (\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23})p_0 + a_0(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2).
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы исключить переменные λ_1 и λ_2, разделим в (17) все уравнения на $\dot\varphi$ и с учетом (16) дважды продифференцируем последнее уравнение системы по φ. Получим уравнение

$$
\begin{aligned}
&\gamma_3\Big[\gamma_3(f_1\sin\varphi + f_2\cos\varphi + f_0) + \alpha_3(g_1\sin\varphi + g_2\cos\varphi + g_0) +\\
&+ \beta_3(h_1\sin\varphi + h_2\cos\varphi + h_0)\Big] + \beta_3\Big[g_1\cos\varphi - g_2\sin\varphi -\\
&- \frac{p_1\cos\varphi(g_1\sin\varphi + g_2\cos\varphi + g_0)}{2(p_0 + p_1\sin\varphi)}\Big] - \alpha_3\Big[h_1\cos\varphi - h_2\sin\varphi -\\
&- \frac{p_1\cos\varphi(h_1\sin\varphi + h_2\cos\varphi + h_0)}{2(p_0 + p_1\sin\varphi)}\Big] - f_1\sin\varphi - f_2\cos\varphi - \\
&- \frac{p_1\cos\varphi(f_1\cos\varphi - f_2\sin\varphi)}{p_0 + p_1\sin\varphi} + \frac{p_1\sin\varphi(f_1\sin\varphi + f_2\cos\varphi + f_0)}{2(p_0 + p_1\sin\varphi)} +\\
&+ \frac{3p_1^2\cos^2\varphi(f_1\sin\varphi + f_2\cos\varphi + f_0)}{4(p_0 + p_1\sin\varphi)^2} = 0,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

которое должно быть тождеством по φ. Это, в частности, возможно при выполнении условия

$$
f_1\sin\varphi + f_2\cos\varphi + f_0 = \mu_0(p_0 + p_1\sin\varphi), \tag{19}
$$

где μ_0 – некоторый параметр.

Преобразовывая (18) с учетом (19) и требуя тождественного равенства нулю тригонометрического многочлена, приходим к совокупности условий

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33})p_1 + a_0'(\gamma_1 s_3 - \gamma_3 s_1) = 0,\\
&(\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23})p_1 + a_0'(\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3) - \mu_0 p_1 = 0,\\
&(\gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23})p_0 + a_0(\gamma_2 s_1 - \gamma_1 s_2) - \mu_0 p_0 = 0,\\
&2(\beta_3 g_2 - \alpha_3 h_2) - 4\gamma_3(\alpha_3 g_1 + \beta_3 h_1) + \mu_0 p_1(1 - 4\gamma_3^2) = 0,\\
&\beta_3 g_1 - \alpha_3 h_1 + 2\gamma_3(\alpha_3 g_2 + \beta_3 h_2) = 0,\\
&2p_0(\beta_3 g_1 - \alpha_3 h_1) + p_1(\alpha_3 h_0 - \beta_3 g_0) + 2\gamma_3 p_0(\alpha_3 g_2 + \beta_3 h_2) = 0,\\
&2p_0(\alpha_3 h_2 - \beta_3 g_2) + 2\gamma_3\Big[p_0(\alpha_3 g_1 + \beta_3 h_1) + p_1(\alpha_3 g_0 + \beta_3 h_0)\Big] -\\
&- p_0 p_1 \mu_0(1 - 4\gamma_3^2) = 0,\\
&4\gamma_3\Big[2p_0(\alpha_3 g_0 + \beta_3 h_0) + p_1(\alpha_3 g_1 + \beta_3 h_1) + 6p_1(\alpha_3 h_2 - \beta_3 g_2)\Big] +\\
&+ \mu_0\Big[p_1^2(4\gamma_3^2 - 3) + 8\gamma_3^2 p_0^2\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Для нахождения λ_1 и λ_2 используем с учетом (19) последнее уравнение из (17) и его производную

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3\lambda_2 - \beta_3\lambda_1 + \mu_0\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi} = 0,\\
&-\gamma_3(\alpha_3\lambda_1 + \beta_3\lambda_2) + (r_1\sin\varphi + r_2\cos\varphi + r_0)\big/\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi} = 0,
\end{aligned}
$$

где $r_1 = \beta_3 g_1 - \alpha_3 h_1$, $\quad r_2 = \beta_3 g_2 - \alpha_3 h_2 + \frac{1}{2}\mu_0 p_1$, $\quad r_0 = \beta_3 g_0 - \alpha_3 h_0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\alpha_3(r_1\sin\varphi + r_2\cos\varphi + r_0) + \mu_0\gamma_3\beta_3(p_0 + p_1\sin\varphi)}{\gamma_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}},\\
\lambda_2 &= \frac{\beta_3(r_1\sin\varphi + r_2\cos\varphi + r_0) - \mu_0\gamma_3\alpha_3(p_0 + p_1\sin\varphi)}{\gamma_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)\sqrt{p_0 + p_1\sin\varphi}}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Рассмотрим движение, при котором угол нутации $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Из первого и третьего уравнений (20) найдем соответственно

$$
p_1 = \frac{2(\gamma_3 s_1 - \gamma_1 s_3)}{\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}}, \qquad \mu_0 = \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}. \tag{22}
$$

Второе уравнение системы (20) примет вид

$$
\gamma_3 s_2 - \gamma_2 s_3 = 0.
$$

При $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = 0$ оставшиеся уравнения системы (20) обращаются в нуль при $s_3 = 0$, что приводит к $\dot{\varphi} = \text{const}$. При $\gamma_2 \neq 0$ найдем

$$s_3 = \frac{\gamma_3 s_2}{\gamma_2}. \tag{23}$$

Система (20) с учетом (12), (22), (23) обращается в нуль при $s_2 = 0$. Случай $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ здесь не рассматривается. Из (21) получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}}{\gamma_3} \sqrt{p_0 + p_1 \sin\varphi}, \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}}{\gamma_3} \sqrt{p_0 + p_1 \sin\varphi}. \end{aligned} \tag{24}$$

Заключение. Предложен общий метод исследования прецессионных движений гиростата, несущего два вращающихся ротора. Показано, что уравнения движения гиростата (1), (2) при $s_2 = s_3 = 0$ и выполнении условий (4) с $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ допускают решение, которое характеризуется равенствами (16), (22) и (24). Этому решению соответствуют маятниковые движения гиростата.

1. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – Вып. 2. – С. 83–96.
2. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 4. – С. 52–73.
3. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – М.;Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-е НГУ, 1965.– 221 с.
5. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2012. – 364 с.
7. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5.– С. 825–826.
8. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
9. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **21**. – С. 64–75.
12. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
13. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Доп. НАН України. – 2011. – № 8. – С. 66–72.

14. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.
15. *Мазнев А.В.* Один случай прецессии общего вида гиростата с переменным гиростатическим моментом // Доп. НАН України. – 2012. – № 3. – С. 72–77.
16. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–83.

G.A. Kotov

Precessions of the general form in the problem of the motion for a gyrostat carrying two flywheels with variable gyrostatic moment

The general method for studying the precessional motions of a gyrostat under the influence of potential and gyroscopic forces is proposed for the case when the attached bodies are two flywheels with variable gyrostatic moment. The new case of integrability of the equations of gyrostat motion in the gravity field is obtained; it corresponds to the pendulum motion of the carrier body.

Keywords: *precession, gyrostat, potential and gyroscopic forces, the pendulum motions.*

Г.О. Котов

Прецесії загального виду в задачі про рух гіростата, що несе два маховика зі змінним гіростатичним моментом

Запропоновано загальний метод дослідження прецесійних рухів гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку, коли тілами, яких несуть, є два маховика зі змінним гіростатичним моментом. Встановлено новий випадок інтегрування рівнянь руху гіростата під впливом сили тяжіння, що відповідає маятниковим рухам тіла-носія.

Ключові слова: *прецесії, гіростат, потенціальні і гіроскопічні сили, маятникові рухи.*

Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры, Макеевка

kotov_ga@rambler.ru

Получено 15.06.13