УДК 681.325.5.068

Н.В. САЧАНЮК-КАВЕЦЬКА

АНАЛІТИЧНА ОБРОБКА ЛОГІКО-ЧАСОВИХ ФУНКЦІЙ ШЛЯХОМ ПОДАННЯ ЇХ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМІВ

Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна,
Тел.: (+380) (432) 598-464, E-mail: sachanuk@ya.ru

Анотація. В статті розглядається можливість подання логіко-часових функцій за допомогою поліномів, що дозволяє розширити формальний математичний апарат в практичних задачах розпізнавання образів.

Аннотация. В статье рассматривается возможность представления логико-временных функций с помощью полиномов, что даёт возможность расширить формальный математический аппарат в практических задачах распознавания изображений.

Abstract. In article discusses the possibility of logic-temporary functions using polynomial, thus extending the formal mathematical apparatus practical problems of pattern recognition.

Ключові слова: ЛЧФ, Δ- розбиття, поліном

ВСТУП

Сучасний етап розвитку обчислювальної техніки характеризується пошуком архітектур комп'ютерів нового покоління, теоретична основа яких все частіше спирається на теорію штучного інтелекту а їх практична реалізація починає використовувати оптичні елементи та пристрої.

Оскільки обробка інформації представляє собою послідовність певних дій в часі, то це дає право розглядати всі сигнали, пов'язані з обробкою, як логічні функції часу. Особливо актуальний такий підхід, як сказано в роботі [1], для опису функціонування оптичних елементів. Саме в цій роботі проф. Кожем'яко В.П. було введено поняття логіко-часової функції (ЛЧФ) [1]. Пізніше, з метою аналітичної обробки ЛЧФ було створено деякий математичний апарат, який дозволяє вдосконалити формальний процес моделювання [3].

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ АНАЛІТИЧНОЇ ОБРОБКИ ЛЧФ

В основу цього апарату було покладено Δ- розбиття ЛЧФ по часу. При цьому деякий часовий проміжок $[t_k, t_{k+1}]$ розбиваємо на Δ -інтервали.

Відмітимо, що при побудові довільного Δ- розбиття необхідно дотримуватись наступних правил.

Правило 1. Межі Δ- інтервалу, вважаються початками відповідного Δ- розбиття, тобто вказане розбиття виконується по обидві сторони від Δ- інтервалу

Правило 2. Якщо дробова частина $\dfrac{t_{k+1}-t_k}{\Delta_i}$ не менша за 0,5, то кількість отриманих інтервалів збільшується на одиницю.

На довільному Δ- інтервалі розбиття ЛЧФ може змінювати своє значення. В таких випадках доцільно коригувати значення відповідної функції. Це корегування ідентичне квантуванню, але для ЛЧФ вказане корегування виконується по тій же координаті, що й згадана дискретизація. В цьому контексті краще використати термін «фільтрація».

Завдяки такому Δ - розбиттю, ми можемо довільну ЛЧФ виду $f(t, t_1, T_1)$ представити у вигляді $f(t, t_1, \Delta_i, t_1+\Delta_i, \Delta_i, t_1+2\Delta_i, \Delta_i, ..., t_1+(n-1)\Delta_i, \Delta_i)$, якщо $T_1 = n\Delta_i$.

В роботах [3, 5, 6] проведено дослідження властивостей та операцій з ЛЧФ в тому числі особливості знаходження звичайних та параметричних похідних першого та вищих порядків як для бінарних так і для багатозначних функцій, знаходження первісної і т.п.

Слід зазначити, що згаданий математичний опис ЛЧФ дозволяє досліджувати логіко-часові функції лише евристичним шляхом. Це робить актуальною задачу подальшої формалізації представлення ЛЧФ, придатного для наступної автоматизованої їх обробки.

МОЖЛИВИЙ ВАРІАНТ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЛЧФ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМІВ

Для цього звернемо увагу на те, що будь-яка логіко-часова функція на довільному проміжку може бути представлена як кодова комбінація, де кожний розряд відповідає якомусь Δ - інтервалові [4]. З огляду на цей факт будь-яку ЛЧФ можна представити у вигляді поліному. Мета такого підходу полягає в спробі аналітичного представлення широкого спектру операцій над ЛЧФ і в першу чергу операцій зсуву.

Нехай часовий інтервал містить n Δ -інтервалів, тоді цій функції буде відповідати поліном $(n-1)$ степеня:

$$P_{n-1}(t) = p_{n-1}t^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} + ... + p_1 t + p_0 , \tag{1}$$

де $p_i = \{0,1\}$, причому $p_i = 0$ відповідають нульовій амплітуді ЛЧФ, $p_i = 1$ – не нульовій.

Наприклад, поліном $P_4(t) = t^4 + t^3 + t^2$ відповідає функції

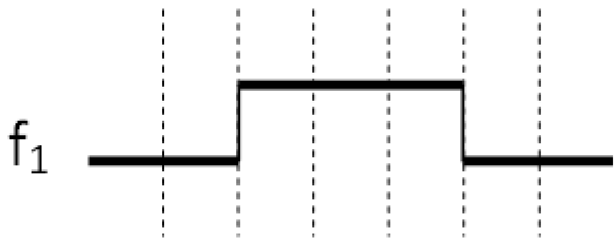

Рис. 1. Можливий варіант ЛЧФ f_1, що між двома нулями приймає стале значення

Поліном $P_5(t) = t^5 + t^4$ відповідає функції $f_2(t, t_2, T_2)$

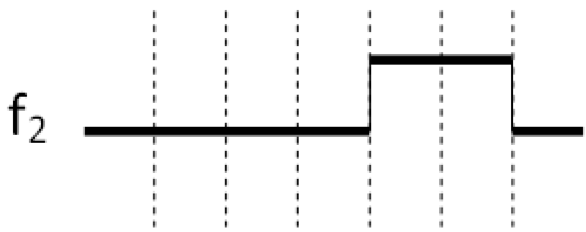

Рис. 2. Можливий варіант ЛЧФ f_2, що між двома нулями приймає стале значення

ОПЕРАЦІЇ НАД ЛЧФ ДЛЯ ВИПАДКУ ПОДАННЯ ЇХ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМІВ

Над поліномами можна виконувати операції додавання та віднімання за модулем 2. Операції мають властивості комутативності та асоціативності. Таким чином, функції $f_1(t, t_1, T_1) \oplus f_2(t, t_2, T_2)$

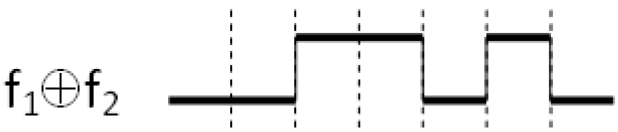

Рис. 3. Результат додавання за модулем два функцій f_1 та f_2

відповідає поліном $P_5(t) = t^5 + t^3 + t^2$.

Нагадаємо, що операція ділення є звичайним діленням многочленів, тільки замість віднімання використовують додавання за модулем 2. Наприклад,

$$\begin{array}{l|l} t^6+t^5+t^4+t^2 & t+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^6+t^5\qquad\quad} & t^5+t^3+t^2 \\ \qquad t^4+t^2 & \\ \quad\underline{\ \ t^4+t^3} & \\ \qquad\quad t^3+t^2 & \\ \qquad\quad\underline{t^3+t^2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array} \qquad (2)$$

Ще однією необхідною для обробки інформації в логіко-часовому середовищі операції є операція диференціювання, яка є результатом додавання по модулю два довільної логіко-часової функції і цієї ж функції з затримкою на Δ-інтервал. Через те, що для поліному затримка на один Δ- інтервал представляє собою його множення на t в першій степені, то для поліному диференціювання зводиться до його множення на поліном $(t+1)$.

Наприклад, функції $f_1(t,t_1,T_1) \oplus f_2(t,t_2,T_2)$ відповідає поліном $P_5(t) = t^5 + t^3 + t^2$. Тоді похідній $(f_1(t,t_1,T_1) \oplus f_2(t,t_2,T_2))'$ відповідає поліном $P(t) = (t^5 + t^3 + t^2)(t+1) = t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^3 + t^2 = t^6 + t^5 + t^4 + t^2$. Такий самий результат ми одержимо продиференціювавши функцію $f_1(t,t_1,T_1) \oplus f_2(t,t_2,T_2)$ традиційно (рис. 4)

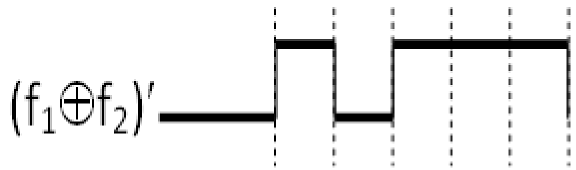

Рис. 4. Результат диференціювання суми за модулем два функцій f_1 та f_2

Зрозуміло, що за заданою похідною можна відновити вихідну функцію, шляхом ділення її на $(t+1)$ (див. приклад ділення многочленів). Іншими словами, якщо функцію можна поділити без остачі на $(t+1)$, то це означає, що дану функцію можна проінтегрувати. Останнє твердження можна вважати необхідною умовою інтегрованості функції. Більше того, саме інтегрування ЛЧФ, буде досить простим, оскільки зводиться до операції ділення поліномів.

Зауважимо, що для зручності проведення математичних викладок будемо використовувати позначення $f = P_n(t)$.

Як і в класичному математичному аналізі можна розглянути поняття похідних вищих порядків, зокрема:

$$f'' = (f')' = f \cdot (t+1)(t+1) = f \cdot (t+1)^2, \text{ де } (t+1)^2 = t^2 + 1; \qquad (3)$$

$$f''' = (f'')' = f \cdot (t+1)^3, \text{ де } (t+1)^3 = t^3 + t^2 + t + 1; \qquad (4)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)} = f \cdot (t+1)^n \qquad (5)$$

Можна показати, що властивості похідної бінарної ЛЧФ, доведені в [3] справедливі і для випадку поліноміального подання. Серед основних властивостей такі:

ЛЧФ та її інверсія мають рівні похідні.

Похідна від суми по модулю два ЛЧФ дорівнює сумі по модулю два похідних ЛЧФ.

Похідні вищих порядків переходять у початкову функцію в залежності від тривалості вхідного сигналу, вираженого в Δ-інтервалах:

а) при тривалості вхідного сигналу 2-4 Δ -інтервали четверта похідна переходить у початкову функцію,

б) 5-8 Δ-інтервалів – восьма похідна переходить у початкову функцію,

в) 9-16 – шістнадцята похідна переходить у дану функцію і т.д.

Доведемо, наприклад, другу властивість для випадку двох функцій. Дійсно, нехай маємо дві логіко-часові функції $f_1 = P_n(t)$ та $f_2 = P_m(t)$. Оскільки $f_1 \oplus f_2 = P_n(t) + P_m(t)$, то

$$(f_1 \oplus f_2)' = (P_n(t) + P_m(t))(t+1) = P_n(t)(t+1) + P_m(t)(t+1) = f_1' \oplus f_2'.$$

Існують ще диференціальні оператори, керовані по параметру. Ці оператори призначені для обробки матриці бінарних даних і є основою для побудови складних керованих процедур, зокрема стиснення, розтягування та мультиплікації. В багатьох випадках існує можливість відновлення вихідної структури бінарних даних за результатами перетворення. Ця властивість використовується при побудові обчислювальних процесів в умовах обмеженості пам'яті.

Параметрична булева похідна визначається як

$$\frac{\partial f(X)}{\partial(\tau X)} = f(X) \oplus f(X+\tau), \tag{6}$$

де τ - параметр, який задає величину зміни X. Вона встановлює факт зміни значення функції $f(X)$ при зміні аргументу X на параметр τ.

Булеві похідні з параметром використовуються при аналізі та синтезі двійкових автоматів, при виявленні динамічних помилок в автоматах, при обробці та синтезі бінарних зображень.

У випадку ЛЧФ параметр τ замінюється на $p\Delta$, де p=1,2,…, τ. Тоді знаходження параметричної похідної по параметру $\tau = p\Delta$ зводиться до множення вихідної функції на поліном (t^p+1)

$$f^{\tau} = f^{(p\Delta)} = f \cdot (t^p + 1). \tag{7}$$

Первісна ЛЧФ, у випадку її представлення поліномом, визначається за формулою:

$$\int P(t) = \frac{P(t)}{(t+1)} + T, \tag{8}$$

де T - константа. Аналогічно параметрична первісна визначається як:

$$\int P(t) = \frac{P(t)}{(t^p+1)} + T. \tag{9}$$

Зрозуміло, що інтегруванню підлягають не всі ЛЧФ. Крім того, можливе і *n*-кратне інтегрування, як зворотна операція знаходження похідної *n*-го порядку.

АПАРАТНА РЕАЛІЗАЦІЯ ОПЕРАЦІЙ НАД ЛЧФ

Не можна не відмітити той факт, що знаходження похідних, особливо вищих порядків та параметричних, нагадує циклічне кодування, в якому вхідне повідомлення множиться на кодоутворюючий поліном. Як бачимо, фізичний зміст такого кодування може полягати в диференціюванні вхідного коду і відповідно декодування – це знаходження первісної (інтегрування). Все це відкриває нові взаємні можливості дослідження як ЛЧФ так і поліноміального, циклічного кодування.

Апаратну реалізацію операцій над ЛЧФ зручно виконати на базі регістрів зсуву з прямими і зворотними зв'язками (рисунок 5). Для аналізу їх роботи використаємо трьох розрядні регістри, що працюють з вхідною послідовністю ***S***, а послідовність на виході позначимо ***P*** [4].

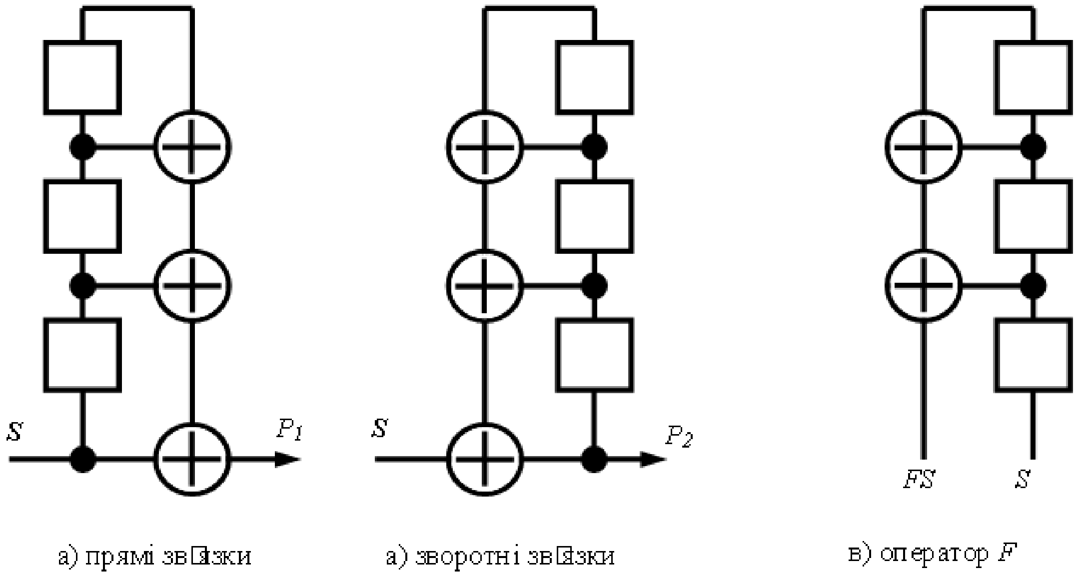

Рис. 5. Схеми диференціювання – інтегрування

Аналогічно введемо оператор t, що представляє собою затримку вхідної послідовності на один біт. Відповідно St^2 означає послідовність S, затриману на два біти. Тоді регістр з прямими зв'язками, в нашому випадку, описується виразом:

$$P_1 = S(1+t+t^2+t^3) = (1+F)S, \quad F = t+t^2+t^3 \;, \tag{10}$$

де додавання виконується по модулю 2.

Оператор F введено для того, щоб описати регістрову частину, незалежно від використання прямих чи зворотних зв'язків.

Далі, якщо P_2 вихід регістру зі зворотним зв'язком, то FP_2 повертається після проходження петлі зворотного зв'язку а $S + FP_2$ виходить з суматору, створюючи P_2. Відповідно,

$$P_2 = S + FP_2 \tag{11}$$

Тому

$$P_2 = \frac{1}{1+F}S = \frac{S}{1+t+t^2+t^3}. \tag{12}$$

Звичайно, регістри з прямим та зворотним зв'язком, в силу того, що їх оператори видно $1+F$ та $\frac{1}{1+F}$ є взаємозворотними.

ВИСНОВКИ

1. Вперше запропоновано подання логіко-часових функцій за допомогою поліномів, що розширило формальний апарат аналізу ЛЧФ для практичних задач.

2. Розглянуті властивості операцій над ЛЧФ в поліноміальній формі розширяють базу знань теорії ЛЧФ.

3. Запропоновано апаратну реалізацію операцій над ЛЧФ на базі регістрів зсуву з прямими і зворотними зв'язками.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожемяко В.П. Оптико-электронные логико-временные информационные вычислительные среды. – Тбилиси: Мецниереба, 1984. –357 с.

2. Кожем'яко В.П. До питання про створення оптоелектронних око-процесорів / Кожем'яко В.П., Головань О.В. // Праці Першої Всеукраїнської конф. УкрОбраз 92. – Київ. – 1992. – С. 205-206.
3. Сачанюк-Кавецька Н.В. Елементи око-процесорної обробки зображень в логіко-часовому середовищі. Монографія / Сачанюк-Кавецька Н.В., Кожем'яко В.П. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця. – 2004. – 135 с.
4. Барбер Д. Сети связи для вычислительных машин. /Барбер Д., Девис Д.– Москва: Мир. – 1976. – 250 с.
5. Принципи ущільнення та перетворення зображень: [Монографія.] / В.П. Кожем'яко, А.С. Васюра, Н.В. Сачанюк-Кавецька, О.В. Кириченко. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2011, – 242 с. – ISBN 978-966-641-404-8
6. Кожем'яко В.П. Визначення чутливості ключ-функції до зміни вхідних характеристик обробки зображень / Кожем'яко В.П., Сачанюк-Кавецька Н.В. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія – 2008. – №1 (11). – с. 209-218.

Надійшла до редакції 04.05.2014р.

САЧАНЮК-КАВЕЦЬКА Н.В. – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.