

УДК 621.372

А. І. СЕГІН

## ПОБУДОВА СПЕКТРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛІВ В РІЗНИХ ТЕОРЕТИКО ЧИСЛОВИХ БАЗИСАХ ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЇХ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

*Тернопільський національний економічний університет,  
46000, вул. Львівська 11, м. Тернопіль, Україна,  
E-mail: andriy.segin@gmail.com*

**Анотація.** Викладені теоретичні основи побудови спектральних характеристик сигналів в полярній системі координат. Здійснено порівняльний аналіз аналітичного та графічного представлення типових сигналів в прямокутних і полярних координатах. Обґрунтовано доцільність здійснення спектрального аналізу сигналів в полярній системі координат, що забезпечує спрощення обчислень, завдяки простішому аналітичному представленню гармонійних сигналів. Показано, що графічне представлення спектральних характеристик сигналів в полярній системі координат у порівнянні з прямокутною є більш наочним і краще відображає фізичний зміст. Спектр періодичних сигналів на усьому проміжку спостереження легко можна відобразити на обмеженому просторі без здійснення масштабування. Запропоновано розраховувати спектральні моделі сигналів не тільки в базисі Фур'є, а й інших теоретико-числових базисах, таких як Крестенсона і Радемахера, що для певних класів сигналів забезпечують кращу збіжність

**Аннотация.** Изложены теоретические основы спектральных характеристик сигналов в полярной системе координат. Произведен сравнительный анализ аналитического и графического представления типичных сигналов в прямоугольных и полярных координатах. Обосновано целесообразность осуществления спектрального анализа сигналов в полярной системе координат, что обеспечивает упрощение вычислений, благодаря более простому аналитическому представлению гармонических сигналов. Показано, что графическое представление спектральных характеристик сигналов в полярной системе координат, по сравнению с прямоугольной, более наглядно и лучше отражает физический смысл. Спектр периодических сигналов на всем промежутке наблюдения легко можно отобразить на ограниченном пространстве без осуществления масштабирования. Предложено рассчитывать спектральные модели сигналов не только в базисе Фурье, но и других теоретико-числовых базисах, таких как Крестенсона и Радемахера, что для определенных классов сигналов обеспечивают лучшую сходимость.

**Abstract.** The theoretical basis of spectral characteristics of the signal in the polar coordinate system. A comparative analysis of analytical and graphical representation of the typical signals in rectangular and polar coordinates. It is proved the feasibility of the implementation of the spectral analysis of the signal in the polar coordinate system, which provides simplification of the calculations, due to a simple analytical representation of harmonic signals. It is shown that the graphical representation of the spectral characteristics of the signals in the polar coordinates system in comparison with a rectangular, more clearly and better reflect the physical meaning. The spectrum of periodic signals on the entire interval of observation can be easily displayed in a confined space without performing scaling. It is proposed to calculate the spectral pattern signal not only the basis of Fourier, but other number-theoretic bases such as Christenson and Rademacher that for certain classes of signals provide better convergence.

**Ключові слова:** спектральний аналіз сигналів, базис Радемахера, базис Крестенсона, полярна система координат, спектр сигналу.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Сучасний розвиток цифрової та мікропроцесорної техніки привів до її широкого використання практично в усіх сферах людської діяльності: в промисловості, в космічній галузі, в військовій сфері, транспорті, авіації, охоронних системах, побутових пристроях та ін. У будь-якій радіотехнічній або

електронній системі доводиться мати справу з сигналами, які служать для передачі інформації між окремими пристроями системи, які є інформаційними носіями. У цих же системах завжди присутні сигнали-завади, які спотворюють передану інформацію. Це можуть бути сигнали інших систем, що накладаються на інформаційні сигнали, або сигнали шуму, зумовлені фізичними процесами в елементах самої системи чи зовнішнього середовища.

При розробці, налагодженні і тестуванні радіотехнічних та цифрових систем необхідно аналізувати процес проходження сигналів через цей пристрій за допомогою моделей сигналів і пристроїв, що описуються деякими математичними функціями або комп'ютерного моделювання.

Одним з найбільш ефективних та широко розповсюджених методів дослідження сигналів є спектральний аналіз.

Головним принципом спектрального аналізу сигналів, що проводяться в багатьох літературних джерелах [1—4] є знаходження спектрів на підставі таблиці відомих пар перетворень Фур'є без прямого інтегрування тимчасових або частотних функцій сигналу. При цьому основна увага приділяється широкому використанню теорем про властивості перетворень Фур'є, таких як лінійність, добуток, згортка, дуальність частоти і часу і т. д.

У сучасній теорії сигналів широко використовуються  $\delta$ -функції, що відносяться до класу узагальнених функцій. Використання цих функцій при моделюванні часових і частотних характеристик сигналів дозволяє застосовувати інтеграл Фур'є до сигналів з нескінченною енергією, у тому числі і до періодичних сигналів. Це робить перетворення Фур'є універсальним інструментом аналізу практично будь-яких видів сигналів, що використовуються в радіотехнічних системах. Застосування  $\delta$ -функцій для моделювання зсуву сигналів за часом, а спектрів — за частотою, спрощує процес знаходження характеристик сигналів і робить його більш наочним.

Сучасна електронна та радіоапаратура побудована на цифрових елементах і практично витіснила всі аналогові схеми. В зв'язку з цим спектральний аналіз також в основному здійснюється на базі дискретного перетворення Фур'є та швидкого перетворення Фур'є.

Проте існують інші методи побудови і представлення результатів спектрального аналізу, які необхідно розвивати сьогодні. В ряді випадків, спектральний аналіз та представлення його результатів в полярній системі координат є більш ефективним. Багато типових сигналів в полярній системі координат (ПСК) аналітично представляються набагато простіше, ніж в прямокутних координатах, відповідно всі розрахунки значно спрощуються. Так само, графічне представлення в полярній системі координат спектру сигналів є в багатьох випадках більш інформативним і наочним.

### АКТУАЛЬНІСТЬ

Спектральний аналіз залишається на сьогодні одним із потужних методів дослідження та вимірювання характеристик сигналів, оскільки їх представлення в частотній формі є більш інформативним в порівнянні з їх часовими характеристиками. Представлення сигналу в частотній області як суми ортогональних базових складових з різними частотами, амплітудами і початковими фазами, необхідне також при вирішенні задач електромагнітної сумісності, тобто забезпечення роботи багатьох радіоелектронних засобів в обмеженому діапазоні частот.

Використання перетворювачів неелектричних величин в електричні дозволяє розповсюдити радіотехнічний спектральний аналіз на області механіки, акустики, медицини і інші сфери.

В зв'язку з цим, актуальною є задача розробки методів спектрального аналізу в різних ортогональних базисах та представлення різних систем координат, наприклад в полярному просторі.

Здійснення спектрального аналізу в інших ортогональних базисах: Крестенсона, Хаара, Крейга в певних випадках дає кращу збіжність ніж у традиційному базисі гармонійних функцій косинуса і синуса Фур'є.

Крім того представлення результатів спектрального аналізу в ряді випадків є більш наочним в полярній системі координат ніж в традиційній прямокутній системі.

### 1. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТИПОВИХ СИГНАЛІВ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

На основі проведених досліджень та поданих в першому розділі математичних інтерпретацій спектрального аналізу розглянемо типові сигнали, що зустрічаються на практиці, та представимо їх в полярній системі координат (ПСК). Аналітичне представлення типових сигналів та побудова графіків цих сигналів дозволить глибше зрозуміти аналітичне та графічне представлення спектральних характеристик сигналів [5—8].

Розглянемо сталі сигнали, які в прямокутному просторі можна представити на графіку прямими лініями, паралельними осі абсцис:  $X_1 = 5$  і  $X_2 = 10$  (рис. 1). Фізично такі сигнали можуть відображати постійний струм. За виразами (2.1) в полярній системі координат ці сигнали будуть задаватися виразами відповідно  $\rho_1 = 5$  і  $\rho_2 = 10$ .

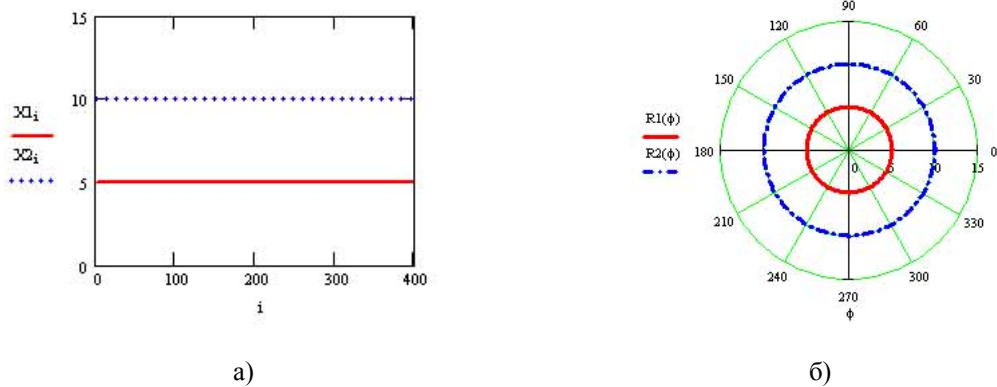


Рис. 1. Графіки сигналів  $X_1 = 5$  і  $X_2 = 10$

а) — в прямокутній системі координат; б) — в полярній системі координат

Результат графічного представлення очевидний. Як і слід було очікувати сигнали на графіках в полярних координатах представляються колами відповідних радіусів рівних амплітуді сигналів.

Особливе місце в радіо-електронних схемах займають періодичні процеси. Як відомо, періодичні функції в полярній системі координат відображаються замкнутими кривими, що повторюються при проходженні кожного періоду. Наприклад, функція  $\sin$ , яка часто використовується при опису електричних процесів, цифровій обробці сигналів та в багатьох інших випадках. Так траєкторія синусоїдального струму, тобто звичайного змінного струму  $i(t) = I_m \sin \omega t$  (рис. 2), в полярних координатах представляється у вигляді кола з діаметром рівним амплітуді струму  $I_m$  з центром в точці з полярними координатами  $\left(\frac{I_m}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\rho = i(\phi)$ ,  $\phi = \omega t$ .

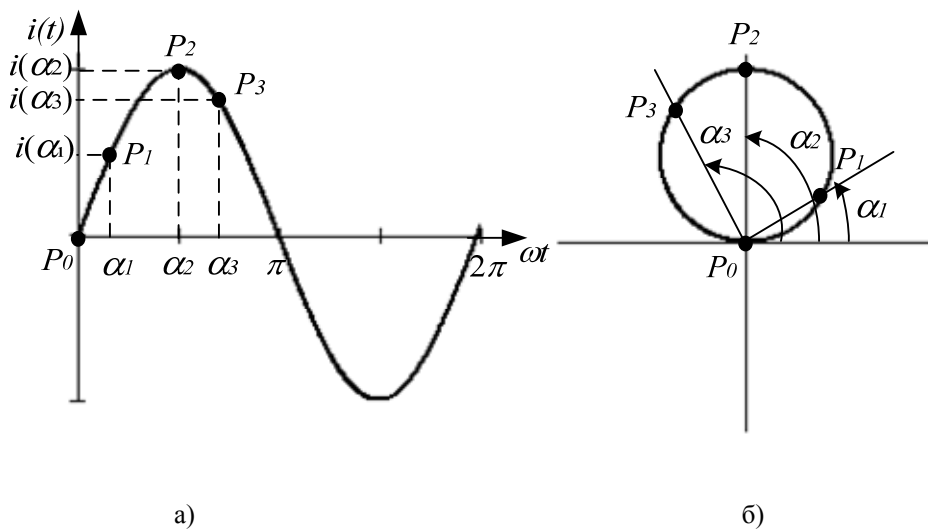


Рис. 2. Представлення змінного струму:

а) — в прямокутних; б) — полярних координатах

При наявності в струму початкової фази  $\phi_0 > 0$  в полярних координатах він буде відображений у вигляді кола з тим же радіусом, що й при нульовій фазі тільки з центром кола зміщеним в точку з полярними координатами  $\left(\frac{I_m}{2}, \frac{\pi}{2} - \phi_0\right)$ .

Тригонометричні функції  $\sin$  і  $\cos$ , як вже зазначалося, широко використовується не тільки в радіоелектроніці, електроенергетиці, а й інших сферах. Розглянемо більш детально графічне представлення синусоїдально-косинусоїдальних (гармонійних) сигналів  $x(t) = \sin t$  і  $y(t) = \cos t$  в полярних координатах для глибшого розуміння їх спектральних характеристик в ПСК (рис. 3).

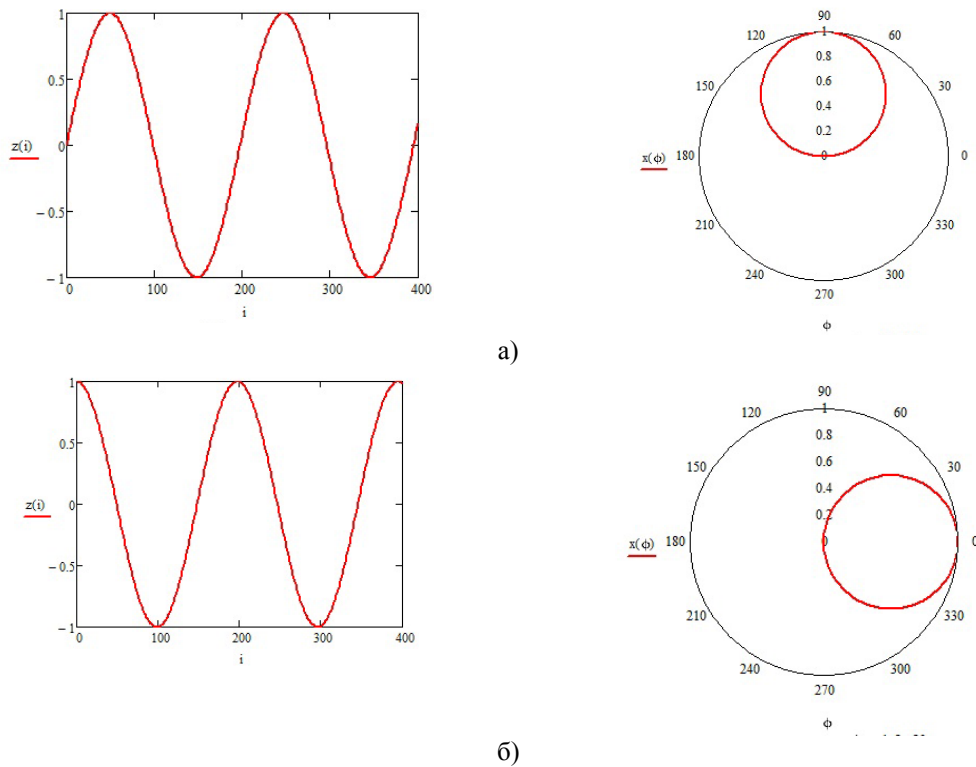


Рис. 3. Представлення функцій в прямокутній і полярній системі координат:  
а) —  $x(t) = \sin t$ ; б) —  $y(t) = \cos t$  в

Як видно з рис. 3 такі сигнали в ПСК графічно представляються двома колами:  $x(t) = \sin t$  орієнтованим по осі ординат  $y(t) = \cos t$  — орієнтованим по осі абсцис

Полярна система координат також зручна і при аналізі електричних кіл з постійним струмом. Очевидно, що графік ідеального постійного струму  $i(t)$  в будь-який момент часу  $t$ , в полярних координатах при будь-якому значенні  $\varphi$  буде мати вигляд кола радіусом  $I_0$  з центром у точці початку координат, тобто точці з полярними координатами  $(0, 0)$ . Неідеальний постійний струм (рис. 4, а) в полярних координатах утворює фігуру представлену на рис. 4, б., яка дещо відрізняється від кола.

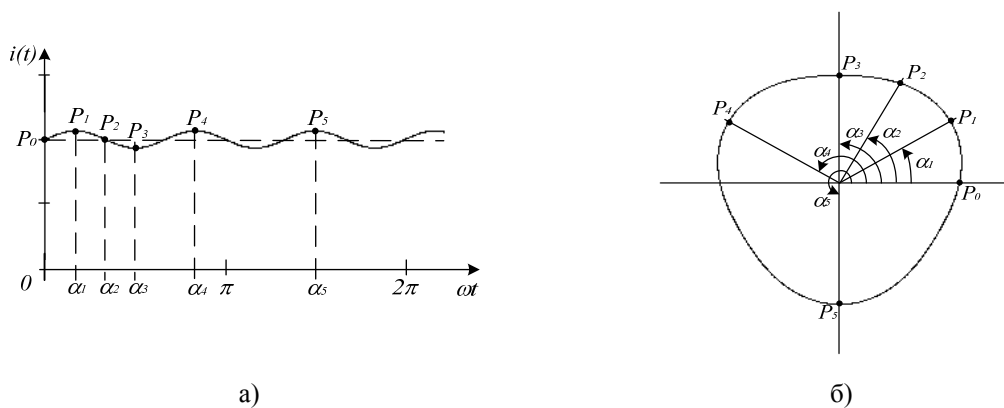


Рис. 4. Графіки неідеального постійного струму:  
а) — в прямокутній системі координат; б) — полярній системі координат

Таким чином, використання полярної системи координат для візуалізації траєкторій усталених процесів, дозволяє, по-перше, використовувати властивість періодичності останніх, повністю відображати їх на обмеженому просторі (кресленні чи екрані) необмежено довго в часі, а по-друге,

співставляти ці процеси з геометричними фігурами, і як наслідок оперувати з ними за допомогою багатого математичного апарату для їх дослідження, в тому числі і спектрального аналізу. Особливо важливою є та обставина, що найбільш значимі для електротехнічної практики процеси синусоїдального струму в полярних координатах зображаються у вигляді надзвичайно простої і наглядної фігури – кола.

Для дослідження зміни графічного представлення при зміні амплітуди гармонійного сигналу побудуємо графіки двох синусоїд різної амплітуди, які задаються виразами:  $X1(t) = 5\sin(\omega t)$  і  $X2(t) = 10\sin(\omega t)$  в прямокутних і полярних координатах (рис. 5).

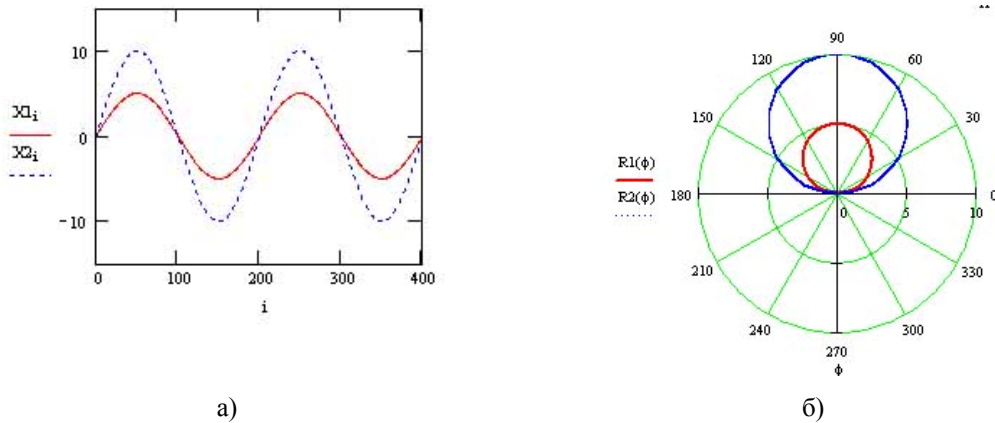


Рис. 5. Графіки функцій синусоїд  $X1(t) = 5\sin(\omega t)$  і  $X2(t) = 10\sin(\omega t)$   
а) — в прямокутних координатах; б) — в полярних координатах

На основі графіків можна зробити висновок, що зміна амплітуда впливає на зміну радіуса кіл в ПСК, проте орієнтація в просторі залишається не змінною.

Для дослідження зміни графіків гармонійних сигналів при зміні частоти побудуємо графіки функцій  $X1(t) = 4 \cdot \sin(t)$  та  $X2(t) = 5 \cdot \sin(3t)$  (рис. 6).

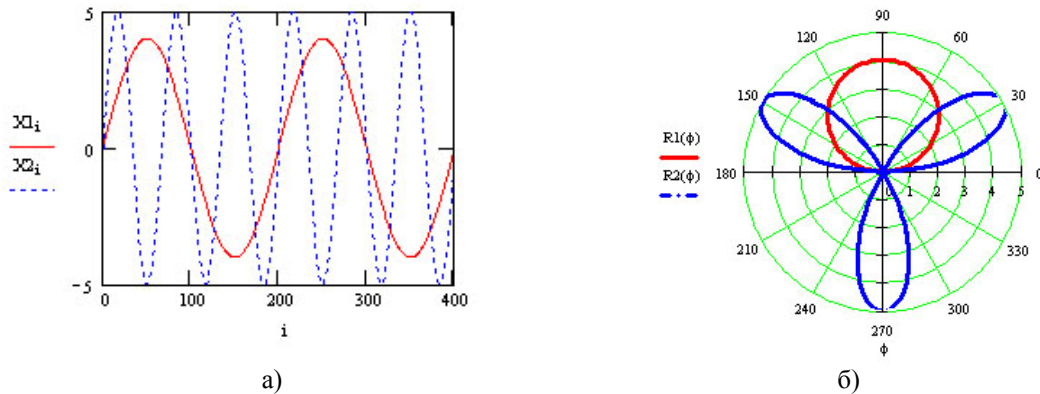


Рис. 6. Графіки функцій  $X1(t) = 4 \cdot \sin(t)$  і  $X2(t) = 5 \cdot \sin(3t)$   
а) — в прямокутній системі координат; б) — в полярній системі координат

З рис. 6 видно, що зміна частоти гармонійного сигналу приводить до відповідного збільшення кількості пелюсток. При збільшенні частоти  $\omega = 3$  на графіку функції  $X2(t) = 5 \cdot \sin(3t)$  в ПСК отримаємо три пелюстки. При збільшенні частоти, наприклад,  $\omega = 5$  отримаємо на графіку п'ять пелюсток і т. д.

Якщо гармонійний сигнал складається з суми декількох синусоїдальних чи косинусоїдальних сигналів, то його графічне представлення буде вже дещо складнішим. На рис. 7а зображено часову залежність струму, який містить основну і третю гармоніку та описується рівнянням:

$$i(\omega t) = 10\sin \omega t + \frac{10}{3}\sin 3\omega t$$

В полярних координатах траєкторія цього струму буде мати вигляд показаний на рис. 7б.

На базі гармонійних сигналів описується широке коло різноманітних процесів. В цьому аспекті не можна не згадати цифрову обробку сигналів, в якій одну з ключових ролей відіграє спектральний аналіз в базисі Фур'є, в якому будь-який сигнал розкладається по базисним синусоїдальним і косинусоїдальним складовим різної частоти — гармонікам.

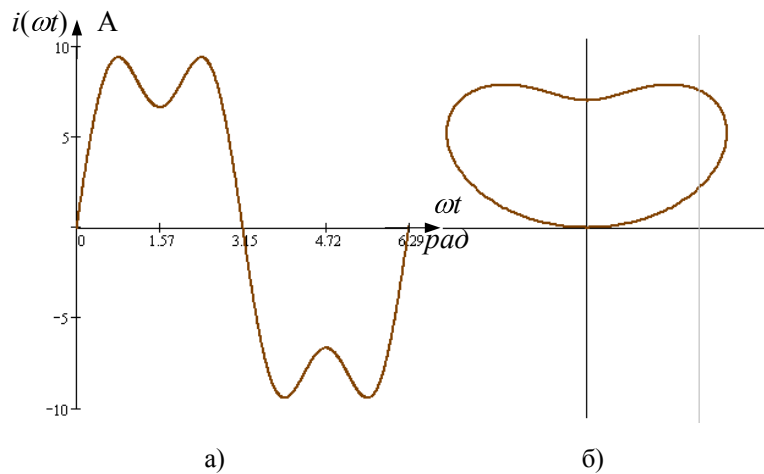


Рис. 7. Графіки струму  $i(\omega t) = 10 \sin \omega t + \frac{10}{3} \sin 3 \omega t$

а) — в прямокутних координатах; б) — в полярних координатах

На практиці існує багато видів сигналів, які також можна ефективно зображати в полярній системі координат, що будуть мати цікаві графічні представлення в цьому просторі. Як видно з рис. 3—5, графічне і аналітичне представлення гармонійних сигналів в полярній системі координат має наглядне зображення, описується досить простим аналітичними виразами, а отже може ефективно використовуватись при спектральному аналізі сигналів.

Як відомо, спектральний аналіз в базисі Фур'є по-суті є кореляційною функцією, при якому досліджуваний сигнал корелюють з синусоїдами і косинусоїдами різної частоти і тим самим визначають енергетичний спектр сигналу, тобто долю енергії, яку складає в сигналі відповідна гармоніка.

## 2. СПЕКТРАЛЬНІ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ В БАЗИСАХ ФУР'Є, РАДЕМАХЕРА ТА КРЕСТЕНСОНА

Поряд з часовими статистичними характеристиками, важливе місце в інформаційному аналізі стохастичних сигналів займають спектральні характеристики. Спектральний аналіз базувався, як правило на прямому та зворотному перетворенні Фур'є. Проте в математиці відомо багато інших систем ортогональних функцій або, як їх називають в інформаційно-вимірювальній техніці, системи стандартних сигналів: Чебешева, Лежандра, Бесселя, поліноми Лагера і ін. Але при практичній реалізації виникає потреба простоти формування стандартних сигналів.

З розвитком цифрової обчислювальної техніки та апарату дискретної математики все частіше використовуються системи прямокутних ортогональних функцій Уолша, Хаара, Віленкіна-Крестенсона. Як відмічається в [9—11] спектральна обробка в базисах Уолша, Хаара, Хаара- та Уолшеподібних функцій найбільше задовольняють сучасну елементну базу, а також тенденції її розвитку. При виборі базисних функцій в спектральній обробці сигналів, крім простоти формування стандартних сигналів, намагаються досягнути також мінімальної кількості гармонік, необхідної для апроксимації сигналу [12—14].

Дослідимо збіжність процесу апроксимації сигналу в трьох базисах стандартних сигналів: Фур'є, Радемахера (частковий випадок базису Уолша) і Крестенсона (рис. 8). Більшість технологічних об'єктів мають ергодичний характер зміни станів [9], для яких нормована автокореляційна функція  $\rho_{xx}(j)$  при великих зміщеннях  $j$  прямує до нуля або приймає випадкові значення, які згладжуються функцією експоненти (рис. 9).

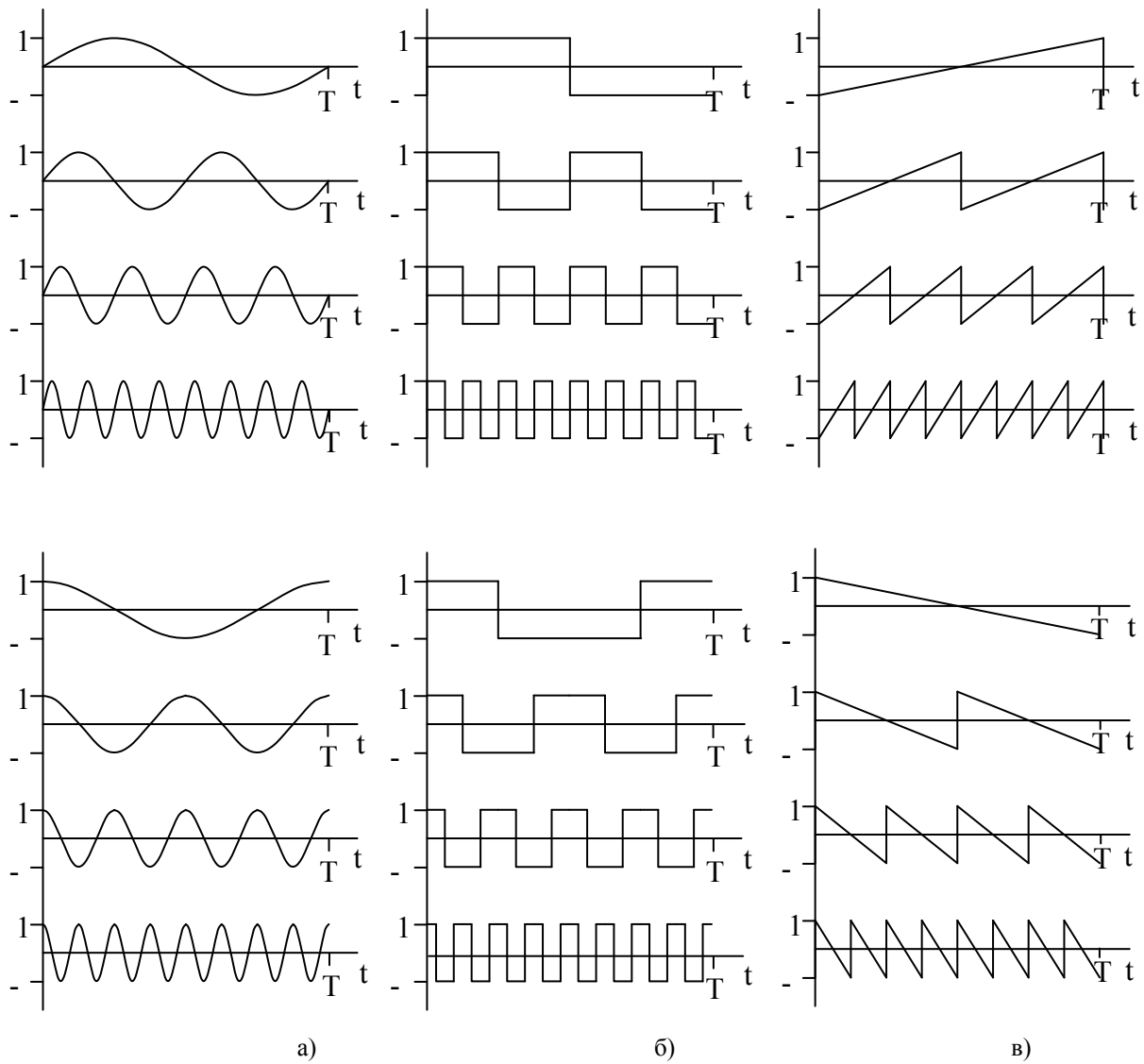


Рис. 8. Системи стандартних сигналів

а) — Фур'є; б) — Радемахера; в) — Крестенсона

Для спектрального аналізу стаціонарних випадкових процесів шукають енергетичний спектр, який визначається за теоремою Хінчіна-Вінера, яка для системи гармонічних функцій записується виразом:

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

або в дискретному просторі:

$$G_x(f) = \sum_{k=1}^n \rho_{xx}(k) \cdot e^{-j2\pi fk}, \quad (2)$$

де  $\rho_{xx}$  — нормована автокореляційна функція.

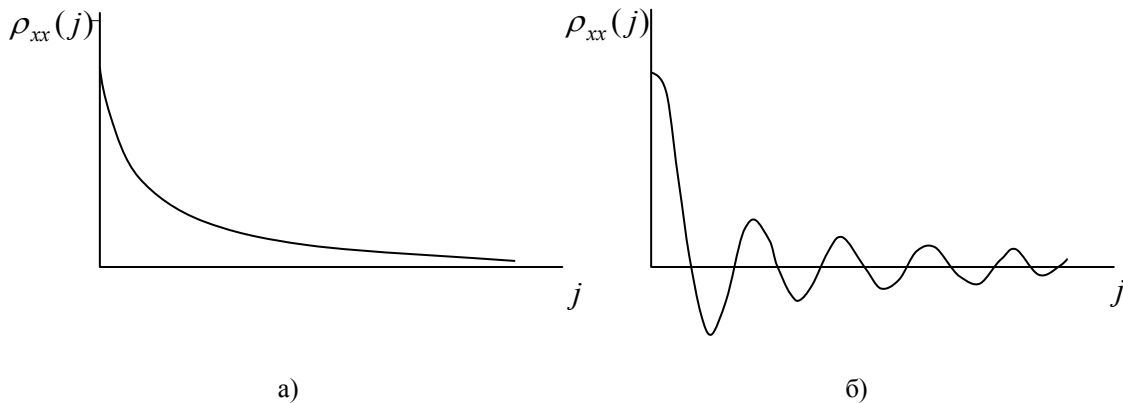


Рис. 9. Нормована автокореляційна функція ергодичного процесу:  
а) — без гармонічних складових; б) — з гармонічними складовими

Вираз (2) виражає взаємкореляцію між  $\rho_{xx}$  і гармонічними сигналами різної частоти. Тоді прокорелювавши  $\rho_{xx}$  з стандартними сигналами в базисі Радемахера визначимо спектр сигналу в цьому базисі:

$$G_x(f) = \sum_{k=1}^n \rho_{xx}(k) \cdot rad(i, \theta), \quad (3)$$

де  $rad(i, \theta) = sig[\sin(2^i \pi \theta)]$ , або  $rad(i, \theta) = (-1)^{ent(2^{i+1} \theta)}$ ,  $ent(x)$  — ціла частина від  $x$ ;  $\theta = t/T$  — аргумент, нормований до періоду сигналу  $T$ .

Аналогічно визначимо енергетичний спектр сигналу в базисі Крестенсона:

$$G_x(f) = \sum_{k=1}^n \rho_{xx}(k) \cdot cr(i, \theta), \quad (4)$$

де  $cr(i, \theta) = 1 - zal(2^{-i} \theta)$ , — залишок від  $x$ .

Для сигналів  $x(t)$  з широким спектром найкращу збіжність забезпечує розклад в базисі Крестенсона, оскільки, як показано на рис. 10 одна гармоніка базису Крестенсона включає практично всі кратні гармоніки базису Фур'є.

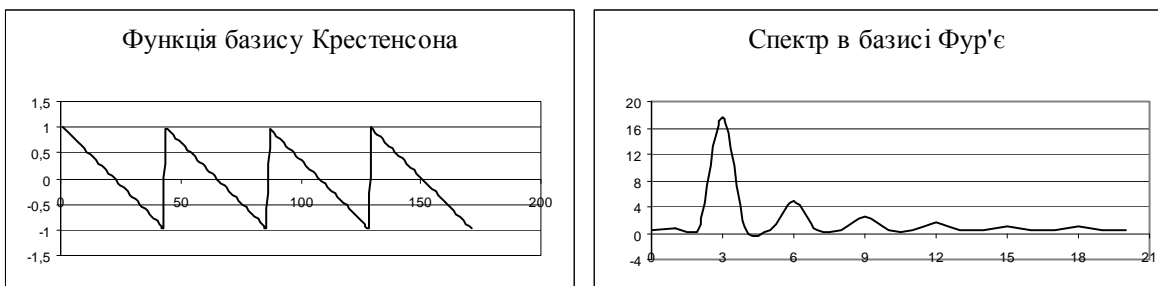


Рис. 10. Спектральний розклад базисної функції Крестенсона в базисі Фур'є

Недоліком цього базису є складність генерування апаратними засобами стандартних сигналів. Також слабо розвинутий математичний апарат та технічні засоби для аналізу сигналів в базисі Крестенсона. Проте дослідження різних базисів є перспективним напрямом для розвитку спектрального аналізу сигналів.



### 3. ОБЧИСЛЕННЯ СПЕКТРА ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛУ НА ОСНОВІ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЙОГО В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

В розділі 1 було приведено взаємозв'язок між спектром сигналу і взаємокореляційною функцією цього сигналу з базисними функціями Фур'є синусоїдами і косинусоїдами різної частоти. Фактично парні і непарні гармоніки спектру дискретного сигналу можна обчислити на базі взаємокореляційних функцій сигналу  $\{x(k)\}$  з відповідно косинусоїдами та синусоїдами різної частоти:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i \cdot \Delta t) \cdot \cos(k \cdot i \cdot \Delta t), \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i \cdot \Delta t) \cdot \sin(k \cdot i \cdot \Delta t), \quad (6)$$

де  $a_k$  — парні гармоніки спектру;  $b_k$  — непарні гармоніки спектру;  $N$  — кількість дискретних відліків сигналу (довжина вибірки);  $x_i$  — значення дискретних відліків сигналу;  $k$  — номер гармоніки;  $\Delta t$  — крок дискретизації.

При обчисленні спектру за наведеними вище формулами, кількість гармонік  $k$  може бути обмежена довільним числом, виходячи з міркувань спектрального складу самого сигналу та необхідною точністю визначення спектру сигналу.

Як відомо, гармонійні функції,  $\cos$  і  $\sin$  мають просте аналітичне представлення і емпірично зрозуміле наочне відображення на графіках, при представленні їх в полярній системі координат, оскільки при періодичності рівній  $2\pi$ , представляються у вигляді кола.

Таким чином, при переході до полярної системи координат необхідно часові координати  $t$  перевести до розмірності кута  $\phi$ , що по суті відповідає круговій частоті, а амплітуду  $I_m$  до радіус-вектора  $\rho$ . Тоді вирази (7) і (8) для полярної системи координат будуть мати вигляд:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i \cdot \Delta \phi) \cdot \cos(k \cdot i \cdot \Delta \phi), \quad (7)$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i \cdot \Delta \phi) \cdot \sin(k \cdot i \cdot \Delta \phi), \quad (8)$$

де  $\Delta \phi = \frac{2\pi N}{\Delta t}$  — дискретизація відліків кута повороту в полярній системі координат, що відповідає дискретизації по часу  $\Delta t$  в прямокутній системі координат;  $k = 1, 2, \dots, n$  — номер гармонік.

На основі виразів (7) і (8) обчислимо та представимо в ПСК спектри найпростіших сигналів (рис. 11):

$$x(t) = \cos(t), \quad (9)$$

$$y(t) = \sin(t). \quad (10)$$

Спочатку представимо їх в дискретній формі з кроком дискретизації  $\Delta t$ :

$$z(i) = \cos(i \cdot \Delta t), \quad (11)$$

$$z(i) = \sin(i \cdot \Delta t), \quad (12)$$

де  $i = 0, 1, \dots, N$  — номери дискретних відліків.

При переході в ПСК отримаємо наступні вирази:

$$ec(i) = \cos(i \cdot \Delta \phi) \quad (13)$$

$$es(i) = \sin(i \cdot \Delta \phi) \quad (14)$$

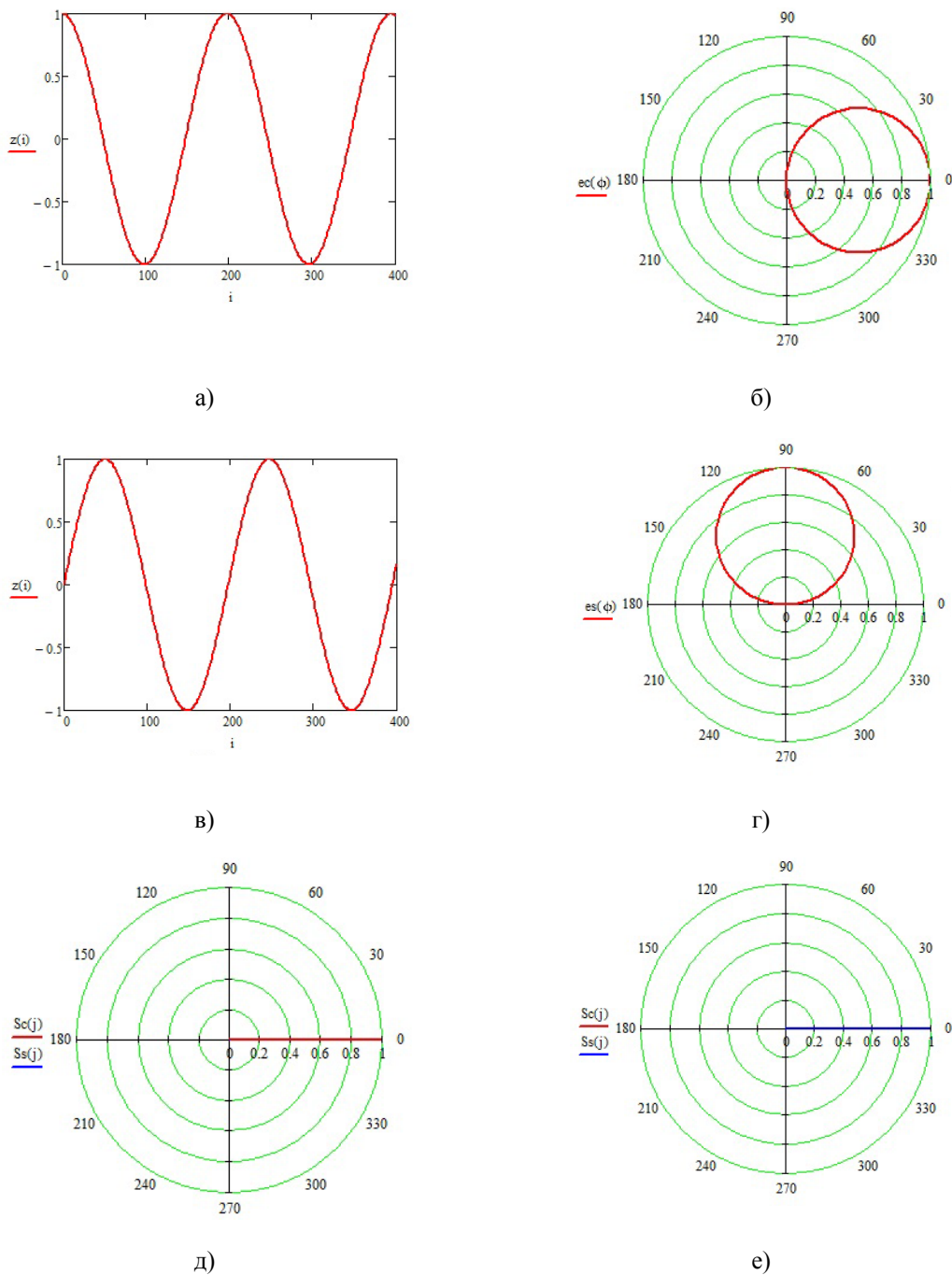


Рис. 11. Графіки функцій: а) —  $z(i) = \cos(i \cdot \Delta t)$  в прямокутній системі координат; б) — в полярній системі координат; в) —  $z(i) = \sin(i \cdot \Delta t)$  в прямокутній системі координат; г) — в полярній системі координат; д) — спектральні характеристики  $ec(i) = \cos(i \cdot \Delta \phi)$ ; е) —  $es(i) = \sin(i \cdot \Delta \phi)$

При обчисленні спектральних характеристик сигналів представлених на рис. 11, д) і е) використовувались вирази знаходження спектрів на базі кореляційних функцій з базисними сигналами косинуса і синуса різних частот:

$$Sc(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ec(j \cdot k \cdot \Delta \phi) \cdot r(k \cdot \Delta \phi), \quad (15)$$

$$Ss(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} es(j \cdot k \cdot \Delta\phi) \cdot r(k \cdot \Delta\phi), \quad (16)$$

де  $r(k \cdot \Delta\phi)$  — досліджувана дискретна функція представлена в полярних координатах.

У представленому на рис. 11 випадку  $r(k \cdot \Delta\phi) = \cos(k \cdot \Delta\phi)$  і  $r(k \cdot \Delta\phi) = \sin(k \cdot \Delta\phi)$ .

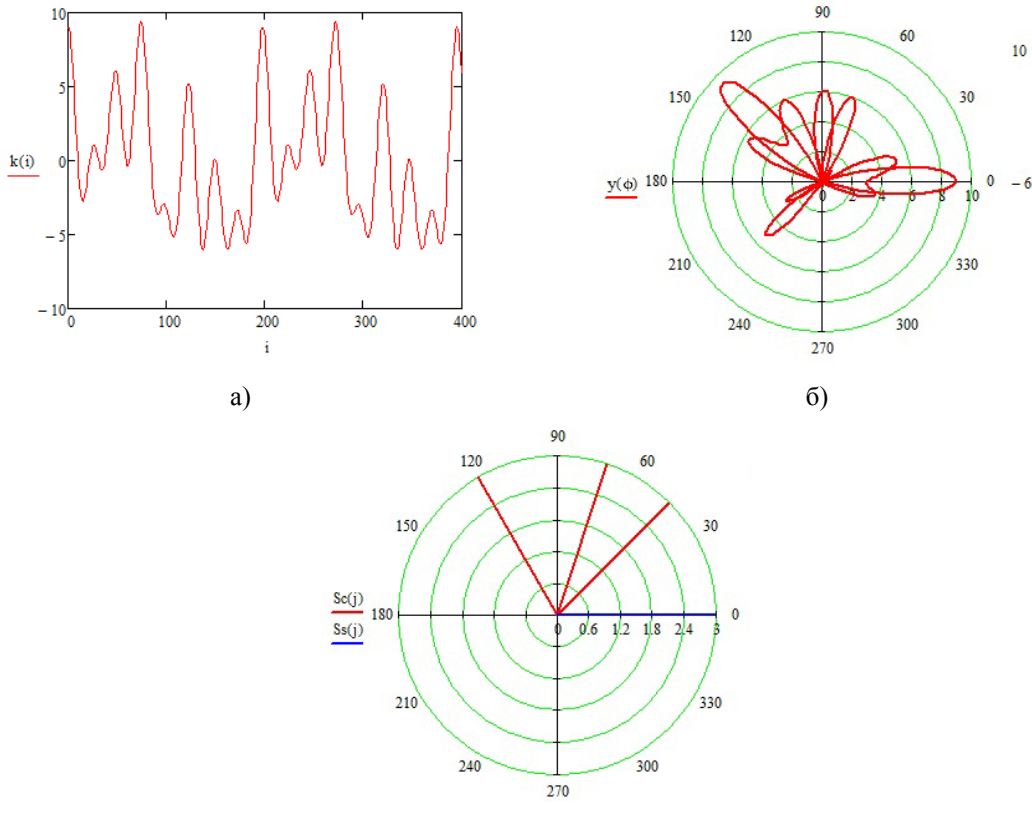
Як і слід було очікувати, для косинусної функції в спектральній характеристиці отримано першу парну гармоніку (рис. 11д), а для синусної функції — першу непарну гармоніку (рис. 11е). При цьому всі непарні гармоніки для косинусної функції відсутні а для синусної функції відсутні всі парні гармоніки, що повністю узгоджується з дійсністю.

Обчислимо спектральні характеристики для більш складної функції, яка в прямокутних і полярних координатах відповідно описуються формулами (3.18) і (3.19):

$$k(i \cdot \Delta t) = 3 \cos(3 \cdot i \cdot \Delta t) + 3 \cos(5 \cdot i \cdot \Delta t) + 3 \cos(8 \cdot i \cdot \Delta t) + 3 \sin(i \cdot \Delta t), \quad (17)$$

$$y(i \cdot \Delta \varphi) = 3 \cos(3 \cdot i \cdot \Delta \varphi) + 3 \cos(5 \cdot i \cdot \Delta \varphi) + 3 \cos(8 \cdot i \cdot \Delta \varphi) + 3 \sin(i \cdot \Delta \varphi). \quad (18)$$

Якщо в формули обчислення спектральних характеристик (коефіцієнтів парних і непарних гармонік) (15) і (16) підставити вираз функції (18), отримаємо спектральну характеристику представлену на рис. 12.



в)

Рис. 12. Графік сигналу (17) і (18) відповідно:

а) — в прямокутних і б) — полярних координатах та в) — спектральна характеристика в ПСК

З рис. 12, в добре видно, що спектральна характеристика включає три парні гармоніки (радіус-вектора червоного кольору) та одну непарну гармоніку (синього кольору). Оскільки амплітуда кожної складової спектра однакова і рівна трьом, то всі спектральні складові також однакової амплітуди рівні трьом. Направленість радіус векторів спектральних характеристик в просторі ПСК вказує якраз на частоту гармоніки, яка присутня в спектрі сигналу.

Розглянемо ще один сигнал з різною амплітудою складових (19) та побудуємо його спектральну характеристику в ПСК (рис. 13):

$$y(i \cdot \Delta\phi) = 2 \cos(3i\Delta\phi) + 4 \cos(5i\Delta\phi) + 3 \cos(12i\Delta\phi) + 5 \sin(7i\Delta\phi). \quad (19)$$

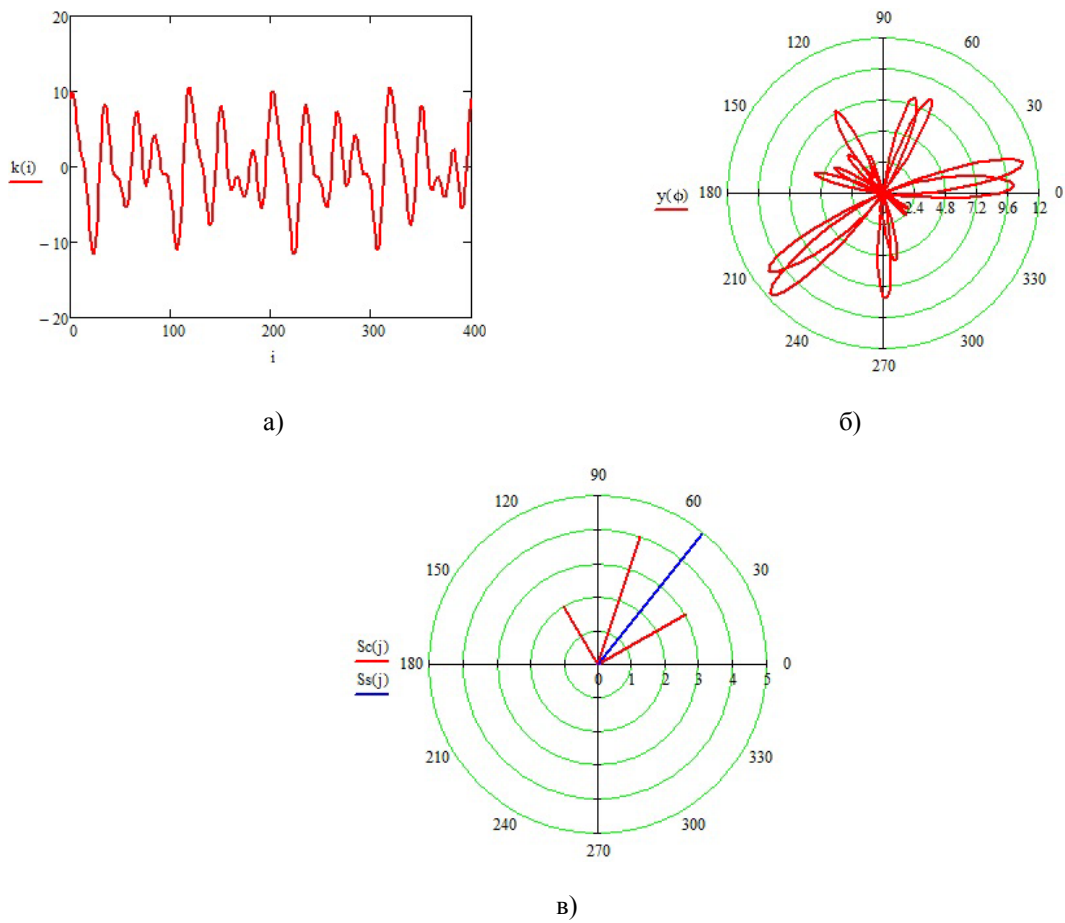
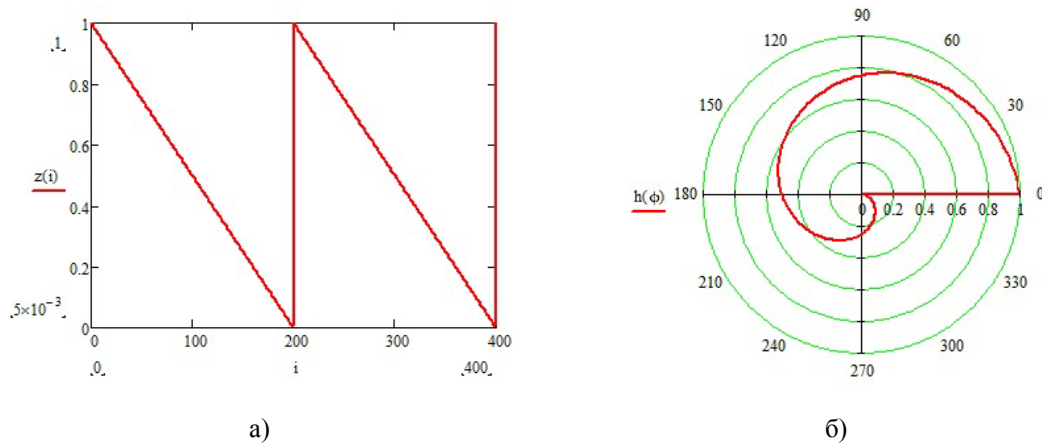


Рис. 13. Графіки сигналу заданого аналітично виразом (19)  
 а) — в прямокутній полярній системі координат, б) — в полярній системі координат,  
 в) — його спектральна характеристика в полярній системі координат

На завершення побудуємо спектральну характеристику пилоподібного сигналу, який описується виразами:

$$z(i) = 1 - \text{mod}\left(\frac{i \cdot \Delta t}{2\pi}\right); \quad (20)$$

$$z(i) = 1 - \text{mod}\left(\frac{i \cdot \Delta \phi}{2\pi}\right). \quad (21)$$



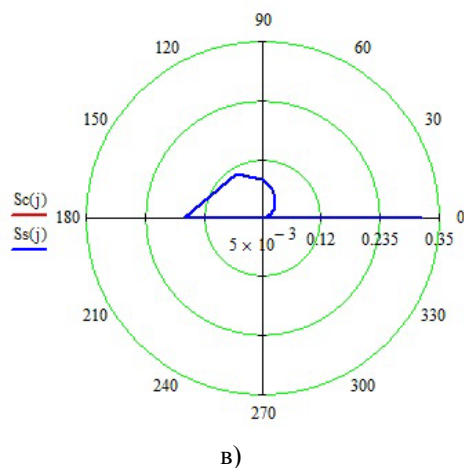


Рис. 14. Графіки сигналу заданого аналітично виразом (20):  
 а) — в прямокутній системі координат; б) — в полярній системі координат;  
 в) — його спектральна характеристика в ПСК

Як видно з графіку (рис. 14в) в спектрі сигналу присутні тільки непарні (синусні складові), що повністю узгоджується з результатами досліджень представленими на рис. 10.

Таким чином, побудова спектральних характеристик в ПСК дозволяє більш наочно відобразити спектральний склад сигналу, одразу показує частоту гармоніки та дозволяє відображати необмежену кількість гармонік в обмеженій області. Крім того, при дослідженні гармонійних сигналів спрощуються обчислення та відображення спектру завдяки простішому аналітичному представленні таких сигналів в ПСК.

## ВИСНОВКИ

Використання різних теоретико-числових базисів для спектрального аналізу відповідних класів сигналів забезпечує кращу збіжність, що приводить до зменшення обчислювальних ресурсів. Проте побудова спектральних моделей сигналів потребує подальшого дослідження в плані визначення критеріїв, за якими вибирати базис для їх аналізу.

Розрахунок та представлення спектрів сигналів в полярній системі координат також забезпечує спрощення обчислень за рахунок того, що гармонійні сигнали в полярній системі координат описуються простішими аналітичними виразами, більш адекватно і наочно відображають фізичний зміст спектру. Як було показано, спектр періодичних сигналів на усьому проміжку спостереження легко можна відобразити на обмеженому просторі без здійснення масштабування, при цьому зберігається можливість візуально оцінити його характер.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сиберт У. Цепи, сигналы, системы. в 2-х частях, часть 2 М. Мир 1988г. — 360 с.
2. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов, 2-е изд. — СПб. : Питер, 2006. — 751 с.
3. Бебих Н. В., Денисов А. И. Взаимная спектрально-корреляционная обработка сигналов в различных ортогональных базисах // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26, № 3. С. 54—60.
4. Харкевич, Александр Александрович. Спектры и анализ / А. А. Харкевич. — Изд. 5-е. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 236 с.
5. Основы радиолокации и телевидения. А. А.Немец, В. И.Федотов, Москва, Высшая школа, 1984 г. — 208 с.
6. Егерев В. К., Радунский Б. А., Тальский Д. А. Построение графиков функций. — М. : Высш. шк., 1997. — 132 с.
7. Шафрановский И. И. Симметрия в природе. — Ленинград : «Недра», 1985. — 184 с.
8. Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. Основные математические формулы. Справочник. — Под ред. Ю. С. Богданова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Мн. : Минск: Высшая школа, 1995. — 269 с.

9. Николайчук Я. М. Розробка теорії і комплексу технічних засобів формування, передачі і обробки цифрових повідомлень в низових обчислювальних мережах автоматизованих систем. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук — Івано-Франківськ, ІФІНГ, 1991. — 573 с.
10. Выхованец В. С. Обработка сигналов в дискретных базисах на основе обобщенных полиномиальных форм. // Доклады 2-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение». М., 1999. — Т. 2. — С. 372—377.
11. Дагман Э. Г., Кухарев Г. А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск, 1983. — 284 с.
12. Ракошиц В. С., Козлов В. П., Можяев И. А. Специализированные микропроцессоры, реализующие быстрые преобразования // Цифров. обраб. сигналов и её применение. М., 1981. — С. 38—56.
13. Чеголин П. М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. — М. : Энергия, 1969. — 384 с.
14. Гоулд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. — М. : Сов. адио, 1973. — 368 с.

## REFERENCES

1. W. Sibert Chains, signals system. in 2 parts, Part 2 1988 Mir. — 360.
2. Sergienko A.B. Digital Signal Processing: A Textbook for high schools, 2 nd ed. — SPB. Piter, 2006. — 751 p.
3. Bebih N.V., Denisov A.I. Mutual spectral-correlation processing of signals in different orthogonal bases // Math. universities. Ser. Radio electronics. 1983. T. 26, № 3. С. 54—60.
4. Kharkevich A. A. Spectra and analysis / A. A. Kharkevich. — Ed. 5th. — Moscow : Book house «LIBROKOM», 2009. — 236 p.
5. Basic radar and television. A. A. Nemets, V. I. Fedotov, Moscow, Higher School, 1984. — 208.
6. Egerev V. K. Radunsky B. A. Talskaya D. A. Plotting functions. — М. : Higher. wk., 1987. — 132 p.
7. Shafranovsky I. I. Symmetry in nature. — Leningrad: «Nedra», 1985. — 184 p.
8. Vodnev V. T., Naumovich A. F., Naumovich N. F. Basic mathematical formulas. Directory. — Ed. Y. S Bogdanov. — 2nd ed., Rev. and add. — Mn . Minsk : Higher school, 1995. — 269 p.
9. Nikolaichuk Y. M. Development theory and complex technical tools formation, transfer and processing of digital communications in computer networks grassroots automated systems. The thesis for the degree of Doctor of Science — Ivano-Frankivsk, IFINH, 1991. — 573 p.
10. Vykhovanets V. S. Signal processing in a discrete basis based on generalized polynomial form. // Reports of the 2nd International Conference «Digital Signal Processing and its Applications». М., 1999 — Т. 2. — pp 372—377.
11. Dagman E. G., Kuharev G. A. Fast discrete orthogonal transformation. Novosibirsk, 1983. — 284 p.
12. Rakoshits V. S., Kozlov V. P., Mozhaev I. A. Specialized microprocessors that implement rapid transformation // Digital. GRAIN. signals and its application. М., 1981. — P. 38—56.
13. Chegolin P. M. Automation of spectral and correlation analysis. — М. : Energia, 1969. — 384 p.
14. Gould B., Rader C. Digital signal processing. — М. : Sov. Adio, 1973. — 368 p.

Надійшла до редакції 23.06.2015 р.

**СЕГІН АНДРІЙ ІГОРОВИЧ** — к. т. н., доцент кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем Тернопільського національного економічного університету, м. Тернопіль, Україна.