

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

УДК 538.566

Д. Б. КУРИЛЯК, О. М. ШАРАБУРА

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,  
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна  
E-mail: shom@ipm.lviv.ua

## ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ЗБУДЖЕННЯ БІКОНУСА, СФОРМОВАНОГО ІЗ НАПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТА СКІНЧЕНОЇ ЗІ ЗРІЗАНОЮ ВЕРШИНОЮ КОНІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Отримано розв'язок осесиметричної задачі дифракції електромагнітної хвилі на ідеально провідній біконічній поверхні з краями. В якості джерела випромінювання використано круговий виток магнітного струму. Задача розв'язана методом власних функцій підобластей із застосуванням процедури аналітичної регуляризації. Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу отримані нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, які допускають редукцію за довільних значень параметрів задачі. Досліджено вплив довжини твірної конуса на формування діаграм спрямованості. В часткових випадках виконано порівняння з відомими результатами.

Ключові слова: дифракція на біконусі, ширококутові антени, метод розкладу за власними функціями, суматорні рівняння, аналітична регуляризація

### 1. Вступ

Біконічні структури з краями знаходять широке використання в антенній техніці завдяки їх широко-кутовим властивостям. Для теоретичного дослідження розсіювальних властивостей таких структур переважно використовують ідеально електропровідні моделі, а їх електродинамічний аналіз виконують методом розкладу полів за власними функціями підобластей. Беручи до уваги властивість ортогональності власних функцій та граничні умови, дифракційні задачі зводять до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів розкладу. Отримані у такий спосіб НСЛАР розв'язують наближено, обмежуючись скінченною кількістю мод. Такий підхід до аналізу біконічних розсіювачів базується на працях [1, 2] і широко використовувався як у ранніх публікаціях, огляд яких наведено в [3, 4], так і у сучасних, наприклад [5]. Основною його перевагою є те, що у розв'язанні дифракційних задач максимально повно враховується форма розсіювача. Проте такі розв'язки є формальними, оскільки, через сингулярність компонент поля на краях, не вдається обґрунтувати правила редукції НСЛАР.

© Д. Б. Куриляк, О. М. Шарабура, 2013

У даній статті для розв'язання цієї проблеми використано метод аналітичної регуляризації, який був запропонований раніше [6, 7] і дозволяє обґрунтувати правила редукції для довільних параметрів задачі.

### 2. Постановка задачі

Нехай у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$  задано біконус, сформований ідеально провідними конічними поверхнями – напівнескінченною та скінченною зі зрізаною вершиною:

$$Q = Q_1 \cup Q_2, \quad (1)$$

де

$$Q_1 : \{r \in (0, \infty), \theta = \gamma_1; \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

$$Q_2 : \{r \in (a_1, a_2), \theta = \gamma_2; \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

$\gamma_2 > \gamma_1$ ,  $\gamma_1 \neq \pi/2$  (див. рис. 1).

Нехай біконус  $Q$  збуджується витком магнітного струму, густину якого задано у вигляді

$$J(r, \theta) = I_\varphi^{(m)} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) / (r_0 \sin \theta_0). \quad (2)$$

Тут  $I_\varphi^{(m)}$  – магнітний струм,  $\delta(\dots)$  – дельта-функція Дірака,  $(r_0, \theta_0)$  – координати джерела,  $a_1 < r_0 < a_2$ .

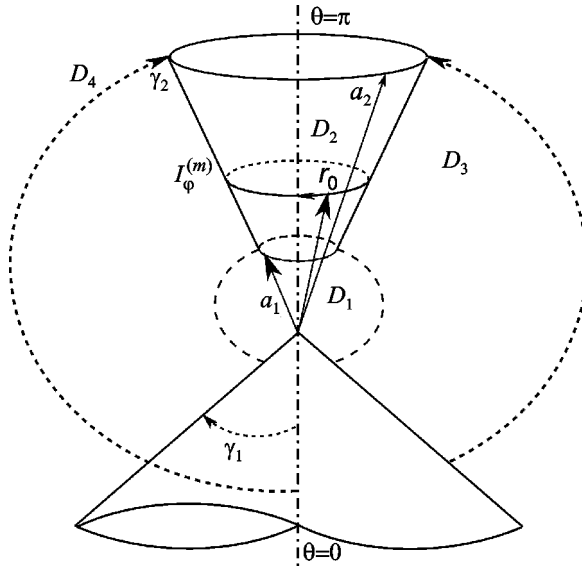


Рис. 1. Геометрична схема задачі

Залежність від часу задається множителем  $e^{-i\omega t}$ , який надалі опускаємо.

Осесиметричне електромагнітне поле, збуджуване джерелом (2), має відмінні від нуля компоненти  $E_r, E_\theta, H_\varphi$ , а його електричні складові виражаються через магнітну за допомогою співвідношень:

$$E_r = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta H_\varphi), \quad (3)$$

$$E_\theta = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi).$$

Тут  $\epsilon$  – діелектрична проникність середовища.

Враховуючи (3), задачу дифракції поля кільцевого струму (2) на біконусі (1) зводимо до розв'язку крайової задачі для рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial H_\varphi}{\partial\theta} \right) - \frac{H_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} + k^2 H_\varphi = 0$$

з граничною умовою

$$\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} [\sin\theta (H_\varphi + H_\varphi^i)]_{r,\theta \in Q} = 0,$$

умовою випромінювання на нескінченності у формі Сільвера–Мюллера

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r [\vec{i}_r \times \vec{H} + Z^{-1} \vec{E}] = 0$$

та умовою обмеженості енергії електромагнітного поля у будь якому скінченному об'ємі

$$\int_V (\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dv < \infty.$$

Тут  $H_\varphi(r, \theta)$  – невідома магнітна компонента дифрагованого поля;  $k$  – хвильове число,  $k = k' + ik'' = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $k', k'' > 0$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\mu$  – магнітна проникність середовища;  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$  – хвильовий опір середовища;  $H_\varphi^i(r, \theta)$  – магнітна компонента поля джерела (2) в нескінченній біконічній області.

### 3. Суматорні рівняння

Для розв'язання крайової задачі виділимо під-області, сформовані біконусом  $Q$ :

$$\begin{aligned} D_1 &: \{r \in [0, a_1], \theta \in (\gamma_1, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ D_2 &: \{r \in (a_1, a_2), \theta \in (\gamma_2, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ D_3 &: \{r \in (a_1, a_2), \theta \in (\gamma_1, \gamma_2); \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ D_4 &: \{r \in (a_2, \infty), \theta \in (\gamma_1, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

У кожній з областей (4) магнітну компоненту повного поля подамо рядами власних функцій у вигляді:

$$H_\varphi^i(\rho, \theta) = \begin{cases} \frac{i\omega\epsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(1;1)} \frac{\partial}{\partial\theta} P_{z_n-1/2}(-\cos\theta) \frac{I_{z_n}(\rho)}{I_{z_n}(\rho_1)}, \\ (r, \theta) \in D_1; \\ \frac{i\omega\epsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} P_{\mu_n-1/2}(-\cos\theta) \times \\ \times \left[ x_n^{(2;1)} \frac{K_{\mu_n}(\rho)}{K_{\mu_n}(\rho_1)} + x_n^{(2;2)} \frac{I_{\mu_n}(\rho)}{I_{\mu_n}(\rho_2)} \right], \\ (r, \theta) \in D_2; \\ H_\varphi^i(\rho, \theta) + \frac{i\omega\epsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\nu_n-1/2}(\cos\theta) \times \\ \times \left[ x_n^{(3;1)} \frac{K_{\nu_n}(\rho)}{K_{\nu_n}(\rho_1)} + x_n^{(3;2)} \frac{I_{\nu_n}(\rho)}{I_{\nu_n}(\rho_2)} \right], \\ (r, \theta) \in D_3; \\ \frac{i\omega\epsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(4;1)} \frac{\partial}{\partial\theta} P_{z_n-1/2}(-\cos\theta) \frac{K_{z_n}(\rho)}{K_{z_n}(\rho_2)}, \\ (r, \theta) \in D_4. \end{cases} \quad (5)$$

Тут  $x_n^{(1;1)}$ ,  $x_n^{(2;1)}$ ,  $x_n^{(2;2)}$ ,  $x_n^{(3;1)}$ ,  $x_n^{(3;2)}$ ,  $x_n^{(4;1)}$  – невідомі коефіцієнти розкладу;  $I_\nu(\rho)$ ,  $K_\nu(\rho)$  – відповідно модифікована функція Бесселя та функція Макдональда;  $\rho = sr$ ,  $\rho_1 = sa_1$ ,  $\rho_2 = sa_2$ ,  $s = -ik$ ;  $P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)$  – функція Лежандра, обмежена в кутовій області  $\gamma_1 \leq \theta \leq \pi$ ;

$$\Psi_{\nu_{n-1/2}}(\cos\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}, & n = 1, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}[R_{\nu_{n-1/2}}(\cos\theta)], & n > 1, \end{cases}$$

де

$$R_{\nu_{n-1/2}}(\cos\theta) = P_{\nu_{n-1/2}}(\cos\theta)P_{\nu_{n-1/2}}(-\cos\gamma_1) - P_{\nu_{n-1/2}}(-\cos\theta)P_{\nu_{n-1/2}}(\cos\gamma_1);$$

$\{z_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\nu_n\}_{n>1}^\infty$  ( $\nu_n \neq n+1/2$ ,  $\nu_1 = 1/2$ ) – зростаючі послідовності додатних коренів трансцендентних рівнянь:

$$\begin{aligned} P_{z_n-1/2}(-\cos\gamma_1) &= 0, \\ P_{\mu_n-1/2}(-\cos\gamma_2) &= 0, \\ R_{\nu_n-1/2}(\cos\gamma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Магнітну компоненту поля джерела  $H_\phi^i(\rho, \theta)$  подаємо у такий спосіб (див. додаток):

$$H_\phi^i(\rho, \theta) = \frac{i\omega\varepsilon}{\sqrt{\rho\rho_0}} \sum_{j=1}^\infty B_j \Psi_{\nu_j-1/2}(\cos\theta) \begin{cases} K_{\nu_j}(\rho)I_{\nu_j}(\rho_0), & r \geq r_0; \\ I_{\nu_j}(\rho)K_{\nu_j}(\rho_0), & r \leq r_0. \end{cases}$$

Тут  $(\rho, \theta) \in D_3$ ;  $\rho_0 = sr_0$ ;  $B_j = -\rho_0 b_j I_\phi^{(m)} \Psi_{\nu_j-1/2}(\cos\theta_0)$ ,

$$b_j = \begin{cases} \left[ \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right) \right]^{-1}, & j = 1; \\ \frac{1}{\sin\gamma_2} \frac{2\nu_j}{\nu_j^2 - 0.25} \times \left[ \frac{\partial}{\partial\nu} R(\nu, \cos\gamma_2) \frac{\partial}{\partial\gamma_2} R(\nu, \cos\gamma_2) \right]^{-1}, & j > 1. \end{cases}$$

Рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів розкладу в (5) отримуємо з умови спряження полів на поверхнях сферичних секторів  $\rho = \rho_{1(2)}$  і  $\gamma_1 \leq \theta \leq \pi$ , які записуємо у вигляді

$$H_\phi^{D_1(4)}(\rho_{1(2)}, \theta) \Big|_{\gamma_1 < \theta < \pi} = \begin{cases} H_\phi^{D_2}(\rho_{1(2)}, \theta) \Big|_{\gamma_2 < \theta < \pi}, \\ \left( H_\phi^{D_3}(\rho_{1(2)}, \theta) + H_\phi^i(\rho_{1(2)}, \theta) \right) \Big|_{\gamma_1 < \theta < \gamma_2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$E_\theta^{D_1(4)}(\rho_{1(2)}, \theta) \Big|_{\gamma_1 < \theta < \pi} = \begin{cases} E_\theta^{D_2}(\rho_{1(2)}, \theta) \Big|_{\gamma_2 < \theta < \pi}, \\ \left( E_\theta^{D_3}(\rho_{1(2)}, \theta) + E_\theta^i(\rho_{1(2)}, \theta) \right) \Big|_{\gamma_1 < \theta < \gamma_2}. \end{cases}$$

Тут  $H_\phi^{D_p}(\rho, \theta)$ ,  $E_\theta^{D_p}(\rho, \theta)$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) – компоненти повного поля в областях  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_4$  та дифрагovanого поля в області  $D_3$ .

Враховуючи подання магнітної компоненти поля (5), а також співвідношення (3), із умов (7) приходимо до чотирьох систем суматорних рівнянь. Дві з них, які отримуємо при спряженні полів на сферичному сегменті  $\rho = \rho_1$  і  $\gamma_1 < \theta \leq \pi$ , запишемо так

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^{(1;1)} P_{z_n-1/2}^1(-\cos\theta) \Big|_{\theta \in [\gamma_1, \pi]} = \begin{cases} \left[ \sum_{n=1}^\infty P_{\mu_n-1/2}^1(-\cos\theta) \left[ x_n^{(2;1)} + x_n^{(2;2)} \frac{I_{\mu_n}(\rho_1)}{I_{\mu_n}(\rho_2)} \right] \right] \Big|_{\theta \in (\gamma_2, \pi)}, \\ - \left[ \sum_{n=1}^\infty \Psi_{\nu_n-1/2}(\cos\theta) \left[ x_n^{(3;1)} + x_n^{(3;2)} \frac{I_{\nu_n}(\rho_1)}{I_{\nu_n}(\rho_2)} \right] + \sum_{n=1}^\infty B_n^{(1)} \Psi_{\nu_n-1/2}(\cos\theta) \right] \Big|_{\theta \in [\gamma_1, \gamma_2]}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^{(1;1)} P_{z_n-1/2}^1(-\cos\theta) \frac{I'_{z_n}(\rho_1)}{I_{z_n}(\rho_1)} \Big|_{\theta \in [\gamma_1, \pi]} = \begin{cases} \left[ \sum_{n=1}^\infty P_{\mu_n-1/2}^1(-\cos\theta) \times \left[ x_n^{(2;1)} \frac{K'_{\mu_n}(\rho_1)}{K_{\mu_n}(\rho_1)} + x_n^{(2;2)} \frac{I'_{\mu_n}(\rho_1)}{I_{\mu_n}(\rho_2)} \right] \right] \Big|_{\theta \in (\gamma_2, \pi)}, \\ - \left[ \sum_{n=1}^\infty \Psi_{\nu_n-1/2}(\cos\theta) \left[ x_n^{(3;1)} \frac{K'_{\nu_n}(\rho_1)}{K_{\nu_n}(\rho_1)} + x_n^{(3;2)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{I'_{\nu_n}(\rho_1)}{I_{\nu_n}(\rho_2)} \right] + \sum_{n=1}^\infty B_n^{(1)} \Psi_{\nu_n-1/2}(\cos\theta) \frac{I'_{\nu_n}(\rho_1)}{I_{\nu_n}(\rho_1)} \right] \Big|_{\theta \in [\gamma_1, \gamma_2]}, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$B_n^{(1)} = -\sqrt{\rho_0} b_n I_\Phi^{(m)} \Psi_{v_{n-1/2}}(\cos \theta_0) I_{v_n}(\rho_1) K_{v_n}(\rho_0).$$

Тут прийнято  $P_{v-1/2}^1(\pm \cos \theta) = \pm \partial / \partial \theta [P_{v-1/2}(\pm \cos \theta)]$ .

Для зведення суматорних рівнянь (8), (9) до НСЛАР використано формули перерозкладу функцій Лежандра з дробовими індексами [7]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_{z_n-1/2}(-\cos \theta) = q(z_n, \gamma_2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j(\gamma_1, \gamma_2)}{v_j^2 - z_n^2} \times \Psi_{v_j-1/2}(\cos \theta), \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_{z_n-1/2}(-\cos \theta) = q(z_n, \gamma_2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j \alpha^-(\mu_j, \gamma_2)}{\mu_j^2 - z_n^2} \times P_{\mu_j-1/2}^1(-\cos \theta). \quad (11)$$

Тут

$$q(z_n, \gamma_2) = (z_n^2 - 0.25) P_{z_n-1/2}(-\cos \gamma_2),$$

$$\alpha_j(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} -\left[ \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right) \right]^{-1}, & j=1, \\ -\frac{2v_j}{v_j^2 - 0.25} \left[ \frac{\partial}{\partial v} R_{v_j-1/2}(\cos \gamma_2) \right]^{-1}, & j>1, \end{cases}$$

$$\alpha^-(\mu_j, \gamma_2) = -2 \left[ (\mu_j^2 - 0.25) \frac{\partial}{\partial \mu} P_{\mu_j-1/2}(-\cos \gamma_2) \right]^{-1}.$$

Підставимо формули (10), (11) у ліві частини суматорних рівнянь (8), (9) і прирівняємо члени з однаковими функціями Лежандра. Виключаючи з отриманих співвідношень невідомі  $x_j^{(2;1)}$ ,  $x_j^{(2;2)}$ ,  $x_j^{(3;1)}$ ,  $x_j^{(3;2)}$ , отримуємо таку систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(z_n, \gamma_2)}{\mu_j^2 - z_n^2} \left[ x_n^{(1;1)} \frac{\rho_1 W[K_{\mu_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{K_{\mu_j}(\rho_1) I_{z_n}(\rho_1)} - \right. \\ & \left. - x_n^{(4;1)} \frac{\rho_2 W[K_{\mu_j} K_{z_n}]_{\rho_2}}{K_{\mu_j}(\rho_1) K_{z_n}(\rho_2)} \right] = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(z_n, \gamma_2)}{v_j^2 - z_n^2} \left[ x_n^{(1;1)} \frac{\rho_1 W[K_{v_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{I_{z_n}(\rho_1) K_{v_j}(\rho_1)} - \right. \\ & \left. - x_n^{(4;1)} \frac{\rho_2 W[K_{v_j} K_{z_n}]_{\rho_2}}{K_{z_n}(\rho_2) K_{v_j}(\rho_1)} \right] = -\frac{B_j^{(1)}}{\alpha_j(\gamma_1, \gamma_2) I_{v_j}(\rho_1) K_{v_j}(\rho_1)}, \end{aligned} \right.$$

де  $j = \overline{1, \infty}$ ;  $W[f_a, \Phi_\mu]_\rho = f_a(\rho) \Phi'_\mu(\rho) - f'_a(\rho) \Phi_\mu(\rho)$ .

Аналогічно отримуємо систему рівнянь із умови спряження полів на сферичному сегменті  $\rho = \rho_2$ ,  $\gamma_1 < \theta < \pi$ . Остаточні отримані НСЛАР запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{cases} A_{11} X + A_{12} Y = F_1, \\ A_{21} X + A_{22} Y = F_2. \end{cases} \quad (12)$$

Тут  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n = q(z_n, \gamma_2) x_n^{(1;1)}$ ;  $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $y_n = q(z_n, \gamma_2) x_n^{(4;1)}$ ;  $A_{pq} = \{a_{jn}^{(pq)}\}_{j,n=1}^{\infty}$ , де  $p, q = 1, 2$ , – нескінченні матриці з елементами

$$a_{jn}^{(11)} = \frac{\rho_1 W[K_{\xi_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{\Delta_{jn} K_{\xi_j}(\rho_1) I_{z_n}(\rho_1)},$$

$$a_{jn}^{(12)} = \frac{\rho_2 W[K_{z_n} K_{\xi_j}]_{\rho_2}}{\Delta_{jn} K_{z_n}(\rho_2) K_{\xi_j}(\rho_1)},$$

$$a_{jn}^{(21)} = \frac{\rho_1 W[I_{\xi_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{\Delta_{jn} I_{\xi_j}(\rho_2) I_{z_n}(\rho_1)},$$

$$a_{jn}^{(22)} = \frac{\rho_2 W[K_{z_n} I_{\xi_j}]_{\rho_2}}{\Delta_{jn} K_{z_n}(\rho_2) I_{\xi_j}(\rho_2)},$$

$$\Delta_{jn} = \xi_j^2 - z_n^2, \quad \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} : \{v_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{\infty} - \text{зростаюча послідовність}; F_1 = \{f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty} \text{ та } F_2 = \{f_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty} - \text{відомі вектори з елементами}$$

$$f_j^{(1)} = \begin{cases} -\frac{B_j^{(1)}}{\alpha_j(\gamma_1, \gamma_2) K_{\xi_j}(\rho_1) I_{\xi_j}(\rho_1)}, & \xi_j \in \{v_p\}; \\ 0, & \xi_j \notin \{v_p\}; \end{cases}$$

$$f_j^{(2)} = \begin{cases} \frac{B_j^{(2)}}{\alpha_j(\gamma_1, \gamma_2) I_{\xi_j}(\rho_2) K_{\xi_j}(\rho_2)}, & \xi_j \in \{v_p\}; \\ 0, & \xi_j \notin \{v_p\}; \end{cases}$$

де

$$B_n^{(2)} = -\sqrt{\rho_0} b_n I_\Phi^{(m)} \Psi_{v_{n-1/2}}(\cos \theta_0) I_{v_n}(\rho_0) K_{v_n}(\rho_2).$$

де

$$B_n^{(2)} = -\sqrt{\rho_0} b_n I_\Phi^{(m)} \Psi_{v_{n-1/2}}(\cos \theta_0) I_{v_n}(\rho_0) K_{v_n}(\rho_2).$$

#### 4. Аналітична регуляризація

Для елементів матричних операторів (13) справедливий асимптотичні співвідношення [7, 8]:

$$\begin{aligned}
 a_{jn}^{(11)} &= \frac{\rho_1 W[K_{\xi_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{\Delta_{jn} I_{z_n}(\rho_1) K_{\xi_j}(\rho_1)} \underset{j, n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\xi_j - z_n} + \\
 &+ O\left(\frac{1}{\xi_j z_n (\xi_j - z_n)}\right), \\
 a_{jn}^{(22)} &= \frac{\rho_2 W[K_{z_n} I_{\xi_j}]_{\rho_2}}{\Delta_{jn} I_{\xi_j}(\rho_2) K_{z_n}(\rho_2)} \underset{j, n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\xi_j - z_n} + \\
 &+ O\left(\frac{1}{\xi_j z_n (\xi_j - z_n)}\right), \\
 a_{jn}^{(12)}, a_{jn}^{(21)} &\underset{j, n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{(a_1/a_2)^{\xi_j}}{\xi_j + z_n}\right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Враховуючи вирази (14), виділимо в діагональних матрицях (12), (13) основні члени асимптотик і введемо до розгляду матричний оператор

$$A: \langle a_{jm} = (\xi_j - z_m)^{-1} \rangle_{j, m=1}^{\infty}.$$

Зауважимо, що асимптотики коренів рівнянь (6) для  $n \rightarrow \infty$  мають вигляд

$$\begin{aligned}
 z_n &= \frac{\pi}{\pi - \gamma_1} (n - 1/4) + O(1/n), \\
 v_n &= \frac{\pi n}{\gamma_2 - \gamma_1} + O(1/n), \\
 \mu_n &= \frac{\pi}{\pi - \gamma_2} (n - 1/4) + O(1/n).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Беручи до уваги той факт, що основні члени асимптотик (15) лінійно залежать від індексів, сформуємо обернений оператор за правилом [7]:

$$A^{-1}: \left\langle \tau_{nj} = \left\{ [M_-(\xi_j)]^{-1} \right\}' [M_-(z_n)]' (z_n - \xi_j) \right\}_{n, j=1}^{\infty} \tag{16}$$

Тут

$$\left\{ [M_-(\xi_j)]^{-1} \right\}' = \frac{\partial}{\partial v} [M_-(\xi_j)]^{-1},$$

$$M'_-(z_n) = \frac{\partial}{\partial v} [M_-(z_n)],$$

де  $M_-(v)$  – відома функція, що має прості полюси і нулі відповідно у точках  $\xi_j$  і  $z_n$  ( $j, n = 1, 2, 3, \dots$ ), яку запишемо у вигляді

$$M_-(v) = 2A(\gamma_1, \gamma_2) e^{v\chi} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - v/z_k) e^{-v(\pi - \gamma_1)/(k\pi)} \times$$

$$\times \left[ (1 - 2v) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - v/v_k) e^{-v(\gamma_2 - \gamma_1)/(k\pi)} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k=1}^{\infty} (1 - v/\mu_k) e^{-v(\pi - \gamma_2)/(k\pi)} \right]^{-1},$$

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = i \left\{ P_{-1/2}(-\cos \gamma_1) [P_{-1/2}(-\cos \gamma_2) \times \right.$$

$$\times [P_{-1/2}(\cos \gamma_2) P_{-1/2}(-\cos \gamma_1) -$$

$$\left. - P_{-1/2}(-\cos \gamma_2) P_{-1/2}(\cos \gamma_1) \right]^{-1} \Big\}^{-1/2},$$

$$\chi =$$

$$= \frac{\pi - \gamma_2}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma_2}{\pi} - \frac{\pi - \gamma_1}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma_1}{\pi} + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\pi} \ln \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\pi}.$$

Пара матричних операторів  $A, A^{-1}$  задовольняє співвідношенню

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I,$$

де  $I$  – одиничний оператор.

Для матричних елементів оберненого оператора (16) справедлива асимптотична оцінка

$$\tau_{nj} \underset{j, n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{\xi_j^{-1/2} z_n^{1/2}}{z_n - \xi_j}\right).$$

Оператори  $A, A^{-1}$  використаємо для регуляризації НСЛАР (12), представивши її у вигляді

$$\begin{cases} X - A^{-1}(A - A_{11})X + A^{-1}A_{12}Y = A^{-1}F_1, \\ Y - A^{-1}(A - A_{22})Y + A^{-1}A_{21}X = A^{-1}F_2. \end{cases} \tag{17}$$

Єдиний розв'язок НСЛАР (17) існує у просторі послідовностей

$$b(\sigma): \left\{ \|X\| = \sup_n |x_n|, \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| n^\sigma = 0, 0 \leq \sigma < 1/2 \right\}$$

і може бути отриманий методом редукції для довільних параметрів задачі, за виключенням дискретних значень параметрів задачі, для яких визначник НСЛАР (17) перетворюється в нуль.

## 5. Аналіз числових результатів

Систему рівнянь (17) використано для дослідження діаграм спрямованості біконічного розсіювача  $Q$ , які розраховувалися за формулою

$$D(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} |rH_{\varphi} e^{-ikr}|.$$

Розглянемо особливості формування полів, дифрагованих на біконусі  $Q$ , коли кути розхилу плечей зв'язані співвідношенням  $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$ , а магнітний струм (2) розміщено у біконічній області  $D_3$ .

З'ясуємо вплив довжини скінченного плеча  $ka_2$  на форму діаграм спрямованості біконуса  $Q$ . Для спрощення виток магнітного струму (2) розмістимо поблизу вершини біконуса ( $kr_0 = 0.2$ ) і в обчисленнях у полі джерела врахуємо лише найнижчу  $TM$ -моду.

Поле випромінювання біконуса (1) є симетричним відносно осі  $\theta = 0, \pi$ . Тому на рис. 2 наведені нормовані діаграми спрямованості у кутовому діапазоні  $\gamma_1 \leq \theta \leq \pi$ . Крім того, відсутнє випромінювання вздовж осі біконуса.

Як бачимо із рис. 2, зростання параметра  $ka_2$  призводить до формування біконусом  $Q$  інтенсив-

ного випромінювання у дві кутові області. Одна з них прилягає до напівнескінченної конічної поверхні  $Q_1$ , де максимум випромінювання спостерігаємо у напрямку  $\theta = \gamma_1$ , коли  $ka_2 = 1$  та  $3 \leq ka_2 \leq 5$ . Друга область інтенсивного випромінювання утворюється в околі кута  $\theta = \gamma_2$ . Положення локального екстремуму поля у цій області залежить від довжини твірної конуса  $Q_2$ . Порівнюючи криві на рис. 2, спостерігаємо незначний зсув (не перевищує  $15^\circ$ ) максимумів пелюсток діаграм спрямованості зі зростанням параметра  $ka_2$  у межах  $3 \leq ka_2 \leq 5$ . Проте ця зміна параметра  $ka_2$  суттєво не впливає на форму діаграм спрямованості (виключенням є діаграма при  $ka_2 = 5$ , на якій з'являється додаткова пелюстка). Така поведінка розподілу поля в зоні випромінювання пояснюється проявом широкосмуговості біконічного розсіювача  $Q$ .

На рис. 3 показано аналогічну залежність діаграм спрямованості для ширшого біконуса  $Q$  ( $\gamma_2 - \gamma_1 = 140^\circ$ ). З цього рисунка видно, що розширенням біконічної області (на  $50^\circ$  порівняно з попереднім випадком) вдається досягти незмінності форми діаграм спрямованості зі зміною параметра  $ka_2$  в області  $2 \leq ka_2 \leq 5$ . Отже, для ширших біко-

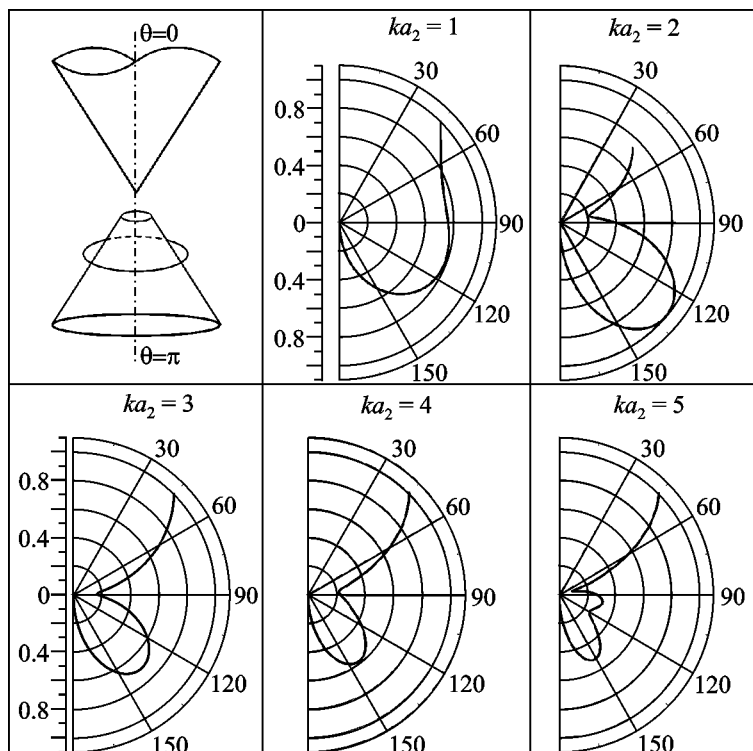


Рис. 2. Залежність діаграм спрямованості біконуса  $Q$  від параметра  $ka_2$  при  $\gamma_1 = 45^\circ$ ,  $\gamma_2 = 135^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $ka_1 = 0.01$ ,  $kr_0 = 0.2$

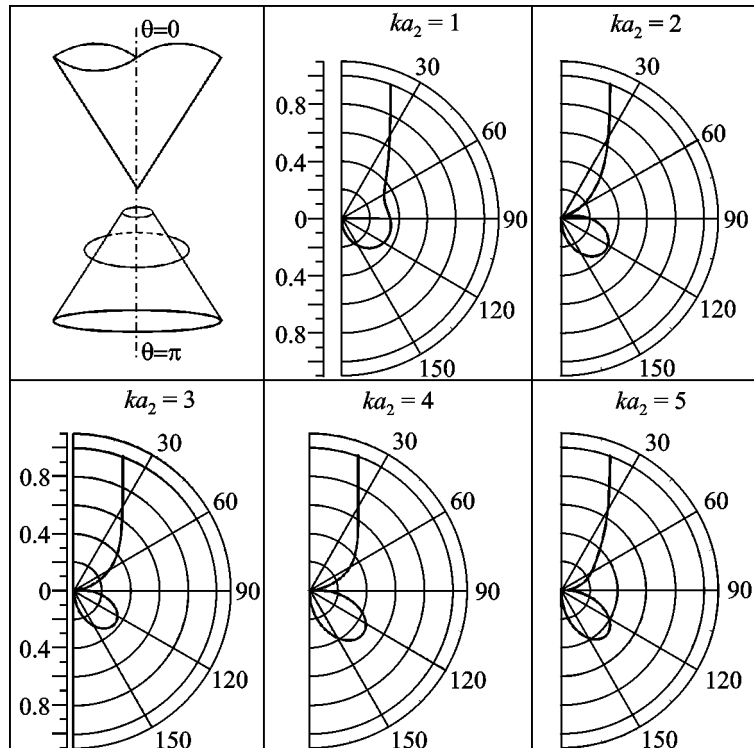


Рис. 3. Вплив параметра  $ka_2$  на діаграми спрямованості біконуса  $Q$  при  $\gamma_1 = 20^\circ$ ,  $\gamma_2 = 160^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $ka_1 = 0.01$ ,  $kr_0 = 0.2$

нічних областей ширококутовість розсіювача  $Q$  проявляється сильніше.

В [9] розглядали скінченний симетричний біконус з однаковими довжинами конічних плечей. Цей біконус збуджувався двома  $\delta$ -генераторами, розміщеними на поверхні кожного плеча, в околі вершини ( $kr_0 = 0.2$ ). На рис. 4, у виділених квадратах, порівнюються нормовані діаграми спрямованості для кутів спостереження  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ,

отримані в [9] для синфазного включення двох  $\delta$ -генераторів (суцільні криві) і наші результати (штрихові криві). Порівняння виконувалося для різних значень параметра  $ka_2$  за умови  $\theta_0 = \gamma_2$ . Зближення форм діаграм спрямованості, яке спостерігаємо на рис. 4 зі зростанням параметра  $ka_2$ , вказує на зменшення взаємного впливу конічних плечей біконуса на розподіл поля в зоні випромінювання для вибраної області спостереження.

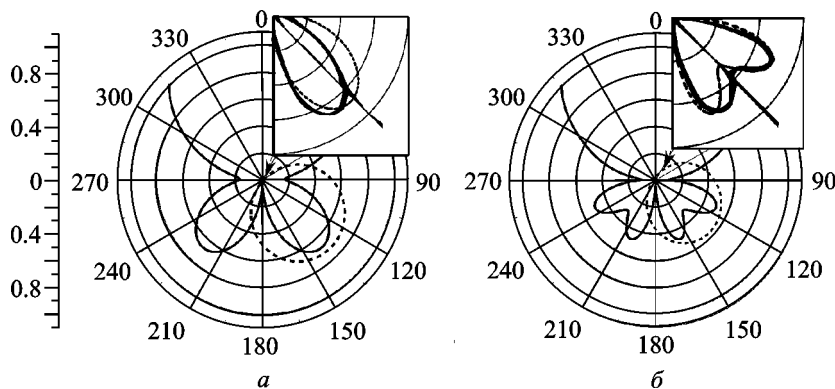


Рис. 4. Діаграми спрямованості біконічного розсіювача  $Q$  з параметрами  $ka_2 = 3.14$  (а) та  $ka_2 = 6.28$  (б) при  $\gamma_1 = 45^\circ$ ,  $\gamma_2 = 135^\circ$ ,  $ka_1 = 0.01$ ,  $kr_0 = 0.2$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$

## 6. Висновки

Отримано строгий розв'язок задачі про осесиметричне електромагнітне збудження біконуса  $Q$  витком магнітного струму. Досліджено особливості формування діаграм спрямованості зі зміною хвильової довжини твірної  $ka_2$  скінченного плеча біконуса. Показано, що широкосмугові властивості біконуса  $Q$  сильніше проявляються для розсіювачів з ширшою біконічною областю.

### Додаток

Задача збудження ідеально провідної біконічної поверхні  $Q^\infty = Q_1^\infty \cup Q_2^\infty$ , заданої у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$ , де  $Q_l^\infty = \{r \in [0, \infty), \theta = \gamma_l, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ ,  $l = 1, 2$ ,  $\gamma_2 > \gamma_1$  зводиться до розв'язку неоднорідного рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{H_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 H_\varphi = \frac{I_\varphi^{(m)} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)}{r_0 \sin \theta_0} \quad (Д1)$$

з граничною умовою

$$\frac{1}{i\omega \epsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta (H_\varphi) \right] \Big|_{r, \theta \in Q^\infty} = 0$$

та умовами випромінювання і обмеженості енергії.

Магнітну компоненту шуканого поля подамо у вигляді

$$H_\varphi(r, \theta) = \frac{i\omega \epsilon}{\sqrt{sr sr_0}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta_0) \Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta) \times \begin{cases} K_{v_n}(sr) I_{v_n}(sr_0), & r \geq r_0; \\ I_{v_n}(sr) K_{v_n}(sr_0), & r \leq r_0. \end{cases} \quad (Д2)$$

Використавши теорему Гріна, з рівняння (Д1) отримаємо:

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0+0} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0-0} = I_\varphi^{(m)} \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r_0 \sin \theta_0}. \quad (Д3)$$

Підставимо вираз (Д2) у рівняння (Д3) і, беручи до уваги, що

$$I_{v_n}(sr) K'_{v_n}(sr) - I'_{v_n}(sr) K_{v_n}(sr) = -\frac{1}{sr},$$

отримаємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta_0) \Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta) = -\frac{sr_0 I_\varphi^{(m)}}{\sin \theta_0} \delta(\theta - \theta_0).$$

Використавши співвідношення ортогональності функцій  $\Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta)$  –

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta) \Psi_{v_m-1/2}(\cos \theta) \sin \theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right), & n = 1, m = n; \\ \frac{v_n^2 - 0.25}{2v_n} \sin \gamma_2 \left[ \frac{\partial}{\partial v} R_{v_n-1/2}(\cos \gamma_2) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \gamma_2} R_{v_n-1/2}(\cos \gamma_2) \right], & n > 1, m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases}$$

отримаємо

$$B_n = -sr_0 b_n I_\varphi^{(m)} \Psi_{v_n-1/2}(\cos \theta_0), \quad (Д4)$$

де

$$b_n = \begin{cases} \left[ \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right) \right]^{-1}, & n = 1; \\ \frac{1}{\sin \gamma_2} \frac{2v_n}{v_n^2 - 0.25} \left[ \frac{\partial}{\partial v} R_{v_n-1/2}(\cos \gamma_2) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \gamma_2} R_{v_n-1/2}(\cos \gamma_2) \right]^{-1}, & n > 1. \end{cases}$$

Після підстановки виразу (Д4) у рівняння (Д2) отримаємо кінцевий вираз для магнітної компоненти поля витка у біконусі  $Q^\infty$ .

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Schelkunoff S. A.* General Theory of Symmetric Biconical Antennas // J. Appl. Phys. – 1951. – Vol. 22, No. 11. – P. 1330–1332.
2. *Papas C. H. and King R.W.* Radiation from Wide-Angle Conical Antennas Fed by a Coaxial Line // Proc. IRE. – 1951. – Vol. 39, No. 1. – P. 49–51.
3. *Bevensee R. M.* Handbook of conical antennas and scatterers. – New-York: Gordon and Breach Science Publishers, 1973. – 173 p.



4. *Зернов Н. В.* Теория диапазонных слабонаправленных антенн УКВ. – Л.: Военно-воздушная инженерная академия им. А. Ф. Можайского, 1958. – 180 с.
5. *Samaddar S. N. and Mokole E. L.* Biconical Antennas with Unequal Cone Angles // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1998. – Vol. 46, No. 2. – P. 181–193.
6. *Куриляк Д. Б.* Решение задачи дифракции на разветвлении конической области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1998. – Т. 41, № 9. – С. 13–22.
7. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т.* Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. – Київ: Наук. думка, 2006. – 280 с.
8. *Kuryliak D. B. and Nazarchuk Z. T.* Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Sci. – 2008. – 43, RS4S03, doi:10.1029/2007RS003792.
9. *Гошин Г. Г.* Граничные задачи электродинамики в конических областях. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1987. – 130 с.

Д. Б. Куриляк, О. М. Шарабура

Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко  
НАН Украины,  
ул. Научная 5, г. Львов, 79060, Украина

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ БИКОНУСА,  
СФОРМИРОВАННОГО ИЗ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ  
И КОНЕЧНОЙ СО СРЕЗАННОЙ ВЕРШИНОЙ  
КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Получено решение осесимметричной задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящей биконической поверхности с краями. В качестве источника возбуждения ис-

пользован круговой виток магнитного тока. Задача решена методом собственных функций подобластей с применением процедуры аналитической регуляризации. Для нахождения неизвестных коэффициентов разложения получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода, которые допускают редукцию при произвольных значениях параметров задачи. Исследовано влияние длины образующей конуса на формирование диаграмм направленности. Для частных случаев проведено сравнение с известными результатами.

*D. B. Kuryliak and O. M. Sharabura*

Karpenko Physico-Mechanical Institute, National Academy  
of Sciences of Ukraine,  
5, Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine

ELECTROMAGNETIC EXCITATION  
OF BICONE FORMED BY SEMI-INFINITE  
AND FINITE TRUNCATED CONICAL SURFACES

The problem of axial-symmetric electromagnetic wave diffraction by a perfectly conducting bi-conical surface with edges is solved rigorously using mode matching and analytical regularization techniques. The ring source of magnetic current is taken for electromagnetic waves excitation. To find the unknown expansion coefficients, the infinite systems of linear algebraic equation of second kind, which allow reduction for arbitrary parameters, are obtained. The effect of cone length influences for far field patterns formation is analyzed. Comparison with the known results is provided in particular cases.

*Стаття надійшла до редакції 29.12.2012*