

**РАДІОФІЗИКА ГЕОКОСМОСУ**DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra24.03.184>УДК 550.388.2,  
551.510.535,  
533.9.082.74  
PACS numbers: 94.20.Bb,  
94.20.Tt**В. Г. ГАЛУШКО**  
Радиоастрономический институт НАН Украины,  
ул. Мыстэцтв, 4, г. Харьков, 61002, Украина  
E-mail: galushko@rian.kharkov.ua**ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ  
ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И ПРИМЕНЕНИЕ  
ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ  
ПРИ ЧАСТОТНО-УГЛОВОМ ЗОНДИРОВАНИИ ИОНОСФЕРЫ**

*Предмет и цель работы: Анализ погрешности восстановления высотного профиля электронной концентрации ионосферы методом частотно-углового зондирования в зависимости от точности измерения углов прихода пробных сигналов в вертикальной плоскости и ошибки задания длины трассы распространения. Разработка алгоритмов диагностики ионосферы при ограниченном количестве зондирующих частот на основе использования полиномиальных аппроксимаций искомого профиля электронной концентрации или измеряемой частотно-угловой характеристики пробных сигналов.*

*Методы и методология: Для решения обратной задачи по восстановлению профиля электронной концентрации ионосферы используется стандартный метод решения интегрального уравнения Абеля, связывающего искомым профилем с частотными зависимостями углов прихода зондирующих сигналов на наклонных трассах распространения. Точность разработанного алгоритма анализируется с применением статистической теории оценки погрешности измерений.*

*Результаты: Получены оценки погрешности восстановления профиля электронной концентрации ионосферы методом частотно-углового зондирования в зависимости от точности измерения углов прихода пробных сигналов и ошибки задания длины трассы распространения. Разработаны алгоритмы диагностики ионосферы в случае ограниченного количества зондирующих частот, основанные на полиномиальной аппроксимации либо искомого профиля электронной концентрации, либо частотной зависимости углов прихода пробных сигналов.*

*Заключение: Методом геометрической оптики в приближении изотропной плазмы решена обратная задача наклонного зондирования плоскостной ионосферы в интегральной постановке. В качестве измеряемых параметров используются частотные зависимости вертикальных углов прихода ВЧ сигналов, распространяющихся вдоль односторонних радиотрасс средней протяженности (до 1000 км). Показано, что для обеспечения точности восстановления профиля электронной концентрации, сопоставимой с характеристиками современных ионозондов, ошибка измерения частотно-угловых характеристик пробных сигналов не должна превышать  $0.5^\circ$  для трасс длиной  $300 \div 1000$  км.*

*Погрешность метода, связанная с неточным знанием длины трассы распространения, определяется относительной ошибкой ее задания. Данное обстоятельство позволяет использовать для частотно-углового зондирования ионосферы сигналы неспециального вида, например, излучение современных станций ВЧ вещания, которые, как правило, оборудованы несколькими передатчиками (а некоторые из них и десятками), сосредоточенными на площадях размером в единицы километров, и одновременно излучают на нескольких несущих частотах. Для диагностических трасс длиной в несколько сотен километров можно считать, что все передатчики данного центра вещания расположены в одном месте.*

*Погрешность восстановления профиля электронной концентрации при этом составит несколько десятых долей процента. Для диагностики ионосферы в случае ограниченного количества зондирующих частот разработаны алгоритмы восстановления высотного распределения электронной концентрации на основе полиномиальных аппроксимаций либо искомого профиля, либо измеряемой функции.*

*Ключевые слова: ионосфера, профиль электронной концентрации, наклонное зондирование, углы прихода пробных сигналов, полиномиальная аппроксимация*

**1. Введение**

Плазменная оболочка Земли – ионосфера – оказывает существенное влияние на работу радиотехнических систем различного назначения, ис-

пользующих в той или иной мере этот естественный канал распространения радиоволн. Поэтому определение параметров ионосферной плазмы является одной из важнейших проблем, связанных с решением как фундаментальных вопросов

физики космической плазмы, так и ряда прикладных задач создания эффективных систем связи, пеленгации, навигации и радиолокации. Несмотря на большое разнообразие современных радиотехнических средств диагностики околоземной плазмы, основным источником информации о состоянии ионосферы по-прежнему остаются ионозонды, работающие в режимах вертикального и наклонного зондирования [1–6].

Первые ионозонды представляли собой обычные высокочастотные (ВЧ) импульсные когерентные радиолокаторы. Последовательно перестраивая рабочую частоту в диапазоне  $1 \div 20$  МГц и излучая достаточно короткие импульсы, такие устройства позволяли получать так называемые высотно-частотные характеристики ионосферы, т. е. зависимость действующей высоты отражения,  $z_a = \frac{1}{2} \tau_d c$  ( $c$  – скорость света,  $\tau_d$  – время группового запаздывания зондирующего сигнала до точки отражения и обратно), от частоты. Поскольку групповая скорость распространения радиоволн в ионосфере  $v_g$  меньше скорости света [7], действующая высота превышает истинную высоту отражения (или точки поворота)  $z_r$ , которая определяется из условия равенства нулю показателя преломления, а их связь задается уравнением

$$z_a = c \int_0^{z_r} dz / v_g. \quad (1)$$

Значение электронной концентрации  $N_e$  (в сантиметрах в минус третьей степени) на высоте отражения частоты  $f_0$  (в мегагерцах) определяется соотношением

$$N_e = 1.24 \cdot 10^4 f_0^2. \quad (2)$$

Таким образом, решая (1) относительно  $z_r$  и используя (2), можно восстановить высотный профиль электронной концентрации ионосферы  $N_e(z)$  над измерительной установкой. При этом довольно часто решение интегрального уравнения (1) заменяют интегрированием для некоторого модельного профиля  $N_e(z)$ , например, параболического [4].

Потребность восстанавливать  $N_e(z)$  не только над станцией зондирования, но и вдали от нее, а также получать информацию о горизонтальном распределении параметров ионосферы привела к

модификации метода в виде наклонного зондирования. Современные ионозонды, которых насчитывается более 100 в разных регионах мира, могут работать как в режиме вертикального, так и наклонного зондирования. Кроме того, существенно расширился набор измеряемых параметров пробных сигналов – наряду со временем группового запаздывания оцениваются их поляризация, амплитуда и фаза спектра, доплеровское смещение частоты и углы прихода [5, 8]. Вполне обоснованно можно было ожидать, что использование дополнительных данных, и прежде всего угломерных, в сочетании с традиционно измеряемым временем группового запаздывания позволит получать дополнительную информацию о состоянии ионосферной плазмы, например, восстанавливать трехмерно-неоднородную структуру электронной концентрации.

В 90-х гг. прошлого века в Радиоастрономическом институте НАН Украины начались исследования по разработке нового подхода к наклонной диагностике ионосферы, в основу которого были положены следующие принципы [9–12]: 1) использование в качестве информационных параметров частотных зависимостей траекторных характеристик пробных радиоволны, а именно углов прихода и доплеровских смещений частоты, и 2) применение для радиодиагностики ионосферы в ВЧ диапазоне сигналов многочисленных широкоэмиттерных станций. В результате был создан метод частотно-углового зондирования ионосферы (ЧУЗИ), позволяющий восстанавливать не только регулярный профиль электронной концентрации [11, 12], но и горизонтальные градиенты [13], а также параметры волнообразных возмущений [14–18].

Несмотря на то, что метод ЧУЗИ эффективно применяется для диагностики регулярной и неоднородной структуры ионосферы уже более 20 лет, ряд вопросов, связанных с его использованием, все еще недостаточно исследован. Прежде всего это касается точности метода и ее сравнения с параметрами современных ионозондов. Кроме того, требует анализа возможность восстановления профиля электронной концентрации при ограниченном наборе зондирующих частот, что имеет место при использовании излучения широкоэмиттерных ВЧ центров в качестве источника пробных сигналов. Исследованию этих вопросов и посвящена настоящая работа.

## 2. Восстановление высотного профиля электронной концентрации в интегральной постановке. Анализ точности метода

Рассмотрим решение задачи ЧУЗИ в следующей постановке. Пусть на трассе длиной  $D_0$  осуществляется зондирование плоскостойкой изотропной ионосферы монохроматическими сигналами на различных частотах, т. е. измеряются частотные зависимости их углов прихода в вертикальной плоскости  $\theta_0(\omega)$  (см. рис. 1). Отметим, что рассмотрение плоскостойкой модели ионосферы накладывает определенные ограничения на длину радиотрассы ( $D_0 \leq 1000$  км). В случае  $D_0 > 1000$  км необходимо учитывать сферичность Земли, что не вызовет принципиальных затруднений.

В приближении геометрической оптики дистанция одного скачка в рассматриваемом случае определяется следующим образом [19]:

$$D = 2 \sin \theta_0 \int_0^{z_r} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_0}},$$

где  $n(z)$  – высотный профиль показателя преломления ионосферы;  $z_r$  – высота точки отражения пробной волны, задаваемая уравнением  $n(z) = \sin \theta_0$ .

Таким образом, учитывая, что  $n^2(z) = 1 - \omega_p^2(z)/\omega^2$ , где  $\omega_p(z)$  – плазменная частота на высоте  $z$ ,  $\omega_p^2(z) = 4\pi e^2 N_e(z)/m \equiv AN_e(z)$ ,  $e$  и  $m$  – соответственно заряд и масса электрона, можно записать следующее интегральное урав-

нение, связывающее измеряемую зависимость  $\theta_0(\omega)$  с профилем электронной концентрации ионосферы  $N_e(z)$ :

$$D_0 = 2 \operatorname{tg} \theta_0(\omega) \int_0^{z_r(\omega)} \frac{dz}{\sqrt{1 - AN_e(z)/(\omega^2 \cos^2 \theta_0(\omega))}}. \quad (3)$$

Полагая профиль электронной концентрации  $N_e(z)$  монотонной функцией, в (3) можно перейти к интегрированию по  $N$ , в результате чего получим

$$\Psi(\Omega) = \int_0^{\Omega^2/A} \frac{(dz/dN)dN}{\sqrt{1 - AN/\Omega^2}}, \quad (4)$$

где  $\Omega = \omega \cos \theta_0(\omega)$  – эквивалентная частота,  $\Psi(\Omega) = D_0/(2 \operatorname{tg} \theta_0(\omega))$  – измеряемая функция, которая имеет смысл действующей высоты  $z_a(\Omega)$ .

Анализ выражения (4) показывает, что оно представляет собой интегральное уравнение Абеля с ядром вида  $1/\sqrt{X-t}$ , являющегося частным случаем линейного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода [20], решение которого находится методом итерированных ядер. После несложных преобразований получаем хорошо известное выражение [21]

$$z(N) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\Psi(\Omega)d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}}. \quad (5)$$

Проанализируем точность предложенного алгоритма восстановления профиля электронной концентрации. Как видно из (4), (5), основными источниками погрешности являются неточность задания дистанции  $D_0$  и ошибки измерения углов прихода  $\theta_0(\omega)$ . Оценим ошибку, связанную с неточным знанием дистанции. Для этого представим  $D_0$  в виде  $D_0 = \bar{D}_0 + \delta D_0$ , где  $\bar{D}_0$  – истинная дистанция, а  $\delta D_0$  – погрешность, с которой она известна. Тогда измеряемую функцию  $\Psi(\Omega)$  можно записать как

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega) &= \frac{\bar{D}_0 + \delta D_0}{2 \operatorname{tg} \theta_0(\Omega)} = \\ &= \frac{\bar{D}_0}{2 \operatorname{tg} \theta_0(\Omega)} \left[ 1 + \frac{\delta D_0}{\bar{D}_0} \right] = \bar{\Psi}(\Omega) \left[ 1 + \frac{\delta D_0}{\bar{D}_0} \right], \end{aligned}$$

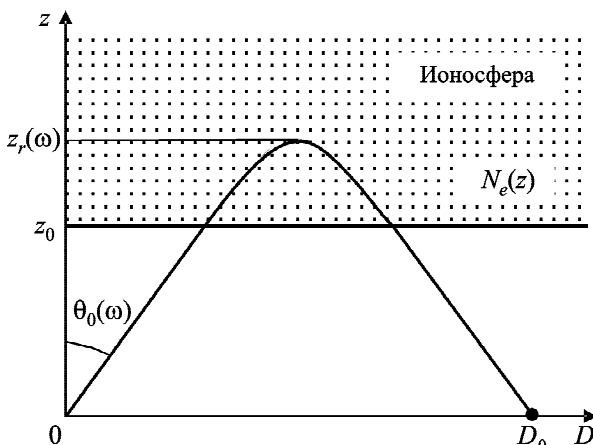


Рис. 1. Постановка задачи ЧУЗИ

где  $\bar{\Psi}(\Omega) = \frac{\bar{D}_0}{2\text{tg}\bar{\theta}_0(\Omega)}$  – истинное значение измеряемой функции.

Подставляя полученное выражение в (5), получим

$$z(N) = \frac{2}{\pi} \left[ 1 + \frac{\delta D_0}{\bar{D}_0} \right] \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\bar{\Psi}(\Omega) d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}}.$$

Отсюда следует, что относительная погрешность восстановления профиля электронной концентрации  $z(N)$  определяется относительной погрешностью задания дистанции  $D_0$ , т. е.

$$z(N) = \bar{z}(N) \left[ 1 + \frac{\delta D_0}{\bar{D}_0} \right], \quad (6)$$

где  $\bar{z}(N) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\bar{\Psi}(\Omega) d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}}$  – истинный профиль электронной концентрации.

Следует отметить, что в этом случае погрешность восстановления профиля электронной концентрации является систематической и может быть достаточно легко устранена. Данное обстоятельство позволяет использовать для частотно-углового зондирования ионосферы сигналы неспециального вида, например, излучение широкополосных передатчиков. Как известно [22, 23], современные станции ВЧ вещания оборудованы несколькими передатчиками (а некоторые из них и десятками) и большим количеством антенн, которые сосредоточены на площадях размером в единицы километров и, как правило, одновременно излучают на разных несущих частотах. Таким образом, для диагностических трасс длиной в несколько сотен километров можно считать, что все передатчики данного центра вещания расположены в одном месте. Погрешность восстановления профиля электронной концентрации при этом в соответствии с (6) будет составлять единицы процентов, что вполне соответствует точности современных ионозондов.

Для анализа влияния погрешности измерения углов прихода представим  $\Psi(\Omega)$  в виде

$$\Psi(\Omega) = \frac{D_0}{2\text{tg}\theta_0(\Omega)} = \frac{D_0}{2\text{tg}[\bar{\theta}_0(\Omega) + \delta\theta_0(\Omega)]},$$

где  $\bar{\theta}_0(\Omega)$  – истинная частотно-угловая зависимость, а  $\delta\theta_0(\Omega)$  – некая случайная добавка.

Тогда, полагая погрешность угловых измерений достаточно малой,  $|\delta\theta_0(\Omega)| \ll 1$ , можно записать

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega) &\approx \frac{D_0}{2\text{tg}\bar{\theta}_0(\Omega) \left[ 1 + 2\delta\theta_0(\Omega)/\sin 2\bar{\theta}_0(\Omega) \right]} \approx \\ &\approx \Psi_0(\Omega) - \frac{D_0}{2\sin^2\bar{\theta}_0(\Omega)} \delta\theta_0(\Omega), \end{aligned}$$

где  $\Psi_0(\Omega) = \frac{D_0}{2\text{tg}\bar{\theta}_0(\Omega)}$  – истинное значение измеряемой функции.

Подстановка полученного соотношения в (5) дает

$$z(N) = \bar{z}(N) - \frac{D_0}{\pi} \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\delta\theta_0(\Omega) d\Omega}{\sin^2\bar{\theta}_0(\Omega) \sqrt{AN - \Omega^2}}, \quad (7)$$

где  $\bar{z}(N) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\Psi_0(\Omega) d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}}$  – истинный профиль электронной концентрации.

Как правило, точность угломерных систем улучшается с ростом частоты сигнала либо за счет сужения диаграммы направленности антенны в случае использования амплитудных методов, либо из-за увеличения эффективной базы при применении фазовых методов пеленгации. А поскольку  $\bar{\theta}_0(\Omega)$  уменьшается с ростом частоты, то в первом приближении можно считать, что отношение  $\delta\theta_0(\Omega)/\sin^2\bar{\theta}_0(\Omega) \equiv \sigma_\theta = \text{const}$ , т. е. не зависит от частоты  $\Omega$ .

Тогда из (7) следует, что погрешность восстановления профиля электронной концентрации,  $\sigma_z$ , равна

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sqrt{\langle [z(N) - \bar{z}(N)]^2 \rangle} = \\ &= \frac{D_0\sigma_\theta}{\pi} \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}} = \frac{D_0}{2} \sigma_\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают статистическое усреднение.

Анализ выражения (8) показывает, что для трасс зондирования средней протяженности по-

рядка  $300 \div 1000$  км при некотором эффективном (среднем) значении величины  $\sin^2 \theta_{0ef}(\Omega) \approx 1/2$  ( $\theta_{0ef} \approx 45^\circ$ ) и погрешности измерения угла прихода пробного сигнала  $\delta\theta_0 = 0.5^\circ$  ошибка восстановления высотного профиля электронной концентрации методом ЧУЗИ не превышает  $5 \div 7$  км. Это вполне сопоставимо с характеристиками современных станций зондирования ионосферы, среди которых следует отметить CADI (Canadian Advanced Digital Ionosonde) [24], DPS-4D [8] и Dynasonde [25].

Таким образом, метод частотно-углового зондирования ионосферы является эффективным средством диагностики околоземной плазмы и может быть использован на практике. Его основное преимущество по сравнению с традиционными методами ионосферного ВЧ зондирования, в которых применяются сложные импульсные или частотно-модулированные сигналы, заключается в возможности использовать излучение специального вида, например, сигналы широкополосных ВЧ станций. Тот факт, что число зондирующих частот в этом случае может оказаться недостаточным для восстановления профиля электронной концентрации в интегральной постановке (5), не является существенным ограничением метода, поскольку одной из возможностей решения обратной задачи в этой ситуации может быть использование аппроксимирующих функций, что будет рассмотрено в следующем разделе.

### 3. Использование аппроксимирующих функций

Несмотря на простоту полученного решения обратной задачи наклонного зондирования, использование (5) для практических приложений представляется весьма затруднительным. Это связано с несколькими обстоятельствами. Во-первых, физически невозможно получить значение  $\Psi(\Omega)$  вблизи  $\Omega = 0$ . Во-вторых, практически сложно реализовать измерение углов прихода для непрерывного континуума значений  $\Omega$ . В-третьих, наличие погрешности измерений  $\Psi(\Omega)$  может приводить к взаимной неоднозначности функций  $N(z)$  и  $z(N)$  – некорректности задачи. Одним из путей преодоления этих трудностей является применение регуляризирующих процедур, эквивалентных сглаживанию (фильтрации) исходных данных. Например, можно использовать полиномиальную

аппроксимацию либо для искомого профиля электронной концентрации  $N_e(z)$ , либо для измеряемой функции  $\Psi(\Omega)$ . Рассмотрим эти вопросы более подробно.

*Полиномиальная аппроксимация искомого профиля  $N_e(z)$ .* Для решения уравнения (3) воспользуемся способом, при котором искомый профиль  $N_e(z)$  разбивается на ряд сегментов [26], в пределах каждого из которых он описывается модельным представлением, позволяющим вычислить интеграл в (3). Таким образом, обратная задача сводится к нахождению корней системы алгебраических уравнений для параметров каждого сегмента и затем построению общего решения. В качестве аппроксимирующих функций сегментов были выбраны кусочно-линейная и кусочно-параболическая, комбинация которых позволяет описывать практически любое распределение  $N_e(z)$ .

*Кусочно-линейная аппроксимация.* Пусть измерение углов прихода сигналов  $\theta_{0i}$  осуществляется на  $M$  частотах, причем  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_M$ . В этом случае определение значений  $N_e(z_{ri})$ , соответствующих электронной концентрации в точке отражения волны  $i$ -й частоты, легко находится из условия полного внутреннего отражения [19]

$$\omega_i^2 \cos^2 \theta_{0i} = AN_e(z_{ri}).$$

При этом, вообще говоря, возможно наблюдение нескольких углов прихода  $\theta_{0i}$  на одной частоте  $\omega_i$  (многолучевое распространение). Этот случай требует специального рассмотрения и выходит за рамки настоящей работы. Мы же будем полагать, что каждому значению  $\omega_i$  соответствует единственный угол  $\theta_{0i}$ . Тогда обратная задача сводится к вычислению истинных высот отражения  $z_{ri}$  сигналов  $i$ -х частот. Для этого разобьем профиль  $N_e(z)$  на  $M$  сегментов (по числу зондирующих частот) и на интервалах  $\{z_{ri}, z_{ri+1}\}$  будем считать  $N_e(z)$  линейной функцией. Высоту начала ионосферы  $z_0$  (см. рис. 1) положим равной корню уравнения  $N_e^{(1)}(z) = 0$ , где  $N_e^{(1)}(z)$  – профиль электронной концентрации в интервале высот  $\{z_{r1}, z_{r2}\}$ . Тем самым мы определенным образом продлим функцию измеряемых параметров  $\Psi(\Omega)$  в (5) до значения  $\Omega = 0$ . Выполнив в (3) интегрирование для интервала  $\{z_0, z_{r2}\}$ , получим систему уравнений для определения  $z_0$  и  $z_{r2}$  по измерениям углов прихода на первых двух (самых низких) частотах

$$\begin{cases} z_0 = \frac{D_0}{2} \frac{\omega_1^2 \sin 2\theta_{01} - \omega_2^2 \sin 2\theta_{02}}{\omega_1^2 \operatorname{tg}\theta_{02} \sin 2\theta_{01} - \omega_2^2 \operatorname{tg}\theta_{01} \sin 2\theta_{02}}, \\ z_{r2} = \frac{\omega_2^2 \cos^2 \theta_{02}}{a_1} + z_0, \end{cases}$$

где  $a_1 = \frac{2}{D_0} \frac{\omega_1^2 \operatorname{tg}\theta_{02} \sin 2\theta_{01} - \omega_2^2 \operatorname{tg}\theta_{01} \sin 2\theta_{02}}{\operatorname{tg}\theta_{02} - \operatorname{tg}\theta_{01}}$  – наклон (высотный градиент)  $N_e(z)$  на первом участке.

Очевидно, что высоты отражения сигналов остальных частот определяются выражением

$$z_{ri} = \frac{\omega_i^2 \cos^2 \theta_{0i} - \omega_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{0i-1}}{a_{i-1}} + z_{ri-1},$$

где  $i = 3, 4, \dots, M$ . Для вычисления коэффициентов  $a_{i-1}$  выполним интегрирование в (3) для всех частот и, после обобщения полученных результатов, получим

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= 4\omega_i \sin \theta_{0i} \sqrt{\omega_i^2 \cos^2 \theta_{0i} - \omega_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{0i-1}} \times \\ &\times \left[ D_0 - 2z_0 \operatorname{tg}\theta_{0i} - 4\omega_i \sin \theta_{0i} \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{\omega_i \cos \theta_{0i} - \sqrt{\omega_i^2 \cos^2 \theta_{0i} - \omega_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{0i-1}}}{a_1} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{k=2}^{i-1} Q_k \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь  $Q_k = \frac{1}{a_k} \left( \sqrt{\omega_i^2 \cos^2 \theta_{0i} - \omega_k^2 \cos^2 \theta_{0k}} - \sqrt{\omega_i^2 \cos^2 \theta_{0i} - \omega_{k+1}^2 \cos^2 \theta_{0k+1}} \right) \Theta(i-2-k)$ , где  $\Theta(x)$  – функция Хэвисайда, т. е.  $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$

Таким образом, все необходимые величины для определения профиля  $N_e(z)$  в случае кусочно-линейной аппроксимации найдены, т. е. решена задача наклонного зондирования ионосферы. Следует, однако, отметить, что использование предложенного алгоритма восстановления  $N_e(z)$  вблизи высоты  $z_m$ , соответствующей максимуму электронной концентрации  $N_m$ , связано

с определенными трудностями, поскольку зависимость  $N_e(z)$  вблизи  $z_m$  существенно нелинейная. Увеличить диапазон восстановления, в принципе, можно, уменьшив шаг по частоте  $\Delta = \omega_{i+1} - \omega_i$  при приближении к максимально применимой частоте (МПЧ) [27] для данной трассы зондирования  $D_0$ . Но, поскольку вблизи МПЧ глубина проникновения волны в ионосферный слой сильно зависит от зондирующей частоты, в реальных условиях достичь высот  $z \approx z_m$  весьма сложно. Этот недостаток, однако, не является принципиальным, так как устранить его можно, применяя в качестве модельных функций сегментов отрезки парабол.

*Кусочно-параболическая аппроксимация.* Кроме сложности описания профиля электронной концентрации  $N_e(z)$  вблизи его максимума, кусочно-линейная аппроксимация имеет по крайней мере еще один недостаток – наличие изломов, т. е. разрывов первой производной. Для его устранения потребуем, кроме непрерывности значений  $N_e(z)$  на границах сегментов, еще и непрерывности первых производных.

Как и ранее, разобьем искомый профиль  $N_e(z)$  на  $M$  сегментов, в пределах каждого из которых будем использовать модельное представление вида

$$N_e^{(i)}(z) = N_m^{(i)} \frac{(z - z_m^{(i)})^2}{y_m^{(i)2}} + N_0^{(i)} \quad \text{при } z \geq z_0^{(i)} \quad (9)$$

либо

$$N_e^{(i)}(z) = N_m^{(i)} \left[ 1 - \frac{(z - z_m^{(i)})^2}{y_m^{(i)2}} \right] \quad \text{при } z_0^{(i)} \leq z \leq z_m^{(i)}, \quad (10)$$

где  $z_m^{(i)}$  – координата (высота) расположения экстремума (минимума или максимума) аппроксимирующей функции сегмента  $i$ ,  $y_m^{(i)} = z_m^{(i)} - z_0^{(i)}$ .

Для первого сегмента выберем модель (9) при  $N_0^{(1)} = 0$ . Тогда для определения параметров высотного распределения электронной концентрации в пределах этого сегмента достаточно измерений углов прихода на первых двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . После интегрирования в (3) с учетом распределения (9) и решения полученной системы уравнений, можно записать выражения для высоты начала слоя и величины  $\zeta^{(1)} = \sqrt{N_m^{(1)} A} / y_m^{(1)}$ :

$$z_0 = \frac{D_0}{2} \frac{\omega_2 \sin \theta_{02} - \omega_1 \sin \theta_{01}}{\omega_2 \operatorname{tg} \theta_{01} \sin \theta_{02} - \omega_1 \operatorname{tg} \theta_{02} \sin \theta_{01}}, \quad (11)$$

$$\zeta^{(1)} = \frac{\pi}{D_0} \frac{\omega_2 \operatorname{tg} \theta_{01} \sin \theta_{02} - \omega_1 \operatorname{tg} \theta_{02} \sin \theta_{01}}{\operatorname{tg} \theta_{01} - \operatorname{tg} \theta_{02}}. \quad (12)$$

Заметим, что физически обоснованными решения (11) и (12) ( $z_0, \zeta^{(i)} > 0$ ) получаются при выполнении неравенств

$$\theta_{01} > \theta_{02} \quad \text{и} \quad \omega_1 \sin \theta_{01} < \omega_2 \sin \theta_{02}, \quad (13)$$

которые могут нарушаться при наличии ошибок измерений. Проведенный анализ показал, что в случае невыполнения (13) оптимальным (в смысле минимума среднеквадратичной ошибки) будет решение

$$\zeta^{(1)} = \infty \quad \text{и} \quad z_0 = \frac{D_0}{2} \frac{\operatorname{tg} \theta_{01} + \operatorname{tg} \theta_{02}}{\operatorname{tg}^2 \theta_{01} + \operatorname{tg}^2 \theta_{02}}.$$

Однако при этом невозможно выполнить условие непрерывности первых производных. Поэтому  $\zeta^{(1)}$  полагалось равным некоему достаточно большому значению  $\zeta_m$ , а  $z_0$  определялась по формуле

$$z_0 = \frac{2D_0 - \pi(\omega_1 \sin \theta_{01} + \omega_2 \sin \theta_{02})}{2(\operatorname{tg} \theta_{01} + \operatorname{tg} \theta_{02})}. \quad (14)$$

Таким образом, на первом участке высотного профиля распределения электронной концентрации  $N_e(z)$  определяется либо формулами (11), (12) – в случае выполнения условий (13), либо (14) при  $\zeta^{(1)} = \zeta_m$  – в противном случае.

Система уравнений для параметров второго сегмента имеет вид

$$\begin{cases} N_e^{(1)}(z_{r2}) = N_e^{(2)}(z_{r2}), \\ \left. \frac{dN_e^{(1)}(z)}{dz} \right|_{z=z_{r2}} = \left. \frac{dN_e^{(2)}(z)}{dz} \right|_{z=z_{r2}}, \\ D_0 = D(\theta_{03}, \omega_3), \end{cases} \quad (15)$$

где функциональная зависимость  $D_0 = D(\theta_{03}, \omega_3)$  задается выражением (3).

Для определения явного вида  $D_0 = D(\theta_{03}, \omega_3)$ , равной сумме дистанций, пройденных волной на первом (уже известном) и втором участках  $N_e(z)$ , необходимо выбрать соответствующий вид

параболы. Для этого вычислим  $\tilde{D} = D(\theta_{03}, \omega_3)$ , полагая, что выше  $z_{r2}$  профиль электронной концентрации описывается линейной функцией с высотным градиентом  $\alpha_1 = dN_e(z)/dz|_{z=z_{r2}}$ . Если  $|\tilde{D} - D_0| \leq \delta D$  ( $\delta D$  – погрешность, обусловленная ошибками измерения углов прихода), то в качестве аппроксимирующей функции второго сегмента выбираем линейную. Если  $\tilde{D} - D_0 > \delta D$  или  $\tilde{D} - D_0 < -\delta D$ , то соответственно выбирается распределение (9) или (10). После выбора параболы того или иного вида решается система (15) и определяются параметры второго сегмента. Применяя аналогичный подход к  $i$ -му участку  $N_e(z)$ , можно определить параметры каждого сегмента и, следовательно, восстановить профиль электронной концентрации ионосферы.

*Полиномиальная аппроксимация измеряемой функции  $\Psi(\Omega)$ .* Полиномиальная аппроксимация широко используется при обработке результатов физических наблюдений [28] и решении некорректно поставленных обратных задач [29]. Основными преимуществами такого подхода являются возможность аналитического представления измеряемой функции, а также уменьшение влияния ошибок измерения за счет применения различных алгоритмов регуляризации, например, минимизации среднеквадратичного отклонения [30].

Представим измеряемую зависимость  $\Psi(\Omega)$  в виде полинома  $n$ -й степени, т. е.

$$\Psi(\Omega) = \sum_{i=0}^n \Psi_i \Omega^i, \quad (16)$$

где  $\Psi_i$  – коэффициенты полиномиального разложения.

Подставляя (16) в (5), получим

$$z(N) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n \Psi_i \int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\Omega^i d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}}. \quad (17)$$

Согласно [31], интеграл под знаком суммирования равен

$$\int_0^{\sqrt{AN}} \frac{\Omega^i d\Omega}{\sqrt{AN - \Omega^2}} = \frac{1}{2} (AN)^{i/2} B\left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где  $B(\alpha, \beta)$  – бета-функция.

Выражая  $V(\alpha, \beta)$  через гамма-функции,

$$V(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

и подставляя полученное выражение в (17), получим решение уравнения (4) в следующем виде:

$$z(N) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^n \frac{\psi_i \Gamma((i+1)/2)}{\Gamma(i/2+1)} (AN)^{i/2}. \quad (18)$$

Можно показать, что при использовании полиномов (16) определенного вида решение (18) соответствует достаточно простым модельным представлениям профиля электронной концентрации  $N_e(z)$ , широко используемым для практических целей. Так, например, если  $\Psi(\Omega) = \psi_0 + \psi_1 \Omega$ , то из (18) получаем  $z(N) = \psi_0 + \frac{2}{\pi} \psi_1 \sqrt{AN}$ , что соответствует параболическому слою [27], а при  $\Psi(\Omega) = \psi_0 + \psi_{21} \Omega^2$  имеем  $z(N) = \psi_0 + \frac{\psi_{21}}{2} AN$ , т. е. линейный слой.

Вполне очевидно, что максимальная степень  $n$  полиномиального представления (16) должна быть меньше величины  $M - 1$ . Более того, поскольку  $\Psi(\Omega)$  измеряется с некоторой погрешностью, для обеспечения устойчивости алгоритма решения обратной задачи необходимо выполнение условия  $n \leq M - 2$ . При этом коэффициенты  $\psi_i$  находятся с применением регуляризирующих процедур (например, по критерию наименьших квадратов [29]), что позволяет существенно уменьшить влияние погрешности измерений. Следует также отметить, что стремление повысить точность аппроксимации путем увеличения степени полинома не всегда приводит к желаемому результату, а зачастую, даже наоборот, ухудшает устойчивость алгоритма решения обратной задачи. Поэтому при выборе степени полинома  $\Psi(\Omega) = \sum_{i=0}^n \psi_i \Omega^i$  представляется целесообразным учитывать априорную информацию о профиле электронной концентрации и состоянии ионосферы. Это могут быть, например, данные об условиях освещенности трассы зондирования (дневные, ночные или переходные, т. е. вблизи солнечного терминатора), географической широте расположения передающего и приемного пунктов (высоко-, низко- или среднеширотная ионосфера), степени возмущенности ионосферы и т. д.

## 4. Заключение

Методом геометрической оптики в приближении изотропной плазмы решена обратная задача наклонного зондирования плоскостной ионосферы в интегральной постановке. В качестве измеряемых параметров использовались частотные зависимости вертикальных углов прихода ВЧ сигналов, распространяющихся вдоль односкачковых радиотрасс средней протяженности (до 1000 км). Выполнены оценки погрешности восстановления высотного профиля электронной концентрации  $N_e(z)$  в зависимости от ошибки измерения углов прихода зондирующих сигналов в угломестной плоскости и неточности задания длины трассы распространения  $D_0$ . Показано, что для обеспечения точности восстановления  $N_e(z)$ , сопоставимой с характеристиками современных ионзондов, ошибка измерения частотно-угловых характеристик пробных сигналов не должна превышать  $0.5^\circ$  для трасс длиной 300 ÷ 1000 км.

Погрешность метода, связанная с неточным знанием длины трассы распространения, определяется относительной ошибкой задания дистанции  $D_0$ . Данное обстоятельство позволяет использовать для частотно-углового зондирования ионосферы сигналы неспециального вида, например, излучение современных станций ВЧ вещания, которые, как правило, оборудованы несколькими передатчиками (а некоторые из них и десятками) и большим количеством антенн, сосредоточенных на площадях размером в единицы километров, и одновременно излучают на нескольких несущих частотах. Таким образом, для диагностических трасс длиной в несколько сотен километров можно считать, что все передатчики данного центра вещания расположены в одном месте. При этом погрешность восстановления  $N_e(z)$  составит несколько десятых долей процента.

Поскольку в случае диагностики ионосферы сигналами ширококвещательных ВЧ станций количество зондирующих частот может оказаться недостаточным для решения обратной задачи в интегральной постановке, разработаны алгоритмы восстановления высотного распределения электронной концентрации на основе полиномиальных аппроксимаций либо искомого профиля  $N_e(z)$ , либо измеряемой функции  $\Psi(\Omega)$ .



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reinisch B. W., Haines D. M., Bibl K., Galkin I., Huang X., Kitrosser D. F., Sales G. S., and Scali J. L. Ionospheric sounding in support of over-the-horizon radar. *Radio Sci.* 1997. Vol. 32, No. 4. P. 1681–1694. DOI: 10.1029/97RS00841
2. Брюнелли Б. Е. *Физика ионосферы*. Москва: Наука, 1988. 528 с.
3. Грозов В. П., Носов В. Е., Котович Г. В., Ким А. Г., Матюшонков С. М., Ратовский К. Г. Сравнение основных параметров ионосферы на слабонаклонной трассе с данными вертикального зондирования. *Геомагнетизм и аэронавигация*. 2004. Т. 44, № 3. С. 372–377.
4. Davies K. *Ionospheric radio*. London, United Kingdom: Peter Peregrinus Ltd., 1989. 580 p.
5. Reinisch B. W. Modern Ionosondes. In: H. Kohl, R. Rüster, K. Schlegel, eds. *Modern Ionosphere Science*. Katlenburg-Lindau, FRG: European Geophysical Society Publ., 1996. P. 440–458.
6. Афраймович Э. Л. *Интерференционные методы радиозондирования ионосферы*. Москва: Наука, 1982. 199 с.
7. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. *Волновые явления в ионосфере и космической плазме*. Москва: Наука, 1984. 392 с.
8. Reinisch B. W. and Galkin I. A. A new digisonde for research and monitoring applications. *XXIX URSI GA Abstracts*. (August 7-16, 2008. Chicago). Chicago, Illinois, USA, 2008. P. 131.
9. Галушко В. Г. О возможности частотно-углового зондирования ионосферы. *Известия вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 7. С. 850–853.
10. Galushko V. G. Restoration of the Ionosphere Electron Density Profile from the Data of Frequency-and-Angular Sounding. *XXIV URSI GA Abstracts*. (Aug. 25 - Sept. 2, 1993. Kyoto). Kyoto, Japan, 1993. P. 323.
11. Galushko V. G., Yampolski Y. M., and Reinisch B. W. Frequency-and-Angular Sounding of the Ionosphere with the Use of a DPS Receive System. *Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symp. (PIERS-2000)*. (July 5-14, 2000. Cambridge). Cambridge, MA, USA, 2000. P. 603.
12. Galushko V. G. Frequency-and-angular sounding of the ionosphere. *Telecommun. Radio Eng.* 1997. Vol. 51, No. 6-7. P. 1–6. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v51.i6-7.10
13. Галушко В. Г., Литвиненко Г. В. Восстановление трехмерно-неоднородной структуры электронной концентрации ионосферы методом частотно-углового зондирования. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2001. Т. 6, № 3. С. 222–229.
14. Beley V. S., Galushko V. G., and Yampolski Y. M. Traveling ionospheric disturbance diagnostics using HF signal trajectory parameter variations. *Radio Sci.* 1995. Vol. 30, No. 6. P. 1739–1752. DOI: 10.1029/95RS01992
15. Galushko V. G., Beley V. S., Koloskov A. V., Yampolski Y. M., Reinisch B. W., and Paznukhov V. V. Frequency-and-angular HF sounding and ISR diagnostics of TIDs. *Radio Sci.* 2003. Vol. 38, Is. 6. id. 1102. DOI: 10.1029/2002RS002861
16. Galushko V. G., Kascheev A. S., Paznukhov V. V., Yampolski Y. M., and Reinisch B. W. Frequency-and-angular sounding of traveling ionospheric disturbances in the model of three-dimensional density waves. *Radio Sci.* 2008. Vol. 43, Is. 4. id. RS4013. DOI: 10.1029/2007RS003735
17. Paznukhov V. V., Galushko V. G., and Reinisch B. W. Digisonde observations of TIDs with frequency and angular sounding technique. *Adv. Space Res.* 2012. Vol. 49, No. 4. P. 700–710. DOI: 10.1016/j.asr.2011.11.012
18. Galushko V. G., Kashcheyev A. S., Kashcheyev S. B., Koloskov A. V., Pikulik I. I., Yampolski, Y. M., Litvinov V. A., Milinevsky G. P., and Rakusa-Suszczewski S. Bistatic HF diagnostics of TIDs over the Antarctic Peninsula. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2007. Vol. 69, Iss. 4-5. P. 403–410. DOI: 10.1016/j.jastp.2006.05.010
19. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. *Геометрическая оптика неоднородных сред*. Москва: Наука, 1980. 304 с.
20. Трикоми Ф. *Интегральные уравнения*. Москва: Иностранная литература, 1960. 300 с.
21. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. *Интегральные уравнения*. Москва: Наука, 1976. 216 с.
22. Городецкий С. Э. *Радиопередающие устройства магистральной радиосвязи*. Москва: Связь, 1980. 176 с.
23. Список КВ передатчиков для радиовещания. URL: [http://guzei.com/radio/sw\\_list.html](http://guzei.com/radio/sw_list.html)
24. MacDougall J. W. and Li X. Meteor observations with a modern digital ionosonde. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2001. Vol. 63., Iss. 2-3. P. 135–141. DOI: 10.1016/S1364-6826(00)00143-7
25. Rietveld M. T., Wright J. W., Zabolotin N., and Pitteway M. L. V. The EISCAT Tromsø Dynasonde. *XXXIX URSI GA Abstracts*. (August 7-16, 2008. Chicago). Chicago, Illinois, USA, 2008. P. 132.
26. Reilly M. H. Ionospheric true height profiles from oblique ionograms. *Radio Sci.* 1985. Vol. 20, No. 3. P. 69–72. DOI: 10.1029/RS20i003p00280
27. Альперт Я. Л. *Распространение электромагнитных волн в ионосфере*. Москва: Наука, 1972. 563 с.
28. Макс Ж. *Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 1: Основные принципы и классические методы*. Москва: Мир, 1983. 312 с.
29. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 288 с.
30. Лоусон Ч., Хенсон Р. *Численное решение задач методом наименьших квадратов*. Москва: Наука, 1986. 232 с.
31. Прудников А. П., Бычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды*. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 800 с.

## REFERENCES

1. REINISCH, B. W., HAINES, D. M., BIBL, K., GALKIN, I., HUANG, X., KITROSSER, D. F., SALES, G. S. and SCALI, J. L., 1997. Ionospheric sounding in support of over-the-horizon radar. *Radio Sci.* vol. 32, no. 4, pp. 1681–1694. DOI: 10.1029/97RS00841
2. BRYUNELLI, B. E., 1988. *Physics of the ionosphere*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
3. GROZOV, V. P., NOSOV, V. E., KOTOVICH, G. V., KIM, A. G., MATYUSHONOK, S. M. and RATOVS-KI, K. G., 2004. Comparison of basic parameters of the ionosphere at a slightly oblique path with vertical sounding data. *Geomagnetism i aeronomiya*. vol. 44, no. 3, pp. 372–377. (in Russian).
4. DAVIES, K., 1989. *Ionospheric radio*. London, United Kingdom: Peter Peregrinus Ltd.

5. REINISCH, B. W., 1996. Modern Ionosondes. In: H. KOHL, R. RÜSTER, and K. SCHLEGEL, eds. *Modern Ionosphere Science*. Katlenburg-Lindau, FRG: European Geophysical Society Publ., pp. 440–458.
6. AFRAIMOVICH, E. L., 1982. *Interference methods of ionospheric radio sounding*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
7. GERSHMAN, B. N., ERUKHIMOV, L. M. and YASHIN, Y. Y., 1984. *Wave phenomena in the ionosphere and space plasma*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
8. REINISCH, B. W. and GALKIN, I. A., 2008. A new digisonde for research and monitoring applications. In: *XXIX URSI GA Abstracts*. Chicago, Illinois, USA, p. 131.
9. GALUSHKO, V. G., 1991. On the possibility of frequency-angle sounding of the atmosphere. *Radiophys. Quantum Electron.* vol. 34, no. 7, pp. 689–691. DOI: 10.1007/BF01039605
10. GALUSHKO, V. G., 1993. Restoration of the Ionosphere Electron Density Profile from the Data of Frequency-and-Angular Sounding. In: *XXIV URSI GA Abstracts*. Kyoto, Japan, p. 323.
11. GALUSHKO, V. G., YAMPOLSKI, Y. M. and REINISCH, B. W., 2000. Frequency-and-Angular Sounding of the Ionosphere with the Use of a DPS Receive System. In: *Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS-2000)*. Cambridge, MA, USA, p. 603.
12. GALUSHKO, V. G., 1997. Frequency-and-angular sounding of the ionosphere. *Telecommun. Radio Eng.* vol. 51, no. 6-7, pp. 1–6. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v51.i6-7.10
13. GALUSHKO, V. G. and LITVINENKO, G. V., 2001. Recovering the three-dimensional structure of ionospheric electron density distribution by angular-and-frequency sounding. *Radio Phys. Radio Astron.* vol. 6, no. 3, pp. 222–229. (in Russian).
14. BELEY, V. S., GALUSHKO, V. G. and YAMPOLSKI, Y. M., 1995. Traveling ionospheric disturbance diagnostics using HF signal trajectory parameter variations. *Radio Sci.* vol. 30, no. 6, pp. 1739–1752. DOI: 10.1029/95RS01992
15. GALUSHKO, V. G., BELEY, V. S., KOLOSKOV, A. V., YAMPOLSKI, Y. M., REINISCH, B. W. and PAZNUKHOV, V. V., 2003. Frequency-and-angular HF sounding and ISR diagnostics of TIDs. *Radio Sci.* vol. 38, is. 6, id. 1102. DOI: 10.1029/2002RS002861
16. GALUSHKO, V. G., KASCHEEV, A. S., PAZNUKHOV, V. V., YAMPOLSKI, Y. M. and REINISCH, B. W., 2008. Frequency-and-angular sounding of traveling ionospheric disturbances in the model of three-dimensional density waves. *Radio Sci.* vol. 43, is. 4, id. RS4013. DOI: 10.1029/2007RS003735
17. PAZNUKHOV, V. V., GALUSHKO, V. G. and REINISCH, B. W., 2012. Digisonde observations of TIDs with frequency and angular sounding technique. *Adv. Space Res.* vol. 49, no. 4, pp. 700–710. DOI: 10.1016/j.asr.2011.11.012
18. GALUSHKO, V. G., KASHCHEYEV, A. S., KASHCHEYEV, S. B., KOLOSKOV, A. V., PIKULIK, I. I., YAMPOLSKI, Y. M., LITVINOV, V. A., MILINEVSKY, G. P. and RAKUSA-SUSZCZEWSKI, S., 2007. Bistatic HF diagnostics of TIDs over the Antarctic Peninsula. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* vol. 69, is. 4-5, pp. 403–410. DOI: 10.1016/j.jastp.2006.05.010
19. KRAVTSOV, Y. A. and ORLOV, Y. I., 1980. *Geometrical optics of inhomogeneous media*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
20. TRICOMI, F., 1960. *Integral equations*. Moscow, Russia: Inostrannaya Literatura Publ. (in Russian).
21. KRASNOV, M. L., KISELYOV, A. I. and MAKARENKO, G. I., 1976. *Integral equations*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
22. GORODETSKI, S. E., 1980. *Radio transmitter devices for backbone radio communication*. Moscow, Russia: Svyaz' Publ. (in Russian).
23. LIST OF HF TRANSMITTERS FOR RADIO BROADCAST [online]. [viewed 18.06.2019]. Available from: [http://guzei.com/radio/sw\\_list.html](http://guzei.com/radio/sw_list.html)
24. MACDOUGALL, J. W. and LI, X., 2001. Meteor observations with a modern digital ionosonde. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* vol. 63, is. 2-3, pp. 135–141. DOI: 10.1016/S1364-6826(00)00143-7
25. RIETVELD, M. T., WRIGHT, J. W., ZABOTIN, N. and PITTEWAY, M. L. V., 2008. The EISCAT Tromsø Dynasonde. *XXIX URSI GA Abstracts*. Chicago, Illinois, USA, p. 132.
26. REILLY, M. H., 1985. Ionospheric true height profiles from oblique ionograms. *Radio Sci.* vol. 20, no. 3, pp. 69–72. DOI: 10.1029/RS20i003p00280
27. ALPERT, Y. L., 1972. *Electromagnetic wave propagation and ionosphere*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
28. MAX, J., 1983. *Methods and techniques of signal processing in physical measurements. Vol. 1: Basic principles and classical methods*. Moscow, Russia: Mir Publ. (in Russian).
29. TIKHONOV, A. N. and ARSENIN, V. Y., 1986. *Methods of solving ill-posed problems*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
30. LAWSON, C. and HANSON, R., 1986. *Solving least squares problems*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
31. PRUDNIKOV, A. P., BYCHKOV, Y. A. and MARI-CHEV, O. I., 1981. *Integrals and series*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).

V. G. Galushko

Institute of Radio Astronomy,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine

#### ELECTRON DENSITY PROFILE RECOVERY ACCURACY AND APPLICATION OF POLYNOMIAL APPROXIMATIONS IN THE FREQUENCY-AND-ANGULAR SOUNDING OF THE IONOSPHERE

*Purpose:* Analysis of the error in recovering the height profile of the electron density of the ionosphere by the frequency-and-angular sounding technique in dependence on the accuracy of measuring vertical plane angles of arrival of the probe signals and inexactness of specifying the propagation path length. Development of algorithms for ionospheric diagnostics in the case of a limited number of the sounding frequencies on the basis of polynomial approximations of the sought for electron density profile or measured frequency-and-angular characteristic of the probe signals.

*Design/methodology/approach:* To treat the inverse problem of recovering the ionospheric electron density profile, the standard method is applied for solving an Abel integral equation,

relating the sought for profile to frequency dependences of arrival angles of the probe signals propagating along oblique radio paths. The accuracy of the developed algorithm is analyzed with the use of the statistical theory of measurement error estimation. *Findings:* The error of recovering the electron density profile of the ionosphere by the frequency-and-angular sounding technique has been estimated in dependence on the accuracy of measuring the arrival angles of the probe signals and inexactness of specifying the propagation path length. Algorithms have been developed for ionospheric diagnostics in the case of a limited number of sounding frequencies, based on polynomial approximations of either the sought for electron density profile or the frequency dependence of the arrival angles of the probe signals. *Conclusions:* The ray optics technique is used within the isotropic plasma approximation to solve the inverse problem of oblique sounding of a plane stratified ionosphere in the integral formulation. The measured parameters are frequency dependences of the vertical plane angles of arrival of HF signals propagating along single-hop radio paths of moderate lengths (up to 1000 km). It is shown that to provide the accuracy of electron density profile recovering, comparable to the characteristics of modern ionosondes, the error in measuring the frequency-and-angular characteristics of the probe signals should not exceed 0.5 degree for path lengths 300 to 1000 km.

The error of the method associated with inaccurate knowledge of the propagation path length is determined by the relative error of its specification. This fact makes it possible to use non-dedicated signals for frequency-and-angular sounding of the ionosphere, for example, emissions of modern HF broadcasting stations which, as a rule, are equipped by several transmitters (some of them by dozens) being located on areas of units of kilometers in size and radiate simultaneously at several carrier frequencies. For diagnostic links of several hundreds of kilometers in length it can be supposed that all transmitters of a given broadcast center are located at a single place. The error of recovering the electron density profile in this case will make a few tenths of a percent.

For ionospheric diagnostics in the case of a limited number of sounding frequencies, algorithms for recovering the electron density height distribution have been developed on the basis of polynomial approximations of either the sought for profile or the measured function.

*Key words:* ionosphere, electron density profile, oblique sounding, probe signal angles of arrival, polynomial approximation

В. Г. Галушко

Радіоастрономічний інститут НАН України,  
вул. Мистецтв, 4, м. Харків, 61002, Україна

ТОЧНІСТЬ ВІДНОВЛЕННЯ ПРОФІЛЯ ЕЛЕКТРОННОЇ  
КОНЦЕНТРАЦІЇ ТА ЗАСТОСУВАННЯ  
ПОЛІНОМІАЛЬНИХ АПРОКСИМАЦІЙ  
ПРИ ЧАСТОТНО-КУТОВОМУ  
ЗОНДУВАННІ ІОНОСФЕРИ

*Предмет і мета роботи:* Аналіз похибки відтворення висотного профіля електронної концентрації іоносфери методом частотно-кутового зондування залежно від точ-

ності вимірювання кутів приходу пробних сигналів у вертикальній площині та задання довжини траси поширення. Розробка алгоритмів діагностики іоносфери при обмеженій кількості зондувальних частот, що ґрунтуються на використанні поліноміальних апроксимацій шуканого профіля електронної концентрації або вимірюваної частотно-кутової характеристики пробних сигналів.

*Методи і методологія:* Для розв'язання оберненої задачі щодо відтворення профіля електронної концентрації іоносфери використовується стандартний метод розв'язку інтегрального рівняння Абеля, що пов'язує шуканий профіль з частотними залежностями кутів приходу зондувальних сигналів на похилих трасах поширення. Точність розробленого алгоритму аналізується з використанням статистичної теорії оцінки похибки вимірювань.

*Результати:* Отримано оцінки похибки відтворення профіля електронної концентрації іоносфери методом частотно-кутового зондування залежно від точності вимірювання кутів приходу пробних сигналів і похибки задання довжини траси поширення. Розроблено алгоритми діагностики іоносфери у випадку обмеженої кількості зондувальних частот, що ґрунтуються на поліноміальній апроксимації або шуканого профіля електронної концентрації, або частотної залежності кутів приходу пробних сигналів.

*Висновки:* Методом геометричної оптики в наближенні ізотропної плазми розв'язано обернену задачу похилого зондування плоскошаруватої іоносфери в інтегральній постановці. Вимірюваними параметрами є частотні залежності вертикальних кутів приходу ВЧ сигналів, що поширюються уздовж однострибкових радіотрас середньої довжини (до 1000 км). Показано, що для забезпечення точності відтворення профіля електронної концентрації, порівнюваної з характеристиками сучасних іонозондів, похибка вимірювання частотно-кутових характеристик пробних сигналів не повинна перевищувати 0.5° для трас довжиною 300 ÷ 1000 км.

Похибка метода, пов'язана з неточним знанням довжини траси поширення, визначається відносно похибкою її задання. Дана обставина дозволяє використовувати для частотно-кутового зондування іоносфери сигнали неспеціального виду, наприклад, випромінювання сучасних станцій ВЧ мовлення, які оснащені, як правило, кількома передавачами (а деякі й десятками), розташованими на площах розміром в одиниці кілометрів, та випромінюють одночасно на кількох несучих частотах. Для діагностичних трас довжиною в декілька сотень кілометрів можна вважати, що всі передавачі даного центра мовлення розташовані в одному місці. Похибка відтворення профіля електронної концентрації при цьому складатиме кілька десятків часток відсотка.

Для діагностики іоносфери у випадку обмеженої кількості зондувальних частот розроблено алгоритми відтворення висотного розподілу електронної концентрації на основі поліноміальних апроксимацій або шуканого профіля, або вимірюваної функції.

*Ключові слова:* іоносфера, профіль електронної концентрації, похиле зондування, кути приходу пробних сигналів, поліноміальна апроксимація

Статья поступила в редакцию 19.06.2019