

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra26.02.173>УДК 528.85:52-17:  
519.2:520.876**Ю. В. КОРНІЄНКО**, І. О. ДУЛОВА, Н. В. БОНДАРЕНКОІнститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України,  
вул. Акад. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна  
E-mail: irina.dulv@gmail.com

## УРАХУВАННЯ АЛЬТИМЕТРИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ РЕЛЬЄФУ ПОВЕРХНІ ПЛАНЕТИ МЕТОДОМ УДОСКОНАЛЕНОЇ ФОТОКЛИНОМЕТРІЇ ЗА ПОЛЕМ НАХИЛІВ

*Предмет і мета роботи: Досліджується можливість підвищення точності визначення рельєфу поверхні планети за допомогою методу вдосконаленої фотоклинометрії шляхом прив'язки шуканого рельєфу до альтиметричних даних. Запропоновано загальний підхід до розв'язання проблеми. Обговорюється використання альтиметрів, що мають як широкую, так і вузьку діаграму спрямованості, однак більш детально розглядається урахування даних альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості. Просторова роздільна здатність обчисленого рельєфу при використанні методу вдосконаленої фотоклинометрії відповідає просторовій роздільній здатності використовуваних зображень. Альтиметр дозволяє виконати абсолютну прив'язку висот поверхні та підвищує точність визначення рельєфу.*

*Методи і методологія: Робота базується на використанні методу вдосконаленої фотоклинометрії для визначення рельєфу ділянки поверхні планети за зображеннями. Цей метод є математично строгим і спирається на байєсівський статистичний підхід, що дозволяє визначити найбільш імовірний рельєф за наявними даними спостережень.*

*Результати: Запропоновано підхід до визначення оптимальної статистичної оцінки висот поверхні за зображеннями в рамках методу вдосконаленої фотоклинометрії та отримано вираз для оптимального фільтра, що переводить вихідні зображення і дані альтиметра з широкою діаграмою спрямованості в найбільш імовірний рельєф ділянки поверхні планети. Сформульовано метод прив'язки даних альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості. Виконано перевірку працездатності цього методу за допомогою комп'ютерного моделювання. Виконано відновлення рельєфу ділянки поверхні Місяця в Морі Доців за трьома зображеннями й даними лазерного альтиметра, отриманими космічним апаратом Lunar Reconnaissance Orbiter.*

*Висновки: Урахування даних альтиметра, що має вузьку діаграму спрямованості, підвищує точність визначення рельєфу. Використання даних, отриманих альтиметром з вузькою діаграмою спрямованості, слід надати перевагу порівняно з даними альтиметра з широкою діаграмою спрямованості. Показано, що урахування даних альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості істотно підвищує точність визначення висот порівняно з випадком використання виключно зображень та допомагає прискорити процедуру обчислень.*

*Ключові слова: рельєф поверхні планети, фотометрія, альтиметр, оптимальна фільтрація, статистична оцінка випадкової величини*

### 1. Вступ

Рельєф планети можна досліджувати з Землі або з орбіти як безпосередньо, за допомогою радіолокаційного або лазерного висотоміра, так і опосередковано, за розподілом яскравості на зображеннях (радіолокаційних або оптичних), отриманих при різних напрямках освітлення.

Альтиметричний метод за своєю суттю є послідовним, тому що в ньому відстані до елементів поверхні вимірюються послідовно одна за одною. У разі потреби побудувати карту рельєфу ділянки поверхні з високою роздільною здатністю апарат має виконати велику кількість прольотів над цією ділянкою (див., наприклад, [1–4]), що може зробити бажану роздільну здатність недосяжною.

Вихід зі становища міг би дати будь-який паралельний метод, початкову інформацію для

якого можна було б отримати за одну або кілька експозицій, наприклад, у вигляді зображень. Таким методом і є фотометричний метод, запропонований в [5], розвинений в [6], який часто називається фотоклинометричним. При цьому поняття “фотометрія” вживається в розширеному розумінні як вимір яскравості в будь-якому діапазоні довжин хвиль, не обов'язково в оптичному. Так, у роботі [7] розглядається визначення рельєфу поверхні за допомогою радіолокатора з синтезованою апертурою. Метод було випробувано на модельних [8] та реальних зображеннях [9].

Фотоклинометричний метод дозволяє отримати рельєф із точністю та роздільною здатністю, що властиві початковим зображенням. Це означає високу роздільну здатність, але не завжди достатню точність. З іншого боку, пряма альти-

метрія може дати високу точність, але має обмежені можливості щодо роздільної здатності.

Тому природним чином виникає питання про можливість об'єднання цих методів з тим, щоб скористатися кращими рисами кожного з них. Цьому й присвячено цю статтю.

## 2. Історія питання

До початку космічної ери 4 жовтня 1957 р. єдиним джерелом інформації про будову поверхні планети були астрономічні спостереження. Розглядаючи Місяць у телескоп у відповідній фазі, можна було легко побачити рельєф його поверхні. Однак визначити його кількісно, тобто знайти функцію  $H(x, y)$ , що визначає залежність висоти  $H$  поверхні від координат  $x, y$ , було проблемою, яку ще тільки належало розв'язати. У 1951 р. Ван Діггелен [10] запропонував свій метод: знайти рельєф як інтеграл від поля нахилів, яке можна визначити за яскравістю елементів на  $m$  зображеннях, отриманих при різних умовах освітлення, знаючи фотометричні властивості місячної поверхні [11].

Така можливість базується на тому, що яскравість елементарної ділянки на поверхні завдяки оптичним властивостям її матеріалу певним чином залежить від орієнтації цієї ділянки відносно спостерігача та джерела освітлення. Якщо ця залежність відома, існує можливість визначити нахил елемента поверхні за його яскравістю на декількох зображеннях, отриманих при різних умовах освітлення, шляхом розв'язання відповідного алгебраїчного рівняння для кожної точки досліджуваного району.

Задача визначення рельєфу, таким чином, зводилася до розв'язку диференціального рівняння

$$\nabla H(x, y) = \mathbf{t}(x, y), \quad (1)$$

де  $\mathbf{t}(x, y)$  – поле нахилів, знайдене з початкових знімків. Це рівняння елементарно розв'язується шляхом інтегрування поля нахилів по контуру, що веде з початку координат у точку  $(x, y)$ . Таким чином, задачу, здавалось би, було розв'язано. У цій задачі, однак, крилася некоректність, що знецінює отриманий результат.

Як відомо [12], ротор поля, що є градієнтом деякого скалярного поля, тотожно дорівнює нулю. Тому інтеграл від цього поля по контуру, що веде з точки  $A$  в точку  $B$ , не залежить від фор-

ми контуру, що забезпечує можливість коректно обчислити висоту в кожній точці досліджуваного району. Як і в багатьох інших обернених задачах, гармонія порушується у той момент, коли ми за праву частину рівняння беремо дані, отримані в результаті експерименту або спостереження. Похибка, що міститься в правій частині (1), порушує рівність ротора правої частини нулю. В результаті значення обчисленої висоти в точці  $B$  буде залежати від шляху інтегрування, і значення висоти стає неоднозначним. Рівняння (1) у цьому випадку (при випадковому шумі) з імовірністю 1 взагалі не має розв'язку.

Ідея фотоклинометрії у формі (1) широко використовувалася для визначення рельєфу ділянок поверхні планет (див., наприклад, [13–17]). Але щоразу треба було розробляти унікальні алгоритми для врахування особливостей конкретного матеріалу спостережень та методів виконання зйомки. Останнім часом традиційна фотоклинометрія (1) використовувалася в комбінації з фотogrammetрією (метод використання паралаксу, що обчислюється для окремих деталей поверхні при різних напрямках спостереження), зокрема, для визначення форми деяких малих тіл Сонячної системи (див., наприклад, [18–21]) та у дослідженні поверхні Місяця [22–24].

Розв'язок задачі визначення рельєфу за зображеннями з урахуванням похибок реальних вимірів було запропоновано в 1973 р. в роботі [5]. Замість задачі знайти (неіснуючий) розв'язок рівняння (1), було поставлено задачу знайти оптимальну статистичну оцінку для  $H(x, y)$  при заданому  $\mathbf{t}(x, y)$ .

Цей підхід було здійснено, розвинуто, досліджено і поширено на випадок, коли визначенню підлягає не тільки рельєф поверхні, але одночасно і її фотометричні параметри (альbedo тощо) [6]. Отриманий в результаті метод, названий методом удосконаленої фотоклинометрії, було успішно використано для визначення топографії деяких ділянок поверхні Марса за оптичними зображеннями [9].

Останнім часом прямі альтиметричні вимірювання поверхні планет, доступні широкій науковій громадськості, здійснюються в рамках тих самих космічних експериментів, що включають в себе отримання якісних зображень поверхні з високою роздільною здатністю та координатною прив'язкою. У зв'язку з цим на порядок денний

стало питання про поєднання переваг кожного з обговорюваних у цій статті методів (удосконаленої фотоклинометрії та альтиметрії). Цей новий підхід було розроблено в Інституті радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України і коротко викладено в [25]. Нижче його суть викладається більш детально.

### 3. Оптимальна статистична оцінка

Теорія оптимальних статистичних рішень сягає корінням у XVIII століття до часів Байєса [26], Лапласа [27], Гауса [28] і Лежандра [29]. Подальший сплеск її розвитку почався у середині 40-х років XX-го століття. Основні її положення зібрано у працях [30, 31]. Коротко, суть її полягає в тому, що за оптимальну статистичну оцінку випадкової величини  $X$  (не обов'язково скалярної), яка вимірюється в експерименті, береться таке її значення  $x$ , що мінімізує апостеріорне математичне сподівання  $\langle F(x, X_0) \rangle$  функції (функціоналу) втрат  $F(x, X_0)$ , де  $X_0$  – справжнє (але невідоме) значення величини  $X$ . Функція втрат  $F$  визначає величину збитку, який ми зазнаємо в разі, коли справжнє значення  $X$  дорівнює  $X_0$ , а її оцінка дорівнює  $x$ . Таким чином, приймаючи за значення величини  $X$  таке значення  $x$ , ми зменшуємо до можливого мінімуму збиток, якого ми зазнаємо при великій серії спостережень від неточного визначення  $X$ .

Вид функції втрат не визначається цією теорією, є зовнішньою інформацією по відношенню до неї і задається в кожній конкретній задачі окремо. Зазвичай, якщо немає причин вчинити інакше, її приймають рівною

$$F(x, X_0) = (x - X_0)^2. \quad (2)$$

На користь такого вибору промовляє ціла низка фізичних і просто практичних міркувань.

Нескладні викладки показують, що визначена таким чином оптимальна оцінка значення величини  $X$  дорівнює апостеріорному математичному сподіванню  $\langle X \rangle_{\text{apo}}$  величини  $X$ . Іноді за оптимальну оцінку беруть найімовірніше значення  $x$ , тобто таке значення  $x$ , при якому густина апостеріорного розподілу  $x$  досягає максимуму. Якщо за функцію втрат беруть функцію (2), при нормальному розподілі похибки ці дві оцінки збігаються.

Статистична оцінка базується на формулі Байєса, яка зв'язує апостеріорну густину ймовірності  $\rho_{\text{apo}}(x)$  з апіорною густиною  $\rho_{\text{apr}}(x)$  через умовну густину ймовірності  $\rho(Y|x)$  отримати в експерименті з вимірювання  $X$  результат  $Y$  за умови, що вимірювана величина  $X$  має значення  $x$ ,

$$\rho_{\text{apo}}(x) = \rho_{\text{apr}}(x) \cdot \rho(Y|x) / N, \quad (3)$$

де  $N$  – нормуючий множник, вид якого в даному контексті є несуттєвим.

### 4. Оптимальна оцінка рельєфу поверхні

Стосовно рельєфу те, що сказано, означає ось що. Нехай рельєф деякого району поверхні планети, освітленого Сонцем, описується функцією  $H(x, y)$ . У результаті спостережень цього району отримано  $m$  знімків. За яскравістю поверхні на цих знімках можна знайти поле нахилів  $\mathbf{t}(x, y)$ . Оскільки яскравість на цих знімках визначається з деякою похибкою, те ж саме можна сказати і про поле нахилів. Тому рівняння (1) тепер слід записати у вигляді

$$\nabla H(x, y) = \mathbf{t}(x, y) + \delta(x, y), \quad (4)$$

де  $\mathbf{t}(x, y)$  – поле нахилів, знайдене з початкових зображень, яке містить похибки вимірювання, а  $\delta(x, y)$  – (невідома) випадкова похибка поля нахилів. Як зазначалося вище, ротор похибки  $\delta(x, y)$  відрізняється від нуля, і це призводить до того, що розв'язок рівняння (4) не існує. Тому, замість задачі розв'язати це рівняння, ми будемо ставити задачу знайти оптимальну статистичну оцінку рельєфу  $H(x, y)$ , виходячи з рівняння (4). Для цього треба, щоб було задано апіорну статистику для рельєфу і похибки. Цю вимогу ми виконаємо, вважаючи, що  $H(x, y)$  і  $\delta(x, y)$  є реалізаціями стаціонарних гаусівських процесів із заданими спектральними густинами  $I_H(k_x, k_y)$  і  $I_\delta(k_x, k_y)$ . Тут  $k_x$  і  $k_y$  – компоненти вектора просторової частоти  $\mathbf{k}$ .

Оскільки для стаціонарного гаусівського процесу фур'є-компоненти розподілені незалежно одна від одної та нормально, квазігустина їх розподілу [32] (межа густини розподілу в скінченновимірному функціональному просторі, коли вимірність простору наближається до нескінченності) має вигляд

$$\rho_{\tilde{H}}(\tilde{H}) = \exp\left(-\int \frac{|\tilde{H}(k_x, k_y)|^2}{I_H(k_x, k_y)} dk_x dk_y\right),$$

$$\rho_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}) = \exp\left(-\int \frac{|\tilde{\delta}(k_x, k_y)|^2}{I_{\delta}(k_x, k_y)} dk_x dk_y\right),$$

де  $\tilde{H}$  і  $\tilde{\delta}$  – фур'є-образи функцій  $H(x, y)$  і  $\delta(x, y)$ .

Звідси та з (3) для апостеріорної густини ймовірності рельєфу  $H(x, y)$  при відомому  $\mathbf{t}(x, y)$  у правій частині (4) одержимо

$$\ln \rho(\tilde{\mathbf{t}} | \tilde{H}) = -\int \frac{|\tilde{H}(k_x, k_y)|^2}{I_H(k_x, k_y)} dk_x dk_y - \int \frac{|i\mathbf{k}\tilde{H}(k_x, k_y) - \tilde{\mathbf{t}}(k_x, k_y)|^2}{I_{\delta}(k_x, k_y)} dk_x dk_y. \quad (5)$$

Розглянемо найпростіший випадок, коли спектральна щільність похибки  $\tilde{\delta}$  постійна на всій частотній площині, а апіорна спектральна щільність рельєфу досить велика, щоб у (5) першим доданком порівняно з другим можна було знехтувати. (Це означає, що ми нехтуємо апіорними відомостями про статистику рельєфу.) Тоді (5) набуває вигляду

$$\ln \rho(\tilde{\mathbf{t}} | \tilde{H}) = -\frac{1}{I_{\delta}} \int |i\mathbf{k}\tilde{H}(k_x, k_y) - \tilde{\mathbf{t}}(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y,$$

або в координатному представленні

$$\ln \rho(\mathbf{t} | H) = -\frac{1}{I_{\delta}} \int [\nabla H(x, y) - \mathbf{t}(x, y)]^2 dx dy. \quad (6)$$

Статистична задача знайти максимум  $\rho_{\text{аро}}(H(x, y))$  зводиться до варіаційної задачі знайти рельєф  $H(x, y)$ , що забезпечує мінімум інтеграла в (6). Тепер, щоб одержати рівняння для шуканого рельєфу, треба варіаційну похідну функціонала

$$F(H) = \int [\nabla H(x, y) - \mathbf{t}(x, y)]^2 dx dy \quad (7)$$

по  $H(x, y)$  прирівняти до нуля, що приводить до рівняння Пуассона

$$\Delta H(x, y) = \text{div } \mathbf{t}(x, y). \quad (8)$$

Чисто формально цей результат можна одержати, просто взявши дивергенцію від обох частин рівняння (1). Задача розв'язку цього рівняння коректна, оскільки вихрова складова похибки поля нахилів тепер не впливає на результат: її дивергенція дорівнює нулю.

## 5. Граничні умови

Розв'язок варіаційної задачі, крім рівняння (8), дає ще й гранична умова для  $H(x, y)$  на межі досліджуваного району  $C$ . Видаються природними такі два випадки.

1. На межі району відомий рельєф  $h(x, y)$ . Тоді ми маємо граничну умову Коші:

$$H(x, y)|_C = h(x, y).$$

Цей випадок має більш академічний характер, тому що на практиці зустрічається рідко. Типовішим є інший випадок.

2. Жодних додаткових відомостей про рельєф району немає. У цьому разі з умови мінімуму функціонала (7) впливає гранична умова Неймана

$$\nabla H(x, y)|_C = \mathbf{t}_n(x, y)$$

на межі  $C$ .

## 6. Можливість підвищення точності шляхом урахування альтиметричних даних

Як уже було сказано в п. 2, для підвищення точності визначення рельєфу слід поєднувати переваги альтиметрії та методу вдосконаленої фотоклінометрії, сукупно обробляючи при визначенні рельєфу фотометричні і альтиметричні дані. При цьому з усіх можливих ситуацій можна виділити два найбільш типових і в деякому розумінні протилежних випадки.

Випадок 1: діаграма спрямованості локатора може бути широкою. Результат альтиметрії покриває увесь досліджуваний район, має форму радіолокаційного зображення і характеризується функцією  $h(x, y)$ . При цьому, однак, просторова

роздільна здатність на такому зображенні зазвичай буває невисокою з технічних причин, пов'язаних з обсягом роботи щодо його отримання. Роздільна здатність, з якою буде отримано за такими даними рельєф, буде визначатися роздільною здатністю основних (фотометричних) зображень, за якими буде визначатися поле нахилів.

Випадок 2: діаграма спрямованості локатора може бути досить вузькою, наприклад, при використанні лазерного альтиметра. Результат альтиметрії буде поданий набором із невеликого числа вимірювань в окремих точках. Це дає можливість знати  $H(x, y)$  у точно відомому місці з високою точністю, проте це буде не рельєф  $H(x, y)$ , а лише набір вимірювань висоти в окремих (зазвичай нечисленних) точках.

## 7. Випадок альтиметра з широкою діаграмою спрямованості

Варіант використання таких вимірів висот, включаючи результати комп'ютерного моделювання, детально обговорюється в [33]. Нижче надається короткий виклад основних ідей і отриманих в [33] результатів.

Нехай діаграма спрямованості альтиметра характеризується функцією  $D(x, y)$ . Тоді отримане ним зображення рельєфу  $h(x, y)$  є згортою справжнього рельєфу  $H(x, y)$  із діаграмою спрямованості локатора. При цьому  $h(x, y)$  збурене похибкою вимірювання відстані  $\varepsilon(x, y)$ , і в результаті зв'язок між  $H(x, y)$  і  $h(x, y)$  набирає вигляду

$$h(x, y) = \int D(x-x', y-y')H(x', y')dx'dy' + \varepsilon(x, y). \quad (9)$$

У частотному представленні рівність (9) виглядає як

$$\tilde{h}(k_x, k_y) = \tilde{D}(k_x, k_y)\tilde{H}(k_x, k_y) + \tilde{\varepsilon}(k_x, k_y). \quad (10)$$

Оскільки для стаціонарного гаусівського процесу фур'є-компоненти розподілені незалежно, задачу визначення найбільш імовірного рельєфу виходячи з формули Байєса (3) та рівності (10) можна розв'язувати для кожної фур'є-компоненти окремо. Якщо маємо тільки альтиметричні зображення (10), то задача визначення найбільш імовірного рельєфу зводиться до мінімізації виразу

$$q(k_x, k_y) = \left| \tilde{h}(k_x, k_y) - \tilde{D}(k_x, k_y)\tilde{H}(k_x, k_y) \right|^2 \quad (11)$$

для кожної з компонент  $(k_x, k_y)$  окремо. У цьому випадку оптимальною статистичною оцінкою  $\tilde{H}(k_x, k_y)$  буде

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(k_x, k_y) &= \\ &= \frac{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{h}(k_x, k_y)}{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{D}(k_x, k_y) + I_\varepsilon(k_x, k_y)/I_H(k_x, k_y)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Одержаний вираз є двовимірним аналогом класичного вінерівського фільтра.

Коли ж задано альтиметричне зображення  $h(x, y)$  та поле нахилів  $\mathbf{t}(x, y)$ , обчислене за зображеннями, то мінімізації підлягає вираз

$$q(k_x, k_y) = \left| \tilde{h}(k_x, k_y) - \tilde{D}(k_x, k_y)\tilde{H}(k_x, k_y) \right|^2 + \left| \tilde{\mathbf{t}}(k_x, k_y) - i\mathbf{k}\tilde{H}(k_x, k_y) \right|^2.$$

Він досягає мінімуму при

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(k_x, k_y) &= \left( \frac{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{h}(k_x, k_y)}{I_\varepsilon(k_x, k_y)} - \frac{i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{t}}(k_x, k_y)}{I_\delta(k_x, k_y)} \right) \times \\ &\times \left( \frac{1}{I_H(k_x, k_y)} + \frac{\tilde{D}^*(k_x, k_y)\tilde{D}(k_x, k_y)}{I_\varepsilon(k_x, k_y)} + \frac{\mathbf{k}^2}{I_\delta(k_x, k_y)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Шуканий найбільш імовірний рельєф  $H_0(x, y)$  можна одержати з (12) або (13) зворотним перетворенням Фур'є. Таким чином, ми отримуємо рельєф  $H(x, y)$  з такою ж високою роздільною здатністю, з якою нам відоме поле нахилів  $\mathbf{t}(x, y)$ , та приблизно з тією ж точністю, з якою виконується альтиметрична зйомка району.

## 8. Випадок альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості

Цей випадок відрізняється від попереднього (п. 7) тим, що альтиметричні дані надаються невеликим числом  $p$  відліків  $h_1, h_2, \dots, h_p$  в точ-

ках поверхні  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$  та покривають лише незначну частину площі району. Тому підхід, прийнятий в п. 7, навіть у найпростішому випадку, коли спектральні щільності  $I_\delta(k_x, k_y)$  та  $I_\epsilon(k_x, k_y)$  є константами, призводить тепер до більш складного математичного формалізму. Повторюючи всі попередні міркування, отримуємо, що за аналогією з (7) та (11) мінімізації підлягає функціонал

$$F(H) = \int [t(x, y) - \nabla H(x, y)]^2 dx dy + \sum_{i=1}^p \left[ h_i - \int D(x - x_i, y - y_i) H(x, y) dx dy \right]^2. \quad (14)$$

Умова рівності нулю варіаційної похідної від цього функціоналу за  $H$ , як і раніше, дає нам рівняння для найбільш імовірного рельєфу, проте тепер це рівняння буде інтегродиференціальним, і ми зустрінемося з певними складнощами при його розв'язанні.

Замість цього ми підемо іншим, більш простим, шляхом. Будемо вважати похибку вимірювання висоти альтиметром та ширину його діаграми спрямованості настільки малими, що ними можна знехтувати. Це зазвичай має місце для якісного лазерного альтиметра.

Тоді треба буде мінімізувати лише перший доданок в (14), що приведе до рівняння Пуассона (8), проте рівність нулю другого доданка в (14) дасть додаткову умову, що накладається на розв'язок рівняння (8). Незважаючи на всю проблематичність цієї вимоги при аналітичному розгляді задачі, при числовому розв'язку його виконати дуже просто. Для цього при розв'язанні рівняння (8) методом кінцевих різниць треба просто доповнити задану програмі множину граничних точок точками  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , в яких виконувалися альтиметричні вимірювання, і задати в них умову Коші

$$H(x_i, y_i) = h_i.$$

Перевірка ефективності цього прийому на практиці при визначенні рельєфу за модельними зображеннями та альтиметричними даними дала добрі результати, як це описано в наступному параграфі.

## 9. Перевірка методу при малій кількості вимірювань альтиметра. Обговорення результатів

Для перевірки ефективності методу у такій постановці задачі було використано систему комп'ютерного моделювання, коротко описану в [34].

Комп'ютерну модель рельєфу, яка використовувалася в експериментах, показано на рис. 1. Цей рельєф являє собою поверхню, модифіковану кратерами. Такий тип ландшафту часто зустрічається на планетах земної групи. Середнє значення висоти тестового рельєфу прийнято рівним нулю, а самі висоти змінюються в межах від  $-2.86\sigma_0$  до  $2.49$ , де  $\sigma_0$  – середньоквадратичне відхилення висот. Тут ми використовуємо середньоквадратичне відхилення висот у межах досліджуваної ділянки з тієї причини, що в подальшому при обробці будь-яких реальних знімків це дозволить оцінити похибки обчислень і не бути прив'язаним до масштабу рельєфу в комп'ютерній моделі.

У цій роботі оброблялися пари зображень зі взаємно перпендикулярними напрямками освітлення і значеннями відношення сигнал/шум ВСП<sub>1</sub>, які дорівнюють 1, 10, 50 і 100. Приклад пари початкових зображень з ВСП<sub>1</sub> = 10 показано на рис. 2. Більш світлі тони на рис. 2 відповідають більшій яскравості зображень. Напрямки

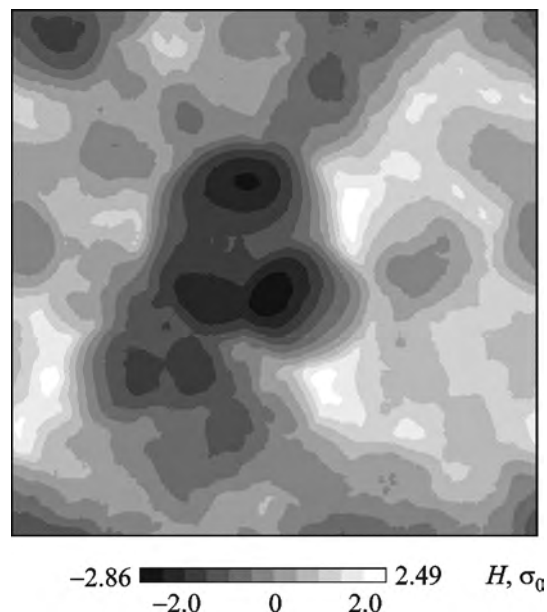
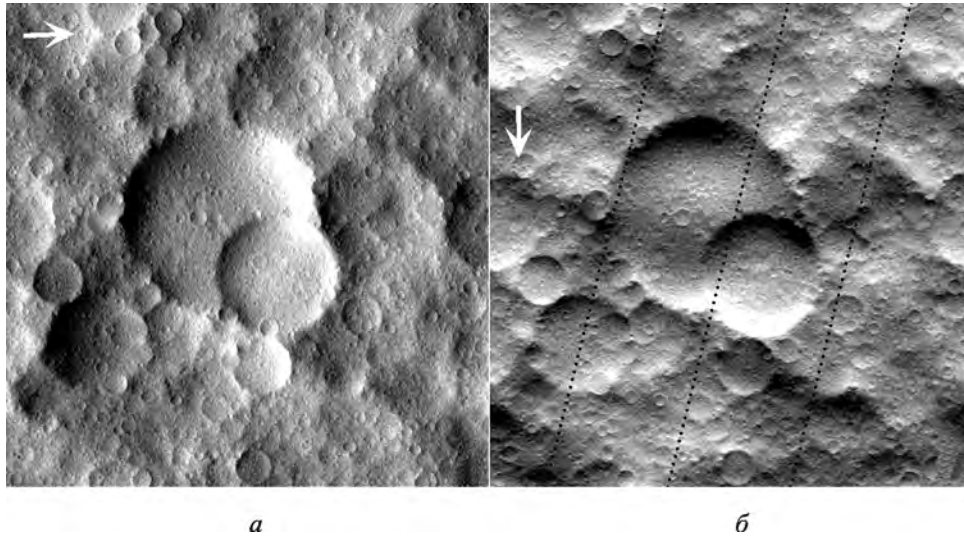


Рис. 1. Початкові дані для тестових експериментів: комп'ютерна модель рельєфу ділянки поверхні (більш світлі ділянки відповідають більшій висоті)



**Рис. 2.** Початкові дані для тестових експериментів: одна з пар початкових зображень ( $ВСШ_1 = 10$ ). Напрямки освітлення поверхні показано білими стрілками, точками (б) позначено положення вимірювань альтиметра

освітлення поверхні показано білими стрілками. Положення місць вимірювань альтиметра на ділянці поверхні позначено точками на рис. 2, б.

У табл. 1 показано похибку визначення висот (що обчислювалася як модуль різниці висот відновленого і тестового рельєфу) для різних значень  $ВСШ_1$ . Розглядалися варіанти визначення рельєфу з урахуванням вимірів альтиметра (варіант А) і тільки за зображеннями (варіант Б). Похибка надається в перерахунку по відношенню до середньоквадратичного відхилення  $\sigma_0$  висот моделі рельєфу.

Згідно табл. 1, при відновленні рельєфу методом удосконаленої фотоклинометрії тільки за зображеннями (без урахування вимірювань

альтиметра, варіант Б) для значень  $ВСШ_1 \geq 10$  похибки визначення висот поверхні складають приблизно  $(0.01 \div 0.03)\sigma_0$ . Видно, що поліпшення якості зображень уже само собою дозволяє зменшити похибки визначення висот поверхні. Урахування даних альтиметра (див. табл. 1, варіант А) дозволило поліпшити точність визначення рельєфу приблизно в  $1.5 \div 2$  рази. Очевидно, що при зростанні числа вимірів альтиметра похибки визначення рельєфу будуть зменшуватися.

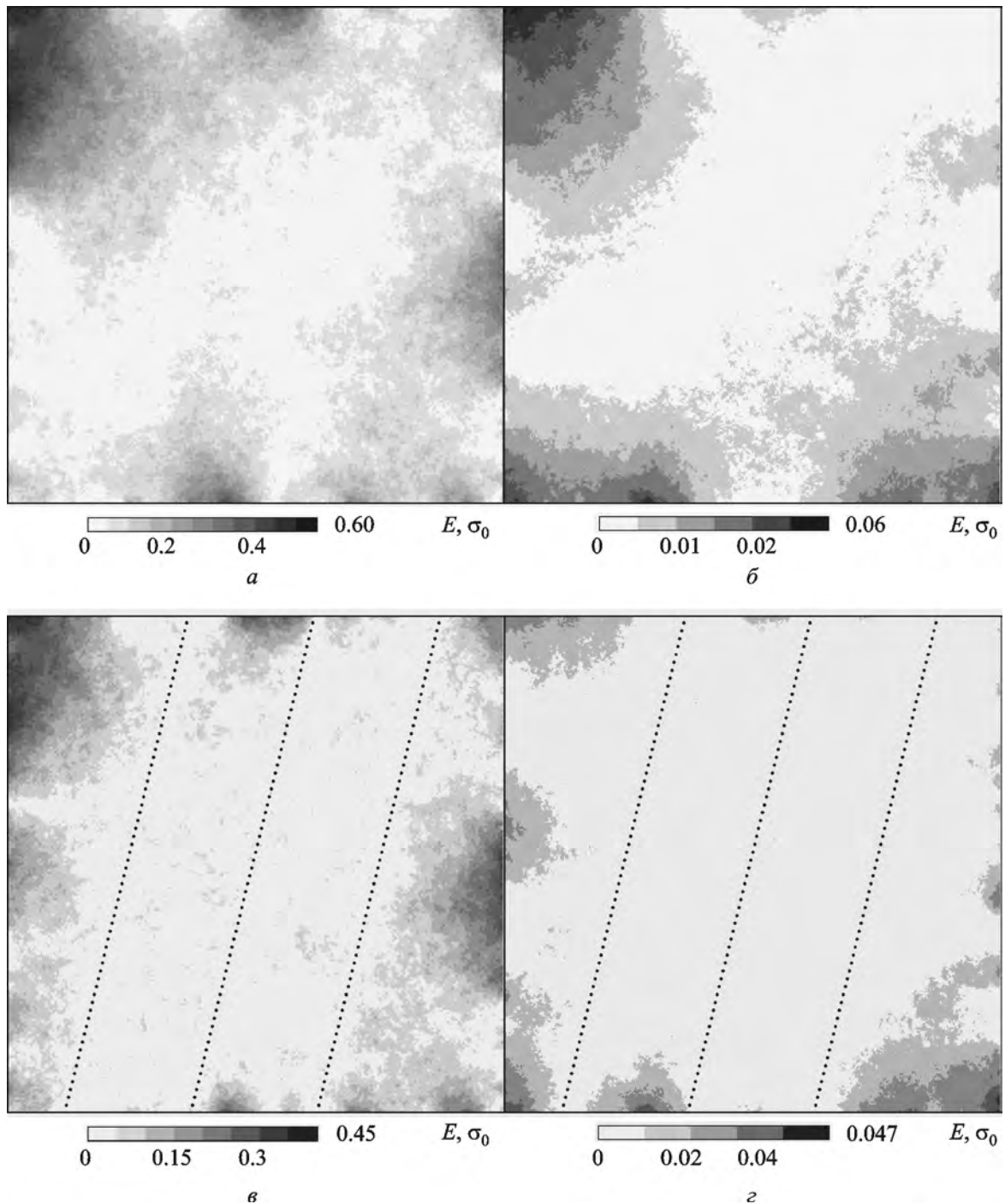
У табл. 1, крім того, для порівняння наведені дані про похибки визначення висот з урахуванням даних альтиметра з широкою діаграмою спрямованості (з табл. 1 в [33]). Видно, що використання вимірювань альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості приводить до точнішого відновлення рельєфу порівняно з урахуванням даних альтиметра з широкою діаграмою спрямованості практично для всіх значень  $ВСШ_1$ . І тільки при початкових зображеннях з високим рівнем шуму ( $ВСШ_1 \approx 1$ ) якісні виміри альтиметра з широкою діаграмою спрямованості (відношення сигнал/шум альтиметра  $ВСШ_1 \geq 100$ , варіант Г табл. 1) можуть привести до точніших результатів відновлення рельєфу.

На рис. 3 показано карту модуля похибки для варіантів визначення рельєфу тільки за зображеннями (рис. 3, а, б) та з урахуванням вимірів альтиметра (рис. 3, в, г).

З рис. 3, а та рис. 3, б добре видно, що найбільші похибки розташовані на краях ділянки

**Таблиця 1.** Середньоквадратичне значення похибки обчислення висот поверхні ( $\sigma_0$ ) за тестовими зображеннями: з урахуванням (варіант А) і без урахування (варіант Б) даних альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості; з урахуванням даних альтиметра з широкою діаграмою спрямованості (дані взято з [33]) при  $ВСШ_A = 10$  (варіант В) та  $ВСШ_A = 100$  (варіант Г)

Варіант	$ВСШ_1$			
	1	10	50	100
А	0.075	0.019	0.008	0.007
Б	0.106	0.030	0.013	0.016
В ( $ВСШ_A = 10$ )	0.081	0.032	–	0.013
Г ( $ВСШ_A = 100$ )	0.070	0.028	–	0.010



**Рис. 3.** Карта модуля похибки визначення висот методом удосконаленої фотоклінометрії: тільки за зображеннями (*a* – ВСПШ<sub>1</sub> = 1, *б* – ВСПШ<sub>1</sub> = 100) і з урахуванням вимірів альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості (*в* – ВСПШ<sub>1</sub> = 1, *г* – ВСПШ<sub>1</sub> = 100). Положення вимірювань альтиметра позначені точками

і їх вплив може поширюватися досить далеко. Це пов'язано з урахуванням граничної умови Неймана при реалізації обчислень за допомогою методу кінцевих різниць.

Порівнюючи рис. 3, *a*, *б* з рис. 3, *в*, *г* можемо побачити, що похибки визначення рельєфу тіль-

ки за зображеннями і з урахуванням вимірів альтиметра досить істотно різняться. Урахування даних альтиметра дозволяє зменшити похибки не тільки в середині ділянки, а й поблизу меж. Таким чином, наявність даних альтиметра поблизу межі оброблюваної ділянки дозволяє іс-



точно доповнити нестачу знань про рельєф на межі. Крім цього, урахування даних альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості дозволяє поліпшити точність визначення великомасштабних деталей поверхні (рис. 3, в, з).

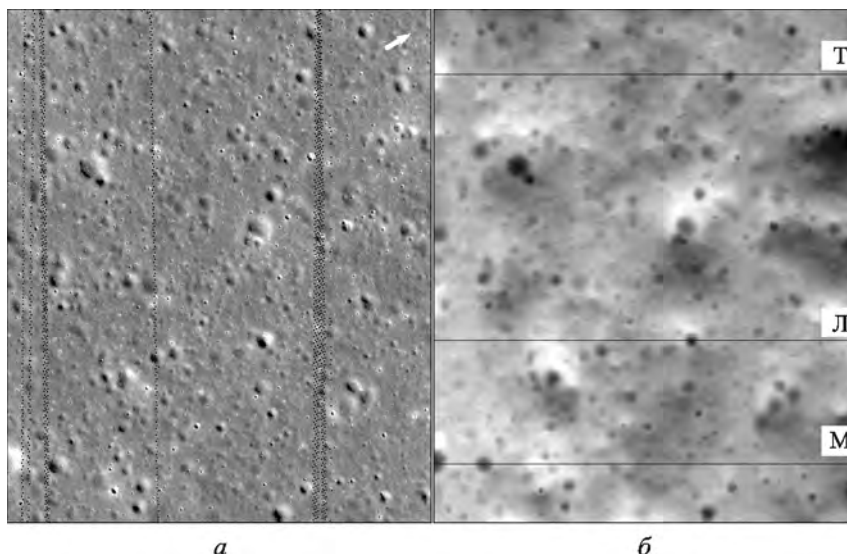
Дані альтиметра, що використовуються тут при відновленні топографії за тестовими зображеннями моделі рельєфу, надаються у вигляді регулярних вимірювань вздовж трьох прольотів космічного апарата (КА), рівновіддалених один від одного. Проте відомо, що реальний альтиметр не дасть рівномірного покриття на поверхні досліджуваної ділянки: орбіти КА можуть бути розташовані на різних відстанях одна від одної, або навіть перетинатися. Самі вимірювання можуть виконуватися з пропусками (з технічних причин) або можуть відбраковуватися внаслідок контролю якості.

Рельєф ділянки поверхні за серією її зображень можна відновити і без альтиметричних даних взагалі (див., наприклад, [5, 6]). Будь-яка додаткова інформація про рельєф, а в нашому разі – будь-яке число використаних даних альтиметра, буде корисною. Наприклад, якщо використано тільки один вимір альтиметра, то це дозволить отримати абсолютні значення висоти, а не тільки розподіл висот щодо середньої поверхні

досліджуваної ділянки. Якщо використовувати більшу кількість вимірів альтиметра, то стане можливим, крім того, вибрати найбільш прийнятну фотометричну функцію для конкретної ділянки поверхні. Очевидно, що чим більше доступних вимірів альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості для розглянутої ділянки, тим точнішим буде відновлення.

## 10. Визначення висот поверхні Місяця

Рельєф визначався для ділянки  $4.5 \times 3.7$  км, розташованої в Морі Дощів, центр якої має координати  $32.48^\circ$ ,  $340.12^\circ$ . Для обробки використовувалося три зображення, які являють собою фрагменти знімків M183661434LE, M186020337RE та M188379229LE [35], отриманих камерою з високою роздільною здатністю КА LRO (Lunar Reconnaissance Orbiter) [36]. Азимути Сонця  $A_C$  на цих знімках відповідно складають  $35.19^\circ$  (рис. 4, а),  $72.87^\circ$  та  $122.99^\circ$ . Напрямок освітлення на рис. 4, а показано білою стрілкою. Різниця азимутів Сонця першого і третього зображень складає  $92.2^\circ$ , що є оптимальним для визначення рельєфу методом удосконаленої фотоклинометрії. Кути падіння випромінювання (освітлення)  $\theta$  змінюються в межах  $32^\circ \div 46^\circ$ , а роздільна здатність знімків – в межах



**Рис. 4.** Ділянка місячної поверхні розміром  $4.5 \times 3.7$  км: а – частина знімка M183661434LE,  $A_C = 35.19^\circ$ ,  $\theta = 46.52^\circ$ , ВСШ = 64, роздільна здатність – 5.23 м/піксель, точками позначено положення вимірювань альтиметра; напрямком освітлення поверхні показано білою стрілкою; б – рельєф ділянки поверхні, обчислений методом удосконаленої фотоклинометрії з урахуванням вимірів альтиметра, відносно еквіпотенційної поверхні з радіусом 1735.214 км, чорними лініями показано положення профілів Т, Л і М

0.75 ÷ 1.48 м/піксель. Знімки мають хорошу якість, їх відношення сигнал/шум становить 37 ÷ 64.

Знімки було суміщено і зведено до роздільної здатності 5.23 м/піксель для того, щоб розмір елемента зображень відповідав діаметру відгуку окремого лазера альтиметра LOLA (Lunar Orbiter Laser Altimeter), що входить у комплект наукових приладів КА LRO [37]. Альтиметр LOLA містить п'ять лазерів, що дозволяють вимірювати висоту поверхні в точках, розташованих в межах 25 м один від одного з кроком приблизно 57 м вздовж орбіти [37]. Вимірювання альтиметра, які було використано у обчисленні рельєфу, показано чорними точками на рис. 4, а.

Припускалося, що альbedo  $A$  поверхні змінюється в межах зображення, і яскравість  $I$  елемента зображення з координатами  $(x, y)$  можна задати у вигляді

$$I(x, y) = A(x, y)\Phi(\theta),$$

де  $\Phi(\theta)$  – фотометрична функція поверхні, яка залежить тільки від кута освітлення і відповідає закону Ламберта  $\Phi(\theta) = \cos \theta$ . Значення  $A$  для кожного елемента поверхні обчислювалось за елементами трьох вихідних зображень як

$$A(x, y) = \frac{1}{3} \sum_k I_k(x, y) / \cos \theta_k,$$

де  $k$  – номер зображення. Виявилось, що обчислені таким чином значення альbedo змінюються в межах 3.18 ÷ 8.28 %, його середнє значення дорівнює 4.2 %.

Визначення рельєфу виконувалося методом удосконаленої фотоклинометрії, реалізованим на базі методу кінцевих різниць. Обчислення було зупинено, коли середньоквадратична зміна висоти  $\sigma_{\Delta H}$  між двома послідовними ітераціями виявилася меншою 0.87 мм, що було досягнуто після 10000 ітерацій. Значення  $\sigma_{\Delta H}$  у залежності від числа ітерацій у обчисленні рельєфу без та з урахуванням даних альтиметра наведені в табл. 2. Добре видно, що урахування вимірювань альтиметра спричиняє відчутний вплив на процес відновлення рельєфу на початкових ітераціях, а згодом дозволяє поліпшити точність результату.

Середньоквадратичне відхилення висот результуючого рельєфу становить 25.88 м для варіанта Д та 21.61 м для варіанта Е. Таким чином, середня похибка обчислених висот з урахуван-

Таблиця 2. Середньоквадратична зміна висоти  $\sigma_{\Delta H}$  (в сантиметрах) між двома послідовними ітераціями з урахуванням (варіант Д) і без урахування (варіант Е) даних альтиметра LOLA KA LRO, який має вузьку діаграму спрямованості

Варіант	Число ітерацій			
	50	100	1000	10000
Д	6.17	2.89	0.480	0.087
Е	5.24	2.74	0.513	0.155

ням даних табл. 1 дорівнює  $\approx 0.20$  м для варіанта Д та  $\approx 0.28$  м для варіанта Е. Видно, що урахування даних альтиметра зменшило похибку обчислень.

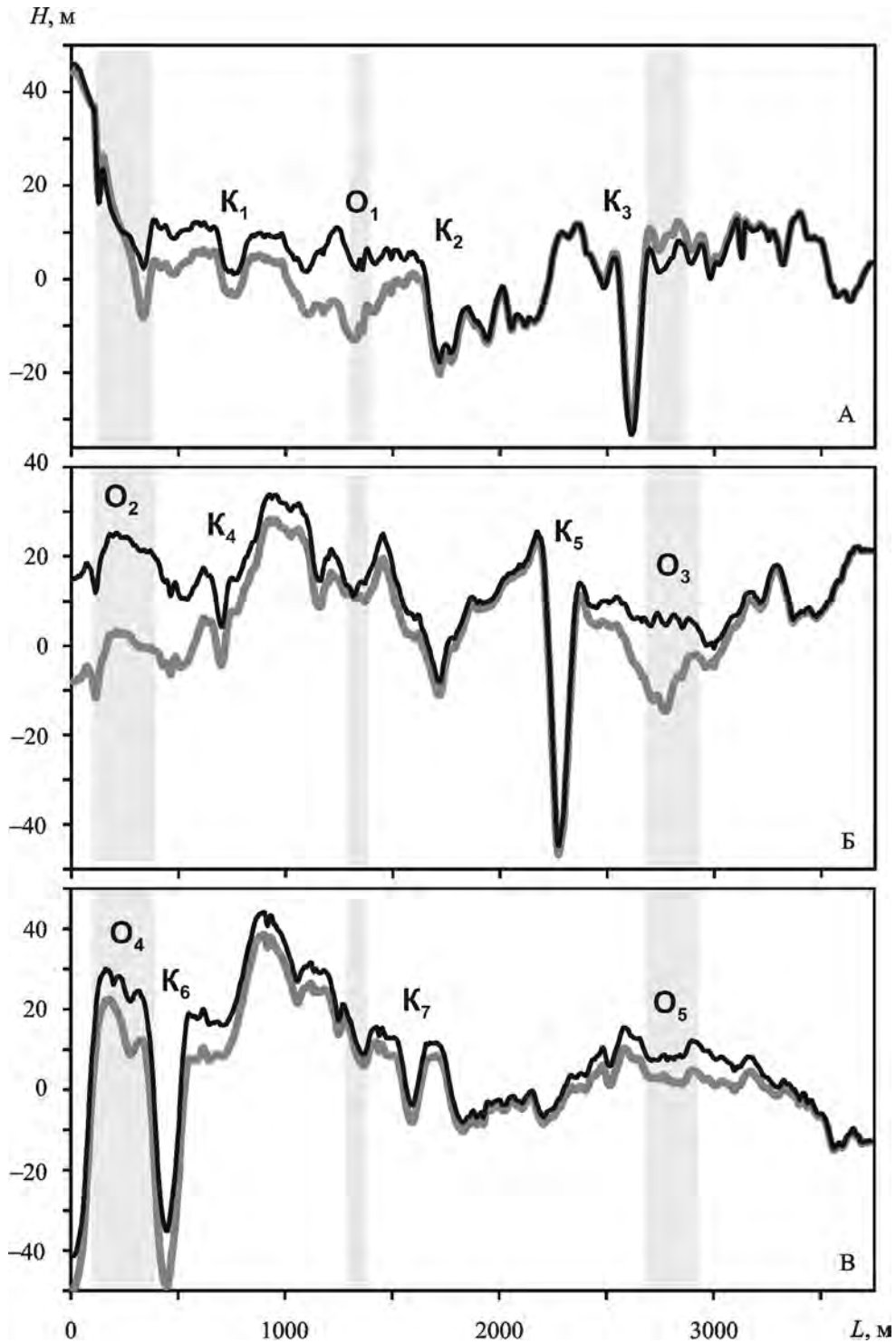
Топографічні профілі уздовж ліній Т, Л та М (рис. 4, б) відновленого рельєфу, обчисленого без (сірі товсті лінії) і з урахуванням (чорні лінії) даних альтиметра показано на рис. 5. Як видно з рис. 5, відносні значення висот  $H$  змінюються в межах  $\pm 45$  м. Нульова висота знаходиться на еквіпотенційній поверхні з радіусом 1735.214 км. Відстань  $L$  уздовж профілю відраховується в напрямку захід–схід (зліва направо на рис. 4, б). Світло-сірі прямокутники на рис. 5 – це області розташування вимірювань альтиметра.

Порівняння топографічних профілів на рис. 5 показує, що використання даних альтиметра дозволяє контролювати великомасштабні зміни висот. Відмінності у рельєфі для випадку його визначення без урахування даних альтиметра (див. ділянки  $O_1 - O_5$ ) спричинені, найімовірніше, браком відомостей про фотометричну функцію поверхні в досліджуваному районі. Таким чином, використання альтиметра дозволяє зменшити похибки у обчисленні висот через неточності в завданні фотометричної функції.

Варіації висот на дрібних масштабах для кожного з двох варіантів відновлення рельєфу виявилися схожими. Глибини кратерів  $K_1 - K_7$  виявляються подібними в цих двох випадках. Зміна висоти навколишньої поверхні не впливає на сам профіль кратера (див., наприклад, кратери  $K_1, K_4, K_6$  та  $K_7$  на рис. 5).

## 11. Висновки

Метод удосконаленої фотоклинометрії для визначення рельєфу поверхні за зображеннями базується на статистичному підході та є математич-



**Рис. 5.** Зміна висоти  $H$  відновленого рельєфу (відносно еквіпотенційної поверхні з радіусом 1735.214 км) уздовж профілів Т, Л та М (рис. 4, б). Рельєф, обчислений без та з урахуванням даних альтиметра, показано відповідно сірими товстими і чорними лініями. Світло-сірими прямокутниками позначено області розташування вимірювань альтиметра,  $K_1 - K_7$  позначають кратери, а  $O_1 - O_5$  – місця явних відмінностей висот, спричинених урахуванням даних альтиметра

но строгим. Він дозволяє визначити найбільш імовірні значення висот поверхні за наявними знімками. При цьому роздільна здатність обчислено-

го рельєфу відповідає роздільній здатності вихідних зображень і, здебільшого, значно вища від того, що можна отримати з альтиметричних даних.

Урахування даних альтиметра, що має вузьку діаграму спрямованості, підвищує точність визначення рельєфу. В експериментах з використанням комп'ютерної моделі рельєфу при спільному використанні зображень і даних альтиметра похибка визначення висоти поверхні виявилася приблизно в  $1.5 \div 2$  рази меншою порівняно з випадком використання виключно зображень.

Використання вимірювань альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості виявляється кращим порівняно з урахуванням даних альтиметра з широкою діаграмою спрямованості, оскільки дозволяє отримати більш високу точність у обчисленні висот поверхні практично для всіх значень відношення сигнал/шум вихідних зображень.

Запропонована в цій статті реалізація методу вдосконаленої фотоклинометрії, орієнтована на урахування даних вимірювань альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості, базується на використанні методу кінцевих різниць. Варто зазначити, що використання цього методу вимагає значно більшого часу для обчислень порівняно з використанням перетворення Фур'є, як це було у випадку альтиметра з широкою діаграмою спрямованості [33]. Але урахування даних альтиметра з вузькою діаграмою спрямованості вже саме собою дозволяє істотно прискорити процедуру обчислень за рахунок зниження числа ітерацій, необхідних для досягнення необхідної точності.

Досвід застосування методу вдосконаленої фотоклинометрії для відновлення рельєфу місячної поверхні за трьома зображеннями, отриманими камерою з високою роздільною здатністю КА LRO, дозволяє зробити висновок щодо можливості отримання адекватних результатів при обробці реальних даних сучасних космічних місій. Крім того, використання даних альтиметра дозволяє контролювати великомасштабні зміни висот, зменшити похибки через неточності в завданні фотометричної функції (яка рідко буває досить точно відомою для поверхонь реальних космічних тіл) та прискорити збіжність самого процесу обчислень.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Pettengill G. H., Eliason E., Ford P. G., Lorient G. B., Masursky H., and McGill G. E. Pioneer Venus Radar Results: Altimetry and Surface Properties. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 1980. Vol. 85, Is. A13. P. 8261–8270. DOI: 10.1029/JA085iA13p08261
2. Smith D. E., Zuber M. T., Neumann G. A., and Lemoine F. G. Topography of the Moon from the Clementine Lidar. *J. Geophys. Res. Planet.* 1997. Vol. 102, Is. E1. P. 1591–1611. DOI: 10.1029/96JE02940
3. Thomas N., Hussmann H., Spohn T., Lara L. M., Christensen U., Affolter M., Bandy T., Beck T., Chakraborty S., Geissbuehler U., Gerber M., Ghose K., Gouman J., HosseiniArani S., Kuske K., Peteut A., Piazza D., Rieder M., Servonet A., Althaus C., Behnke T., Gwinner K., Hüttig C., Kallenbach R., Lichopoj A., Lingenauber K., Lötze H.-G., Lüdicke F., Michaelis H., Oberst J., Schrödter R., Stark A., Steinbrügge G., del Togno S., Wickhusen K., Castro J. M., Herranz M., Rodrigo J., Perplies H., Weigel T., Schulze-Walewski S., Blum S., Casciello A., Rugi-Grond E., Coppolse W., Rech M., Weidlich K., Leikert T., Henkelmann R., Trefzger B., and Metz B. The BepiColombo Laser Altimeter. *Space Sci. Rev.* 2021. Vol. 217, Is. 1. id. 25. DOI: 10.1007/s11214-021-00794-y
4. Smith D. E., Zuber M. T., Neumann G. A., Mazarico E., Lemoine F. G., Head J. W., Lucey P. G., Aharonson O., Robinson M. S., Sun X., Torrence M. H., Barker M. K., Oberst J., Duxbury T. C., Mao D., Barnouin O. S., Jha K., Rowlands D. D., Goossens S., Baker D., Bauer S., Gläser P., Lemelin M., Rosenburg M., Sori M. M., Whitten J., and Mcclanahan T. Summary of the results from the lunar orbiter laser altimeter after seven years in lunar orbit. *Icarus.* 2017. Vol. 283. P. 70–91. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.06.006
5. Парусимов В. Г., Корниенко Ю. В. Об отыскании наиболее вероятного рельефа поверхности планеты по ее оптическому изображению. *Астрометрия и астрофизика.* 1973. Вып. 19, С. 20–24.
6. Корниенко Ю. В., Дулова И. А., Нгуен Суан Ань. Винеровский подход к определению оптических характеристик поверхности планеты по результатам фотометрических наблюдений. *Кинематика и физика небесных тел.* 1994. Т. 10, № 5. С. 69–76.
7. Корниенко Ю. В., Нгуен Суан Ань. Определение рельефа и радиооптических параметров участка поверхности с помощью радиолокатора с синтезированной апертурой. *Радиофизика и электроника.* 1996. № 1. С. 129–133.
8. Дулова И. А., Скуратовский С. И., Бондаренко Н. В., Корниенко Ю. В. Восстановление рельефа поверхности по одиночным изображениям с помощью фотометрического метода. *Астрономический вестник.* 2008. Т. 42, № 6. С. 555–569.
9. Бондаренко Н. В., Дулова И. А., Корниенко Ю. В. Топография полигональных структур на Марсе в месте посадки КА “Phoenix” по результатам вычисления рельефа с помощью метода улучшенной фотоклинометрии по изображениям HiRISE. *Астрономический вестник.* 2014. Т. 48, № 4. С. 263–279. DOI: 10.7868/S0320930X14040033
10. Van Diggelen J. A photometric investigation of the slopes and the heights of the ranges of hills in the Maria of the Moon. *Bull. Astron. Inst. Netherlands.* 1951. Vol. 11. P. 283–289.
11. Акимов Л. А., Корниенко Ю. В. Рассеяние света лунной поверхностью. *Кинематика и физика небесных тел.* 1994. Т. 10, № 2. С. 14–21.
12. Кочин Н. Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.* Москва: Наука, 1965. 427 с.

13. Wildey R. L. Radarclinometry of the earth and Venus from Space-Shuttle and Venera-15 imagery. *Earth Moon Planet.* 1990. Vol. 48. P. 197–231. DOI: 10.1007/BF00113857
14. Watters T. R. and Robinson M. S. Radar and photoclinometric studies of wrinkle ridges on Mars. *J. Geophys. Res.* 1997. Vol. 102, Is. E5. P. 10889–10903. DOI: 10.1029/97JE00411
15. Kirk R. L., Barrett J. M., and Soderblom L. A. Photoclinometry made simple? *ISPRS Working Group IV/9 “Advances in Planetary Mapping” Workshop.* Houston, TX. 2003.
16. Lohse V., Heipke C., and Kirk R. L. Derivation of planetary topography using multi-image shape-from-shading. *Planet. Space Sci.* 2006. Vol. 54, Is. 7. P. 661–674. DOI: 10.1016/j.pss.2006.03.002
17. Grumpe A. M. and Wöhler C. DEM construction and calibration of hyperspectral image data using pairs of radiance images. In: *2011 7th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis.* 2011. P. 609–614.
18. Gaskell R. W., Barnouin-Jha O. S., Scheeres D. J., Konopliv A. S., Mukai T., Abe S., Saito J., Ishiguro M., Kubota T., Hashimoto T., Kawaguchi J., Yoshikawa M., Shirakawa K., Kominato T., Hirata N., and Demura H. Characterizing and navigating small bodies with imaging data. *Meteorit. Planet. Sci.* 2008. Vol. 43, Is. 6. P. 1049–1061. DOI: 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00692.x
19. Raymond C. A., Jaumann R., Nathues A., Sierks H., Roatsch T., Preusker F., Scholten F., Gaskell R. W., Jorda L., Keller H.-U., Zuber M. T., Smith D. E., Mastrodemos N., and Mottola S. The Dawn Topography Investigation. *Space Sci. Rev.* 2011. Vol. 163. P. 487–510. DOI: 10.1007/s11214-011-9863-z
20. Groussin O., Jorda L., Auger A.-T., Kührt E., Gaskell R., Capanna C., Scholten F., Preusker F., Lamy P., Hviid S., Knollenberg J., Keller U., Huettig C., Sierks H., Barbieri C., Rodrigo R., Koschny D., Rickman H., A’Hearn M. F., Agarwal J., Barucci M. A., Bertaux J.-L., Bertini I., Boudreault S., Cremonese G., Da Deppo V., Davidsson B., Debei S., De Cecco M., El-Maarry M. R., Fornasier S., Fulle M., Gutiérrez P. J., Güttler C., Ip W.-H., Kramm J.-R., Küppers M., Lazzarin M., Lara L. M., Lopez Moreno J. J., Marchi S., Marzari F., Massironi M., Michalik H., Naletto G., Oklay N., Pommerol A., Pajola M., Thomas N., Toth I., Tubiana C., and Vincent J.-B. Gravitational slopes, geomorphology, and material strengths of the nucleus of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from OSIRIS observations. *Astron. Astrophys.* 2015. Vol. 583. id. A32. DOI: 10.1051/0004-6361/201526379
21. Jorda L., Gaskell R., Capanna C., Hviid S., Lamy P., Āurech J., Faury G., Groussin O., Gutiérrez P., Jackman C., Keihm S. J., Keller H. U., Knollenberg J., Kührt E., Marchi S., Mottola S., Palmer E., Schloerb F. P., Sierks H., Vincent J.-B., A’Hearn M. F., Barbieri C., Rodrigo R., Koschny D., Rickman H., Barucci M. A., Bertaux J. L., Bertini I., Cremonese G., Da Deppo V., Davidsson B., Debei S., De Cecco M., Fornasier S., Fulle M., Güttler C., Ip W.-H., Kramm J. R., Küppers M., Lara L. M., Lazzarin M., Lopez Moreno J. J., Marzari F., Naletto G., Oklay N., Thomas N., Tubiana C., and Wenzel K.-P. The global shape, density and rotation of Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from preperihelion Rosetta/OSIRIS observations. *Icarus.* 2016. Vol. 277. P. 257–278. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.05.002
22. Velikodsky Y. I., Korokhin V. V., Shkuratov Y. G., Kaydash V. G., and Videen G. Opposition effect of the Moon from LROC WAC data. *Icarus.* 2016. Vol. 275. P. 1–15. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.04.005
23. Korokhin V., Velikodsky Y., Shkuratov Y., Kaydash V., Mall U., and Videen G. Using LROC WAC data for Lunar surface photoclinometry. *Planet. Space Sci.* 2018. Vol. 160, P. 120–135. DOI: 10.1016/j.pss.2018.05.020
24. Velichko S., Korokhin V., Velikodsky Y., Kaydash V., Shkuratov Y., and Videen G. Removal of topographic effects from LROC NAC images as applied to the inner flank of the crater Hertzprung S. *Planet. Space Sci.* 2020. Vol. 193. id. 105090. DOI: 10.1016/j.pss.2020.105090
25. Dulova I. A., Bondarenko N. V., and Kornienko Y. V. Involvement of altimetric information into planet surface relief reconstruction from a set of images. In: *The 8th International Kharkov Symposium of Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves and Workshop of Terahertz Technologies (MSMW’08 and TERATECH’08) Proceedings.* Kharkov, Ukraine, June 2010. Vol. 2. P. 766–768.
26. Bayes T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1763. Vol. 53. P. 360–418.
27. Laplace, P. S. Memoire sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvres Complètes.* Vol. 8. Paris: Gauthier-villars, 1891. P. 27–65.
28. Гаусс К. Ф. Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям (1809). *Избранные геодезические сочинения.* Т. 1. Под ред. С. Г. Сударова. Москва: Изд-во геодезической литературы, 1957. 104 с.
29. Legendre A. M. *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes. Second supplement.* Paris, 1820. pp. 79–80.
30. Вальд А. Статистические решающие функции. *Позиционные игры.* Москва: Наука, 1967. С. 300–522.
31. Де Гроот М. *Оптимальные статистические решения.* Москва: Мир, 1974. 491 с.
32. Корниенко Ю. В. Статистический подход к фильтрации и информативность изображения. *Радиофизика и электроника.* 2005. Т. 10, спец. выпуск. С. 652–676.
33. Корниенко Ю. В., Дулова И. А. Оптимальное определение рельефа поверхности по совокупности фотометрических и альтиметрических данных. *Радиофизика и электроника.* 2019. Т. 24, № 4. С. 46–52. DOI: 10.15407/rej2019.04.048
34. Корниенко Ю. В. Обработка изображений в ИРЭ НАН Украины. *Радиофизика и электроника.* 2008. Т. 13, спец. выпуск. С. 423–445.
35. SER WMS System. URL: <http://wms.lroc.asu.edu> (дата звернення: 15.11.2020)
36. Robinson M. S., Brylow S. M., Tschimmel M., Humm D., Lawrence S. J., Thomas P. C., Denevi B. W., Bowman-Cisneros E., Zerr J., Ravine M. A., Caplinger M. A., Ghaemi F. T., Schaffner J. A., Malin M. C., Mahanti P., Bartels A., Anderson J., Tran T. N., Eliason E. M., McEwen A. S., Turtle E., Jolliff B. L., and Hiesinger H. Lunar Reconnaissance Orbiter Camera (LROC) Instrument Overview. *Space Sci. Rev.* 2010. Vol. 150, Is.1-4. P. 81–124. DOI: 10.1007/s11214-010-9634-2

37. SMITH D. E., ZUBER M. T., NEUMANN G. A., LEMOINE F. G., MAZARICO E., TORRENCE M. H., MCGARRY J. F., ROWLANDS D. D., HEAD J. W. III, DUXBURY T. H., AHARONSON O., LUCEY P. G., ROBINSON M. S., BARNOUIN O. S., CAVANAUGH J. F., SUN X., LIIVA P., MAO D.-D., SMITH J. C., and BARTELS A. E. Initial observations from the Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA). *Geophys. Res. Lett.* 2010. Vol. 37, Is 18. id. L18204. DOI: 10.1029/2010GL043751

## REFERENCES

1. PETTENGILL, G. H., ELIASON, E., FORD, P. G., LORRIOT, G. B., MASURSKY, H. and MCGILL, G. E., 1980. Pioneer Venus Radar Results: Altimetry and Surface Properties. *J. Geophys. Res. Space Phys.* vol. 85, is. A13, pp. 8261–8270. DOI: 10.1029/JA085iA13p08261
2. SMITH, D. E., ZUBER, M. T., NEUMANN, G. A. and LEMOINE, F. G., 1997. Topography of the Moon from the Clementine Lidar. *J. Geophys. Res. Planet.* vol. 102, is. E1, pp. 1591–1611. DOI: 10.1029/96JE02940
3. THOMAS, N., HUSSMANN, H., SPOHN, T., LARA, L. M., CHRISTENSEN, U., AFFOLTER, M., BANDY, T., BECK, T., CHAKRABORTY, S., GEISSBUEHLER, U., GERBER, M., GHOSE, K., GOUMAN, J., HOSSEINIRANI, S., KUSKE, K., PETEUT, A., PIAZZA, D., RIEDER, M., SERVONET, A., ALTHAUS, C., BEHNKE, T., GWINNER, K., HÜTTIG, C., KALLENBACH, R., LI-CHOPOJ, A., LINGENAUER, K., LÖTZKE, H.-G., LÜDICKE, F., MICHAELIS, H., OBERST, J., SCHRÖDTER, R., STARK, A., STEINBRÜGGE, G., DEL TOGNO, S., WICKHUSEN, K., CASTRO, J. M., HER-RANZ, M., RODRIGO, J., PERPLIES, H., WEI-GEL, T., SCHULZE-WALEWSKI, S., BLUM, S., CAS-CIELLO, A., RUGI-GROND, E., COPPOOLSE, W., RECH, M., WEIDLICH, K., LEIKERT, T., HENKEL-MANN, R., TREFZGER, B. and METZ, B., 2021. The Bepi-Colombo Laser Altimeter. *Space Sci. Rev.* vol. 217, is. 1, id. 25. DOI: 10.1007/s11214-021-00794-y
4. SMITH, D. E., ZUBER, M. T., NEUMANN, G. A., MAZARICO, E., LEMOINE, F. G., HEAD, J. W., LUCEY, P. G., AHARONSON, O., ROBINSON, M. S., SUN, X., TORRENCE, M. H., BARKER, M. K., OBERST, J., DUXBURY, T. C., MAO, D., BARNOUIN, O. S., JHA, K., ROWLANDS, D. D., GOOSSENS, S., BAKER, D., BAUER, S., GLÄSER, P., LEMELIN, M., ROSENBERG, M., SORI, M. M., WHITTEN, J. and MCCLANAHAN, T., 2017. Summary of the results from the lunar orbiter laser altimeter after seven years in lunar orbit. *Icarus*. vol. 283, pp. 70–91. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.06.006
5. PARUSIMOV, V. G. and KORNIENKO, Y. V., 1973. On determination of the most probable relief of a surface region by its optical image. *Astrometriya i astrofizika*. no. 19, pp. 20–24. (in Russian).
6. KORNIENKO, Y. V., DULOVA, I. A. and NGUYEN XUAN ANH, 1994. Wiener Approach to the Determination of Optical Characteristics of a Planetary Surface from Photometric Observations. *Kinematika i fizika nebesnyh tel.* vol. 10, no. 5, pp. 69–76. (in Russian).
7. KORNIENKO, Y. V. and NGUYEN XUAN ANH, 1996. Determination of relief and radiooptical parameters of a surface area through the use of a synthetic aperture radar. *Radiofizika i elektronika*. no. 1, pp. 129–133. (in Russian).
8. DULOVA, I. A., SKURATOVSKY, S. I., BONDARENKO, N. V. and KORNIENKO, Y. V., 2008. Reconstruction of the Surface Topography from Single Images with the Photometric Method. *Sol. Syst. Res.* vol. 42, is. 6, pp. 522–535. DOI: 10.1134/S0038094608060051
9. BONDARENKO, N. V., DULOVA, I. A. and KORNIENKO, Y. V., 2014. Topography of polygonal structures at the Phoenix landing site on Mars through the relief retrieval from the HiRISE images with the improved photoclinometry method. *Sol. Syst. Res.* vol. 48, is. 4, pp. 243–258. DOI: 10.1134/S0038094614040030
10. VAN DIGGELEN, J., 1951. A photometric investigation of the slopes and the heights of the ranges of hills in the Maria of the Moon. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*. vol. 11, pp. 283–289.
11. AKIMOV, L. A. and KORNIENKO, Y. V., 1994. Light Scattering by the Lunar Surface. *Kinematika i fizika nebesnyh tel.* vol. 10, no. 2, pp. 14–21. (in Russian).
12. KOCHIN, N. E., 1965. *Vector calculus and beginnings of tensor calculus*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
13. WILDEY, R. L., 1990. Radarclinometry of the earth and Venus from Space-Shuttle and Venera-15 imagery. *Earth Moon Planet.* vol. 48, pp. 197–231. DOI: 10.1007/BF00113857
14. WATTERS, T. R. and ROBINSON, M. S., 1997. Radar and photoclinometric studies of wrinkle ridges on Mars. *J. Geophys. Res.* vol. 102, is. E5, pp. 10889–10903. DOI: 10.1029/97JE00411
15. KIRK, R. L., BARRETT, J. M. and SODERBLUM, L. A., 2003. Photoclinometry made simple? *ISPRS Working Group IV/9 “Advances in planetary mapping”*. Workshop. Houston, TX.
16. LOHSE, V., HEIPKE, C. and KIRK, R. L., 2006. Derivation of planetary topography using multi-image shape-from-shading. *Planet. Space Sci.* vol. 54, is. 7, pp. 661–674. DOI: 10.1016/j.pss.2006.03.002
17. GRUMPE, A. M. and WÖHLER, C., 2011. DEM construction and calibration of hyperspectral image data using pairs of radiance images. In: *2011 7th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*. pp. 609–614.
18. GASKELL, R. W., BARNOUIN-JHA, O. S., SCHEERES, D. J., KONOPLIV, A. S., MUKAI, T., ABE, S., SAITO, J., ISHIGURO, M., KUBOTA, T., HASHIMOTO, T., KAWAGUCHI, J., YOSHIKAWA, M., SHIRAKAWA, K., KOMINATO, T., HIRATA, N. and DEMURA, H., 2008. Characterizing and navigating small bodies with imaging data. *Meteorit. Planet. Sci.* vol. 43, is. 6, pp. 1049–1061. DOI: 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00692.x
19. RAYMOND, C. A., JAUMANN, R., NATHUES, A., SIERKS, H., ROATSCH, T., PREUSKER, F., SCHOLTEN, F., GASKELL, R. W., JORDA, L., KELLER, H.-U., ZUBER, M. T., SMITH, D. E., MASTRODEMOS, N. and MOTTOLA, S., 2011. The Dawn Topography Investigation. *Space Sci. Rev.* vol. 163, pp. 487–510. DOI: 10.1007/s11214-011-9863-z
20. GROUSSIN, O., JORDA, L., AUGER, A.-T., KÜHRT, E., GASKELL, R., CAPANNA, C., SCHOLTEN, F., PREUS-

- KER, F., LAMY, P., HVIID, S., KNOLLENBERG, J., KELLER, U., HUETTIG, C., SIERKS, H., BARBIERI, C., RODRIGO, R., KOSCHNY, D., RICKMAN, H., A'HEARN, M. F., AGARWAL, J., BARUCCI, M. A., BERTAUX, J.-L., BERTINI, I., BOUDREAU, S., CREMONESE, G., DA DEPPO, V., DAVIDSSON, B., DEBEI, S., DE CECCO, M., EL-MAARRY, M. R., FORNASIER, S., FULLE, M., GUTIÉRREZ, P. J., GÜTTLER, C., IP, W.-H., KRAMM, J.-R., KÜPPERS, M., LAZZARIN, M., LARA, L. M., LOPEZ MORENO, J. J., MARCHI, S., MARZARI, F., MASSIRONI, M., MICHALIK, H., NALETTO, G., OKLAY, N., POMMEROL, A., PAJOLA, M., THOMAS, N., TOTH, I., TUBIANA, C. and VINCENT, J.-B., 2015. Gravitational slopes, geomorphology, and material strengths of the nucleus of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from OSIRIS observations. *Astron. Astrophys.* vol. 583, id. A32. DOI: 10.1051/0004-6361/201526379
21. JORDA, L., GASKELL, R., CAPANNA, C., HVIID, S., LAMY, P., ĐURECH, J., FAURY, G., GROUSSIN, O., GUTIÉRREZ, P., JACKMAN, C., KEIHM, S. J., KELLER, H. U., KNOLLENBERG, J., KÜHRT, E., MARCHI, S., MOTTOLA, S., PALMER, E., SCHLOERB, F. P., SIERKS, H., VINCENT, J.-B., A'HEARN, M. F., BARBIERI, C., RODRIGO, R., KOSCHNY, D., RICKMAN, H., BARUCCI, M. A., BERTAUX, J. L., BERTINI, I., CREMONESE, G., DA DEPPO, V., DAVIDSSON, B., DEBEI, S., DE CECCO, M., FORNASIER, S., FULLE, M., GÜTTLER, C., IP, W.-H., KRAMM, J. R., KÜPPERS, M., LARA, L. M., LAZZARIN, M., LOPEZ MORENO, J. J., MARZARI, F., NALETTO, G., OKLAY, N., THOMAS, N., TUBIANA, C. and WENZEL, K.-P., 2016. The global shape, density and rotation of Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from preperihelion Rosetta/OSIRIS observations. *Icarus*. vol. 277, pp. 257–278. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.05.002
22. VELIKODSKY, Y. I., KOROKHIN, V. V., SHKURATOV, Y. G., KAYDASH, V. G. and VIDEEN, G., 2016. Opposition effect of the Moon from LROC WAC data. *Icarus*. vol. 275, pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.04.005
23. KOROKHIN, V., VELIKODSKY, Y., SHKURATOV, Y., KAYDASH, V., MALL, U. and VIDEEN, G., 2018. Using LROC WAC data for lunar surface photogrammetry. *Planet. Space Sci.* vol. 160, pp. 120–135. DOI: 10.1016/j.pss.2018.05.020
24. VELICHKO, S., KOROKHIN, V., VELIKODSKY, Y., KAYDASH, V., SHKURATOV, Y. and VIDEEN, G., 2020. Removal of topographic effects from LROC NAC images as applied to the inner flank of the crater Hertzprung S. *Planet. Space Sci.* vol. 193, id. 105090. DOI: 10.1016/j.pss.2020.10509
25. DULOVA, I. A., BONDARENKO, N. V. and KORNIIENKO, Y. V., 2010. Involvement of altimetric information into planet surface relief reconstruction from a set of images. In: *The 8th International Kharkov Symposium of Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves and Workshop of Terahertz Technologies (MSMW'08 and TERATECH'08) Proceedings*. Kharkov, Ukraine. vol. 2, pp. 766–768.
26. BAYES, T., 1763. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* vol. 53, pp. 360–418.
27. LAPLACE, P. S., 1891. Memoire sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvres Complètes*. vol. 8. Paris: Gauthier-villars, pp. 27–65.
28. GAUSS, J. C. F., 1957. The theory of motion of celestial bodies revolving around the Sun along conical sections (1809). In: S. G. SUDAROV, ed. *Selected geodesic works*. Vol. 1. Moscow, Russia: Izdatelstvo geodezicheskoi literatury. (in Russian).
29. LEGENDRE, A. M., 1820. *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes. Second supplement*. Paris. pp. 79–80.
30. WALD, A. 1967. Statistical decision Functions. In: *Positional games*. Moscow, Russia: Nauka Publ., pp. 300–522. (in Russian).
31. DE GROOT, M. H., 1970. *Optimal statistical decisions*. New York: McGRAW-Hill company.
32. KORNIIENKO, Y. V., 2005. Statistical Approach for Filtering and Image Informativity. *Radiofizika i Elektronika*. vol. 10, special issue, pp. 652–676. (in Russian).
33. KORNIIENKO, Y. V. and DULOVA, I. A., 2019. Optimal surface relief reconstruction from both the photometric and the altimetric data. *Radiophys. Electron.* vol. 24, no. 4, pp. 46–52. (in Russian). DOI: 10.15407/rej2019.04.046
34. KORNIIENKO, Y. V., 2008. Image Processing at the IRE NAS of Ukraine. *Radiofizika i elektronika*. vol. 3, special issue, pp. 423–45. (in Russian).
35. SER WMS SYSTEM, 2020. *SER WMS System* [online]. [viewed 15 November 2020]. Available from: <http://wms.lroc.asu.edu>
36. ROBINSON, M. S., BRYLOW, S. M., TSCHIMMEL, M., HUMM, D., LAWRENCE, S. J., THOMAS, P. C., DENEVI, B. W., BOWMAN-CISNEROS, E., ZERR, J., RAVINE, M. A., CAPLINGER, M. A., GHAEMI, F. T., SCHAFFNER, J. A., MALIN, M. C., MAHANTI, P., BARTELS, A., ANDERSON, J., TRAN, T. N., ELIASON, E. M., MCEWEN, A. S., TURTLE, E., JOLLIFF, B. L. and HIESINGER, H., 2010. Lunar Reconnaissance Orbiter Camera (LROC) Instrument Overview. *Space Sci. Rev.* vol. 150, is.1-4, pp. 81–124. DOI: 10.1007/s11214-010-9634-2
37. SMITH, D. E., ZUBER, M. T., NEUMANN, G. A., LEMOINE, F. G., MAZARICO, E., TORRENCE, M. H., MCGARRY, J. F., ROWLANDS, D. D., HEAD, J. W. III, DUXBURY, T. H., AHARONSON, O., LUCEY, P. G., ROBINSON, M. S., BARNOUIN, O. S., CAVANAUGH, J. F., SUN, X., LIIVA, P., MAO, D.-D., SMITH, J. C. and BARTELS, A. E., 2010. Initial observations from the Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA). *Geophys. Res. Lett.* vol. 37, is. 18, id. L18204. DOI: 10.1029/2010GL043751

Yu. V. Kornienko, I. A. Dulova, and N. V. Bondarenko

O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics, National Academy of Sciences of Ukraine, 12, Acad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

#### INVOLVEMENT OF ALTIMETRY INFORMATION INTO THE IMPROVED PHOTOCALINOMETRY METHOD FOR RELIEF RETRIEVAL FROM A SLOPE FIELD

*Purpose:* The paper discusses the possibility for increasing the planet's surface relief retrieving accuracy with the improved photocalinometry method through the reference of the desired

relief to the altimetry data. The general approach to solving the problem is proposed. The use of altimeters having both wide and narrow beam patterns are discussed, but the narrow beam pattern altimeter data is studied more in detail. The spatial resolution of the retrieved relief calculated with the improved photoclinometry method conforms to the one of the source images. Altimetry allows absolute reference to the surface heights and improves the accuracy of the relief determination. *Design/metodology/approach:* The work is based on the improved photoclinometry method for the planet's surface relief retrieving from images. This method is mathematically rigorous and uses the Bayesian statistical approach, that allows calculation of the most probable relief according to available observations.

*Findings:* An approach to determining the optimal statistical estimate of the surface heights from images in the frames of the improved photoclinometry method is proposed and an expression for the optimal filter which converts source images along with the wide beam pattern altimetry data into the most

probable relief of the planet surface area is presented. The reference technique for the narrow beam pattern altimeter data is formulated. The efficiency of the method has been verified with the computer simulation. The relief of the surface area in Mare Imbrium on the Moon was retrieved using three images and laser altimeter data taken by the "Lunar Reconnaissance Orbiter" spacecraft.

*Conclusions:* Accounting for the narrow beam pattern altimeter data increases the accuracy of the relief determination. Using the narrow beam pattern altimeter data turns out to be more preferable over the involving wide beam pattern altimeter data. Computer simulation has shown that accounting for the narrow beam pattern altimeter data significantly increases the accuracy of the calculated heights as against using images exclusively and helps to speed up the calculation procedure.

*Key words:* planet surface relief, photometry, altimetry, optimal filtering, statistical estimation of random value

*Стаття надійшла до редакції 26.11.2020*