

ПОШИРЕННЯ, ДИФРАКЦІЯ І РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra26.03.239>

УДК 537.874.6

М. Є. КАЛІБЕРДА^{1,2}, Л. М. ЛИТВИНЕНКО^{1,2}, С. О. ПОГАРСЬКИЙ^{1,2}

¹Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

E-mail: KaliberdaME@gmail.com; Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua

²Радіоастрономічний інститут НАН України,
вул. Мистецтв, 4, м. Харків, 61002, Україна

ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД В ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ Н-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ НА ДВОХ ОДНАКОВИХ НАПІВНЕСКІНЧЕННИХ РЕШІТКАХ, РОЗТАШОВАНИХ В ОДНІЙ ПЛОЩИНІ

Предмет і мета роботи: Розглядається задача про дифракцію Н-поляризованої плоскої хвилі на структурі з двох напівнескінченних стрічкових решіток. Решітки лежать в одній площині. Зазор між решітками довільний. Мета роботи полягає у розвиненні операторного методу для структур, у яких розсіяні поля мають як дискретний, так і неперервний просторові спектри.

Методи і методологія: У спектральній області, в області перетворень Фур'є, розсіяне поле виражається через невідому амплітуду Фур'є. Поле, відбите розглянутою структурою, представляється як сума двох полів струмів, що течуть стрічками напівнескінченних решіток. Для амплітуд Фур'є отримано операторні рівняння. Ці рівняння використовують оператори відбиття напівнескінченних решіток, які вважаються відомими. Поле, розсіяне напівнескінченною решіткою, можна представити як суму плоских та циліндричних хвиль. Оператор відбиття напівнескінченної решітки має особливості в точках, що відповідають сталим поширення плоских хвиль. Як наслідок, невідомі амплітуди Фур'є поля, розсіяного досліджуваною структурою, також мають особливості. Для їх усунення виконано процедуру регуляризації. В результаті цієї процедури операторні рівняння зведено до системи інтегральних рівнянь, що містять інтеграл у сенсі головного значення за Коші та скінченної частини за Адамаром. Виконано дискретизацію. Записано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язувалась з використанням ітераційної процедури.

Результати: Отримано операторні рівняння відносно амплітуд Фур'є поля, розсіяного структурою з двох напівнескінченних решіток. Виконано числове дослідження збіжності. Досліджено розсіяні поля в близькій та далекій зонах при різних значеннях параметрів решітки.

Висновок: Запропоновано ефективний алгоритм для вивчення поля, розсіяного на стрічковій решітці, яке має як дискретний, так і неперервний просторовий спектр. Розвинений підхід є ефективним інструментом для розв'язання низки задач антенної техніки та електроніки надвисоких частот.

Ключові слова: напівнескінченна решітка, операторний метод, сингулярний інтеграл, гіперсингулярний інтеграл, процедура регуляризації

1. Вступ

Стрічкові решітки є елементами антенних систем, сенсорів, частотно-селективних екранів [1–3]. Наразі маємо досить повне дослідження решіток, які складаються зі скінченного числа стрічок і нескінченних періодичних решіток. Проте нескінченні, але неідеально періодичні структури досліджені недостатньо повно. Такі структури дозволяють описати вплив дефектів у періодич-

них решітках, вплив краю решітки на електромагнітні поля.

Поле, розсіяне нескінченними ідеально періодичними решітками, має дискретний просторовий спектр, його можна представити як ряд Фур'є. Поле, розсіяне скінченними решітками, має неперервний спектр і може бути представлене як інтеграл Фур'є. Поле нескінченних, але неідеально періодичних решіток може мати як дискретний, так і неперервний спектри. Теорема

Флоке до таких решіток не може бути застосована безпосередньо.

Прикладом нескінченних, але неідеально періодичних решіток можуть бути напівнескінченні решітки. Напівнескінченні решітки з малих щодо довжини хвилі циліндрів розглядалися в працях [4–8].

В [9–12] до дослідження напівнескінченних стрічкових решіток застосовувався такий підхід, коли густина струмів на стрічках представлялася як сума густини струмів, що течуть стрічками нескінченної ідеально періодичної решітки, і струмів корекції, викликаних наявністю краю. Для цих струмів отримано рівняння, які розв’язувалися методом факторизації, методом моментів або за допомогою дискретизації за методом Найстрема.

В [13], [14] розглядалися нескінченні періодичні решітки без поодинокі стрічки, а також структура з двох напівнескінченних решіток з довільною, не обов’язково кратною періоду, відстанню між ними. Для знаходження поля струмів, що течуть на стрічках ідеально періодичних решіток, і поля струмів корекції застосовувався метод сингулярних інтегральних рівнянь з дискретизацією методом дискретних особливостей або з використанням алгоритму типу Найстрема.

Інший підхід до дослідження неідеально періодичних решіток базується на операторному методі. Властивості всієї структури визначаються з операторних рівнянь, які використовують оператор розсіяння поодинокого елемента. Раніше операторний метод успішно застосовувався у дослідженнях багат шарових нескінченних, скінченних і напівнескінченних решіток, а також плоских напівнескінченних решіток [15–19].

У цій роботі ми розглянемо задачу про дифракцію на двох напівнескінченних решітках з використанням операторного методу.

2. Постановка задачі

Розглянемо дві напівнескінченні однакові стрічкові решітки, які лежать у площині $y = 0$. Ширина стрічок становить $2d$, період становить l , відстань між серединами крайніх стрічок напівнескінченних решіток позначимо як $\Delta > 2d$. Перша решітка розташована в області $y > -d$, середина крайньої стрічки збігається з початком координат. Друга решітка розташована в області

$y < -\Delta + d$. Стрічки є нескінченні вздовж осі Ox . Геометрія задачі надається на рис. 1. Залежність полів від часу прийемо у вигляді $\exp(-i\omega t)$, де ω – кругова частота, і надалі будемо пропускати.

Припустимо, що на структуру з області $z > 0$ падає плоска H -поляризована хвиля з амплітудою q (вектор H^i має лише одну відмінну від нуля x -компоненту),

$$H^i(y, z) = q \exp(ik(y \sin \varphi_0 - z \cos \varphi_0)), \quad (1)$$

де k – хвильове число, φ_0 – кут падіння, який відраховується від негативного напрямку осі Oy . Для стислості позначимо $\xi_l = \sin \varphi_0$. Повне поле будемо шукати як суму падаючого і розсіяного полів,

$$H^{total} = H^i + H^{sc}. \quad (2)$$

У спектральній області розсіяне поле представимо у вигляді інтеграла Фур’є,

$$H^{sc}(y, z) = \text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|) d\xi, \quad (3)$$

де $A(\xi)$ – шукана амплітуда Фур’є (спектральна функція); $\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$, $\text{Re } \gamma \geq 0$, $\text{Im } \gamma \geq 0$.

При застосуванні операторного методу використовуються оператори відбиття поодинокі неоднорідності. Як поодинокі неоднорідності візьмемо ізольовані напівнескінченні решітки, що лежать в областях $y > -d$, $y < d$. Введемо їх оператори відбиття R^\pm таким чином. Припустимо, що на ізольовану напівнескінченну решітку падає хвиля $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\zeta) \exp(ik\zeta y - k\gamma(\zeta)z) d\zeta$ з амплітудою Фур’є $g(\zeta)$. Тоді амплітуду Фур’є відбитого поля $a^\pm(\xi)$ можна знайти за формулою

$$a^\pm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R^\pm(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad (4)$$

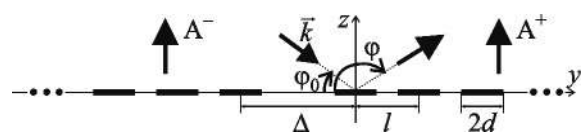


Рис. 1. Геометрія досліджуваної структури

де $R^\pm(\xi, \zeta)$ – ядро оператора R^\pm , знак “+” відповідає решітці в області $y > -d$, знак “-” відповідає решітці в області $y < d$. В операторній формі (4) набуде вигляду

$$a^\pm = R^\pm g. \quad (5)$$

Алгоритм визначення операторів відбиття напівнескінчених решіток операторним методом описано в [18], [19].

3. Розв’язання задачі

3.1. Операторні рівняння

Розсіяне структурою поле будемо шукати як суму двох полів. Перше поле описується амплітудою Фур’є $A^+(\xi)$ і являє собою поле струмів, які течуть стрічками напівнескінченної решітки в області $y > -d$. Друге описується амплітудою Фур’є $A^-(\xi)$ і є полем струмів, які течуть стрічками напівнескінченної решітки в області $y < -\Delta + d$. Тоді (3) переписеться як

$$\begin{aligned} H^{sc}(y, z) = \\ = \operatorname{sgn}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} (A^+(\xi) + A^-(\xi)) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|) d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{і } A(\xi) = A^+(\xi) + A^-(\xi).$$

Амплітуди $A^\pm(\xi)$ пов’язані між собою наступними операторними рівняннями:

$$A^+ = -R^+ A^- + R^+ q, \quad (7)$$

$$A^- = -s^+ R^- s^- A^+ + s^+ R^- s^- q, \quad (8)$$

де оператори s^\pm описують зміну амплітуди поля зі зміщенням системи координат у позитивному (негативному) напрямку осі *Oy* на величину Δ .

Рівняння (7), (8) означають, що відбите поле можна представити як суперпозицію поля падаючої хвилі, відбитої ізольованими напівнескінченими решітками (другий доданок), і поля, що випромінюється однією з напівнескінчених решіток і відбивається іншою (перший доданок). Перший доданок описує багаторазові перевідбиття хвиль між решітками. Оператор s^\pm вини-

кає внаслідок того, що, за визначенням, оператор R^- – оператор відбиття решітки в області $y < d$, а в розглянутій нами системі решітка зміщена на величину Δ вздовж осі *Oy* (див. рис. 1). Поява знака мінус у першого доданка в (7), (8), на відміну від (4), пояснюється тим, що хвилі з амплітудою A^\pm й q поширюються в протилежних напрямках осі *Oz*. Докладно це описано, наприклад, в [17].

Поле, відбите напівнескінченими решітками, може бути представлено як суперпозиція плоских і циліндричних хвиль. Ядро операторів відбиття R^\pm має особливості типу полюс в точках, які відповідають сталим поширення плоских хвиль. Таким чином, оператори R^\pm є сингулярними. Введемо нові оператори R_1^\pm , виділивши сингулярну частину з R^\pm за формулою [19]

$$R_1^\pm = R^\pm - e^\mp R^\pm e^\pm \quad (9)$$

з регулярним ядром

$$R^\pm(\xi, \zeta) = \frac{R_1^\pm(\xi, \zeta)}{f^\pm(\xi, \zeta)}, \quad (10)$$

де оператори e^\pm визначають зміну амплітуди поля при зсуві системи координат у позитивному (негативному) напрямку осі *Oy* на значення періоду l . Функції $f^\pm(\xi, \zeta) = 1 - \exp(\pm ikl(\zeta - \xi))$ мають нулі в точках, які відповідають сталим поширення плоских хвиль. Для кожного фіксованого значення ξ функція $f^\pm(\xi, \zeta)$ має нескінченне число нулів у точках $\zeta_p(\xi) = \xi + 2\pi p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для кожного фіксованого значення ζ маємо множину нулів $\zeta_p(\zeta)$.

У разі, якщо падаюче поле має вигляд (1), з (7), (8) випливає, що амплітуди $A^\pm(\xi)$ мають особливості в точках $\zeta_p(\xi)$. Введемо нові невідомі функції $C^\pm(\xi)$, виділивши особливості за формулами:

$$C^+ = A^+ - R^+ q, \quad (11)$$

$$C^- = A^- - s^- R^- s^+ q. \quad (12)$$

Поле з амплітудою Фур’є $C(\xi) = C^+(\xi) + C^-(\xi)$ представляється як лише циліндрична хвиля й описує взаємодію напівнескінчених решіток.

Враховуючи (11), (12), рівняння (7), (8) переписуться таким чином:

$$C^+ = -R^+ s^+ R^- s^- - R^+ C^-, \quad (13)$$

$$C^- = -s^+ R^- s^- R^+ - s^+ R^- s^- C^+. \quad (14)$$

Використовуючи (4), (5), (9), (10), рівняння (13), (14) можна переписати як інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned} C^+(\xi) = & \\ = & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^+(\xi, \zeta) R_1^-(\zeta, \xi_l)}{f^+(\xi, \zeta) f^-(\zeta, \xi_l)} \exp(ik\Delta(\zeta - \xi_l)) d\zeta - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^+(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta)} C^-(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C^-(\xi) = & \\ = & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^-(\xi, \zeta) R_1^+(\zeta, \xi_l)}{f^-(\xi, \zeta) f^+(\zeta, \xi_l)} \exp(ik\Delta(\xi - \zeta)) d\zeta - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^-(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta)} \exp(ik\Delta(\xi - \zeta)) C^+(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (16)$$

Слід відзначити дві особливості отриманих рівнянь (15), (16). У зв'язку з тим, що функція $f^\pm(\xi, \zeta)$ може обернутися в нуль, інтеграли в (15), (16) є сингулярними інтегралами, підінтегральні функції яких мають особливість вигляду $1/x$, якщо $x \rightarrow 0$. Водночас у разі, коли ξ збігається з одним з нулів для ξ_l , $\xi = \zeta_s(\xi_l)$, перший інтеграл у правій частині стає гіперсингулярним, він містить особливості другого порядку вигляду $1/x^2$, при $x \rightarrow 0$. Для усунення особливостей виконується процедура регуляризації, внаслідок якої сингулярний і гіперсингулярний інтеграли зводяться до інтегралів у сенсі головного значення за Коші й скінченної частини за Адамаром.

3.2. Регуляризація сингулярного інтеграла

Опишемо регуляризацію інтеграла вигляду

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi, \zeta)}{f^\pm(\xi, \zeta) f^\pm(\zeta, \xi)} \zeta \quad (17)$$

при $\xi \neq \zeta_s(\xi_l)$. В (17) для стислості через $f(\xi, \zeta)$ позначена одна з підінтегральних функцій в (15), (16). Зазначимо, що інтеграл (17) містить

нескінченне число особливих точок. Тому спочатку розглянемо більш простий інтеграл, який містить лише одну особливу точку $\zeta = \zeta_0$, $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta$. Перетворимо контур інтегрування в комплексній площині так, щоб він збігався з дійсною віссю всюди, за винятком особливої точки $\zeta = \zeta_0$, а особливої точку обходив знизу. Тоді, маючи на увазі, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \pi i, \quad (18)$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = 0, \quad (19)$$

де *v.p.* означає інтеграл у сенсі головного значення за Коші, а “below” означає, що особливу точку обходимо знизу, отримаємо

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} - \frac{f(\xi, \zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right) d\zeta + \pi i f(\xi, \zeta_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Перший інтеграл у правій частині у (20) є регулярним, а отже його можна розглядати як інтеграл у сенсі головного значення за Коші. Використовуючи (19), остаточно запишемо

$$I_2 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \pi i f(\xi, \zeta_0). \quad (21)$$

У разі, якщо особливу точку обходимо зверху, замість (18) необхідно використовувати вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = -\pi i, \quad (22)$$

де “above” означає, що особливу точку обходимо зверху. Застосовуючи (19), (22), отримаємо

$$I_2 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - \pi i f(\xi, \zeta_0). \quad (23)$$

Перейдемо до обчислення сингулярних інтегралів (17). З умови випромінювання випливає, що в (15) полюси необхідно обходити зверху ($\zeta \rightarrow +0 \cdot i$), а в (16) – знизу ($\zeta \rightarrow -0 \cdot i$). Тоді, використовуючи (21), (23), отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+_{above}(\xi, \zeta) f^-_{above}(\zeta, \xi_l)} d\zeta = \\ & = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta) f^-(\zeta, \xi_l)} d\zeta + \\ & + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi))}{f^-(\zeta_k(\xi), \xi_l)} + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi_l))}{f^+(\xi, \zeta_k(\xi_l))}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+_{above}(\xi, \zeta)} d\zeta = \\ & = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta)} d\zeta + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta_k(\xi)), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-_{below}(\xi, \zeta) f^+_{below}(\zeta, \xi_l)} d\zeta = \\ & = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta) f^+(\zeta, \xi_l)} d\zeta + \\ & + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi))}{f^+(\zeta_k(\xi), \xi_l)} + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi_l))}{f^-(\xi, \zeta_k(\xi_l))}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-_{below}(\xi, \zeta)} d\zeta = \\ & = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta)} d\zeta + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta_k(\xi)). \end{aligned} \quad (27)$$

В (24)–(27) враховано, що

$$\begin{aligned} & \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi)}{f^+(\xi, \zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi_l)}{f^-(\zeta, \xi_l)} = \\ & = - \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi_l)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi_l)}{f^+(\zeta, \xi_l)} = - \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi_l)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi)}{f^-(\xi, \zeta)} = \frac{i}{k\Delta}. \end{aligned}$$

3.3. Регуляризація гіперсингулярного інтеграла

Нехай в (15), (16) $\xi = \zeta_s(\xi_l)$. Розглянемо спочатку, як і у попередньому параграфі, простіший випадок,

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta, \quad (28)$$

де $f(\xi, \zeta)$, як і раніше, є однією з підінтегральних функцій в (15), (16). Застосувавши (18), (19) і вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta = 0, \quad (29)$$

з (28) отримаємо

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} - \frac{f(\xi, \zeta_0)}{(\zeta - \zeta_0)^2} - \frac{f'(\xi, \zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right) d\zeta + \\ &+ \pi i f'(\xi, \zeta_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Похідна функції $f(\xi, \zeta)$ обчислюється за змінною інтегрування ζ . Оскільки інтеграл у правій частині (30) є регулярним, його можна розглядати як інтеграл у сенсі скінченної частини за Адамаром (позначимо як h.f.p.) Остаточоно (30) набирає вигляду

$$I_3 = \text{h.f.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta + \pi i f'(\xi, \zeta_0). \quad (31)$$

Якщо особливу точку обійти зверху, використовуючи (22), (29), отримаємо

$$I_3 = \text{h.f.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta - \pi i f'(\xi, \zeta_0). \quad (32)$$

Для регуляризації інтегралів в (15), (16) надамо підінтегральній функції вигляду

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^\pm(\xi, \zeta) f^\mp(\zeta, \xi_l)} d\zeta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi)) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi_l))}{f^{\pm}(\xi, \zeta) f^{\mp}(\zeta, \xi_l)} \times \left(\frac{1}{\prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi)) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi_l))} \right) d\zeta. \quad (33)$$

Потім, застосувавши умову випромінювання, перетворимо відрізок інтегрування в контур у комплексній площині, як було описано в параграфі 3.2. Множник, що стоїть в дужках в (33), розкладемо на найпростіші дроби. Далі застосуємо до кожного найпростішого дроби формули (21) і (31) або (23) і (32).

3.4. Дискретизація

Для дискретизації рівнянь, отриманих після регуляризації, замінимо нескінченний інтервал інтегрування симетричним скінченим довжиною $2a$, $(-\infty; \infty) \mapsto (-a; a)$. Скінченний інтервал інтегрування розіб'ємо на N підінтервалів рівної довжини $h = 2a/N$. Припустимо, що на кожному підінтервалі невідома функція є сталою й дорівнює значенню у вузлі. У якості вузлів виберемо середини інтервалів, $\xi_n = -a + 2a(n + 0.5)/N$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. В результаті отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta \approx \int_{-a}^{+a} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-a+2an/N}^{-a+2a(n+1)/N} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(\xi, \xi_n) \int_{-a+2an/N}^{-a+2a(n+1)/N} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta, \quad (34)$$

де $m = 1, 2$. В (34) інтеграл розуміється у сенсі головного значення за Коші (при $m = 1$) або скінченній частині за Адамаром (при $m = 2$):

$$\int_{-a+2an/N}^{-a+2a(n+1)/N} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)} d\zeta = \ln \left| \frac{-a + 2a(n+1)/N - \zeta_0}{-a + 2an/N - \zeta_0} \right|,$$

$$\int_{-a+2an/N}^{-a+2a(n+1)/N} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{-a + 2an/N - \zeta_0} - \frac{1}{-a + 2a(n+1)/N - \zeta_0}.$$

Для обчислення похідної, що виникає в (31), (32), використовується розділена різниця другого порядку, $f'(\xi, \xi_m) \approx \frac{f(\xi, \xi_{m+1}) - f(\xi, \xi_{m-1})}{2h}$.

Множину вузлів необхідно вибирати з умови, що значення ξ_l , яке відповідає падаючій хвилі, має співпадати з одним з вузлів, наприклад, із вузлом з номером l . З практичної точки зору, становить інтерес випромінювання в ортогональному напрямку, $\varphi = 90^\circ$. Тому N необхідно вибирати непарним. Тоді один з вузлів буде рівнятися 0.

В результаті дискретизації може бути отримана система рівнянь вигляду

$$\hat{C} = \hat{R}\hat{C} + \hat{b}, \quad (35)$$

де \hat{C} – вектор, що має значення невідомих амплітуд $C^\pm(\xi)$ у вузлах; \hat{R} і \hat{b} – матриця й вектор, що відповідають правим частинам (15), (16). Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (35) застосовувалася ітераційна процедура

$$\hat{C}^{(q)} = \hat{R}\hat{C}^{(q-1)} + \hat{b}, \quad q = 1, 2, \dots, Q, \quad (36)$$

$$\hat{C}^{(0)} = 0,$$

де $\hat{C}^{(q)}$ – вектор розв'язку, отриманого на q -й ітерації; Q – кількість ітерацій.

4. Числові результати

Припустимо, що на решітку ортогонально ($\varphi_0 = 90^\circ$) падає плоска хвиля одиничної амплітуди ($q = 1$). Дослідимо числову збіжність розв'язку.

Для опису ступеня взаємодії двох напівнескінчених решіток введемо величину

$$T^{coup} = \frac{4\pi}{k} \int_0^\pi |C(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi,$$

яка чисельно дорівнює поперечному перетину розсіяння й пропорційна енергії, що переноситься циліндричною хвилею з амплітудою Фур'є $C(\xi)$. Введемо відносну похибку за формулами:

$$\text{Err}(N) = \left| \frac{T^{\text{coup}}(2N-1) - T^{\text{coup}}(N)}{T^{\text{coup}}(2N-1)} \right|,$$

$$\text{Err}(Q) = \left| \frac{T^{\text{coup}}(Q+1) - T^{\text{coup}}(Q)}{T^{\text{coup}}(Q+1)} \right|,$$

де $T^{\text{coup}}(N)$ – значення T^{coup} , отримане при N вузлах; $T^{\text{coup}}(Q)$ – значення T^{coup} , отримане після Q ітерацій в (36). На рис. 2 наведено залежності похибки від N і від Q . Починаючи з деякого значення N і Q , похибка монотонно спадає. При збільшенні відстані між напівнескінченими решітками підінтегральні функції стають швидкоосцилюючими. На поведінку підінтегральних функцій впливає комплексна експонента, пе-

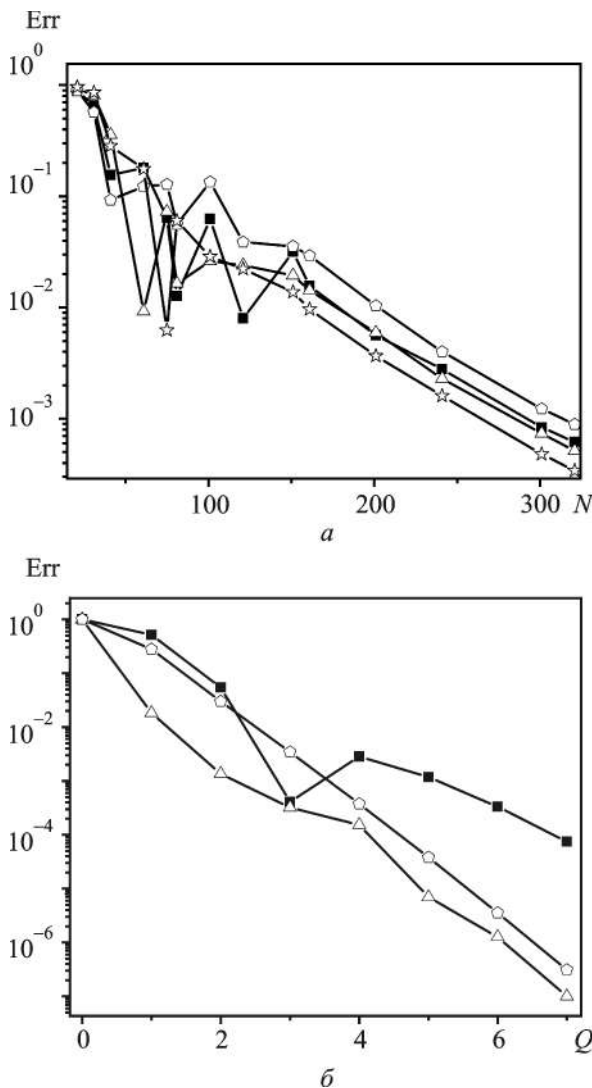


Рис. 2. Залежність відносної похибки від N (а) і від Q (б) при $kd=1, kl=5, k\Delta=3$ (зірочки); $kd=1, kl=5, k\Delta=7$ (трикутники); $kd=\pi/2, kl=5, k\Delta=7$ (квадрати); $kd=\pi/2, kl=5, k\Delta=11$ (п'ятикутники)

ріод якої зменшується зі зростанням $k\Delta$. Тому для апроксимації інтеграла із заданою точністю у квадратурних формулах необхідно вибирати більшу кількість вузлів.

Розглянута структура дозволяє досліджувати вплив дефектів у нескінченній ідеально періодичній решітці. В ідеально періодичному масиві густина струмів на сусідніх стрічках відрізняється лише фазовим множником. У разі зсуву стрічки виникає так зване поле корекції, індуковане струмами корекції. Поле корекції досліджуваної структури,

$$H^c(y, z) = \text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} (C^{\infty,+}(\xi) + C^{\infty,-}(\xi) + C(\xi)) \times \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|) d\xi,$$

становить суму полів корекції двох ізольованих напівнескінчених решіток і поля взаємодії. Воно має амплітуду Фур'є $C^{\infty,+}(\xi) + C^{\infty,-}(\xi) + C(\xi)$. Згідно (3), (6), (11), (12), використовуючи формули (20), (23), можемо записати

$$C^{\infty,+}(\xi) = \frac{R^+(\xi, \xi_l)}{f^+(\xi, \xi_l)} - \frac{k}{2\pi f^+(\xi, \xi_l)} \times \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(iky'(\zeta_n - \xi)) dy',$$

$$C^{\infty,-}(\xi) = \frac{R^-(\xi, \xi_l) e^{ik\Delta(\xi - \xi_l)}}{f^-(\xi, \xi_l)} - \frac{ke^{ik\Delta(\xi - \xi_l)}}{2\pi f^-(\xi, \xi_l)} \times \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(iky'(\zeta_n - \xi)) dy',$$

де c_n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – амплітуди Фур'є поля, відбитого нескінченною ідеально періодичною решіткою. Їх можна знайти, наприклад, методом задачі Рімана–Гільберта або методом сингулярних інтегральних рівнянь [1], [12].

Як і в (36), введемо коефіцієнт корекції

$$T^c = \frac{4\pi}{k} \int_0^\pi (C^{\infty,+}(-\cos \varphi) + C^{\infty,-}(-\cos \varphi) + C(-\cos \varphi)) \sin \varphi^2 d\varphi,$$

який є пропорційним енергії циліндричних хвиль і описує те, наскільки властивості досліджуваної структури відрізняються від властивостей ідеально періодичних решіток.

На рис. 3 наведено залежності T^{coup} і T^c від Δ при різних значеннях періоду. За малої відстані між решітками, $\Delta \rightarrow 2d$, їх взаємодія максимальна, $T^{coup} \rightarrow \max$. У разі ідеально періодичної решітки амплітуда поля корекції рівняється нулю, $|C^{\infty,+}(-\cos\varphi) + C^{\infty,-}(-\cos\varphi) + C(-\cos\varphi)| \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow l$, що й показано на рис. 3. Зі збільшенням відстані між напівнескінченими решітками взаємодія між ними слабшає. У разі досить великого зазору, $\Delta \gg 1$, повне поле можна представити як суму полів ізольованих напівнескінчених решіток, $A \approx R^+ + s^+R^-s^-$. Оскільки залежність полів від Δ описується експонентою $\exp(ik(\xi - \xi_l)\Delta)$ та у разі ортогонального падіння ядра операторів відбиття задовольняють умові $|R^\pm(\xi, \xi_l)| = |R^\pm(-\xi, \xi_l)|$, функція T^c буде практично періодичною з періодом $k\Delta = 2\pi$, що ми й бачимо на рис. 3.

У далекій зоні після застосування методу перевалу [20] до (3), використовуючи асимптотику другого порядку, відбите поле можна представити як суму трьох доданків:

$$H^{sc} = H^p + H^c + H^{erfc}$$

Тут H^p – поле плоских хвиль, відбитих від періодичної частини решіток, амплітуда якого не спадає зі збільшенням $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$; H^c – поле корекції, амплітуда якого спадає як $1/\sqrt{\rho}$ зі збільшенням відстані ρ ; доданок H^{erfc} забезпечує неперервне представлення поля й описується інтегралами Френеля.

Визначимо діаграму спрямованості відбитого поля як $D(\rho, \varphi) = |H^c(\rho, \varphi) + H^{erfc}(\rho, \varphi)|$.

На рис. 4, рис. 5 наведено діаграми спрямованості відбитого поля $D(\rho, \varphi)$ й поля, що опи-

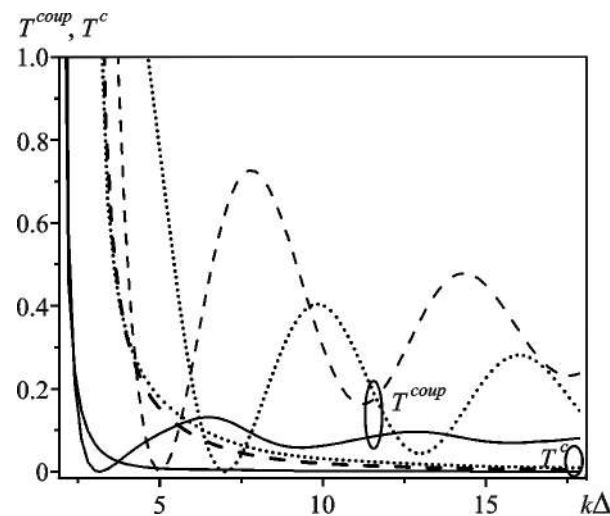


Рис. 3. Залежність T^{coup} і T^c від відстані між решітками при $kd=1$, $kl=\pi$, (суцільні криві); $kd=\pi/2$, $kl=5$ (штрихові криві); $kd=\pi/2$, $kl=7$ (пунктирні криві)

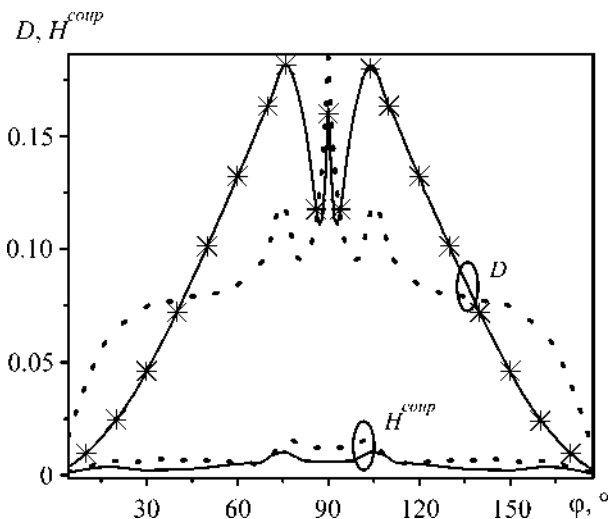


Рис. 4. Поле в далекій зоні при $k\Delta=7.8$ (пунктирні криві) та $k\Delta=11$ (суцільні криві); $kl=5$, $kd=\pi/2$, $k\rho=100$. Маркерами позначені результати, отримані методом сингулярних інтегральних рівнянь

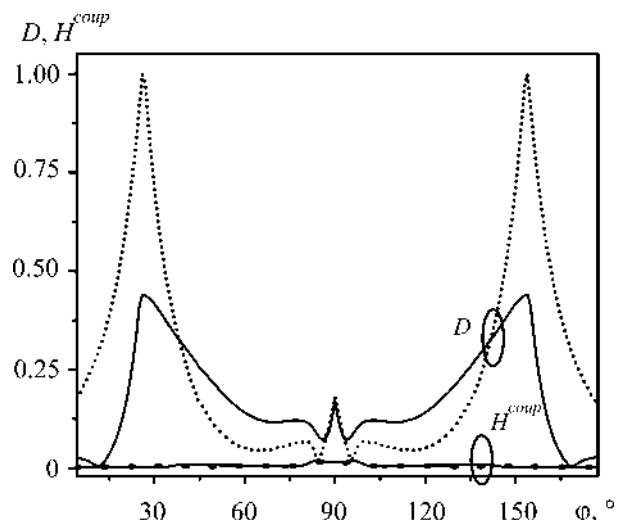


Рис. 5. Поле в далекій зоні при $k\Delta=9.8$ (пунктирні криві) та $k\Delta=13$ (суцільні криві); $kl=7$, $kd=\pi/2$, $k\rho=100$

сує взаємодію двох напівнескінчених решіток, $H^{coup}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} |C(-\cos\varphi)\sin\varphi|$, при фіксованому значенні відстані $k\rho = 100$. Значення відстані між напівнескінченими решітками Δ відповідають максимуму й мінімуму T^c на рис. 3. Діаграми спрямованості нормовано на загальний максимум. Якщо $kl = 7$ у відбитому полі, крім нульової, присутні також ± 1 плоскі хвилі (гармоніки Флоке). У результаті в $D(\rho, \varphi)$ з'являються додаткові максимуми поблизу значень кутів, що відповідають кутам поширення плоских хвиль. На рис. 4 як маркери наведено результати, отримані методом сингулярних інтегральних рівнянь [14]. Спостерігається збіг результатів, що дозволяє судити про їх достовірність. Слід зазначити, що методи, використані в цій роботі і у роботі [14], є строгими. Тому, через зростання числа вузлів можливо досягти збігу результатів з точністю, обмеженою лише округленнями значень під час обчислення за допомогою комп'ютера.

На рис. 6 наведено розподіл повного поля (2) в області поблизу зазору між напівнескінченими решітками. Зазначимо, що поле плоских хвиль, відбитих від решітки в області $y > -d$, існує лише в області $y > -d$, а поле плоских хвиль, відбитих від решітки в області $y < -\Delta + d$, існує лише в області $y < -\Delta + d$. Область $-\Delta + d < y < -d$ – це перехідна область, або область тіні. Поле в ній при $k\rho \gg 1$ описується двома доданками, H^c й H^{efc} . На рис. 6 чітко видно наявність поля плос-

ких хвиль, а також поля циліндричної хвилі в області тіні.

5. Висновки

У роботі з використанням операторного методу отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію H -поляризованої хвилі на двох напівнескінчених стрічкових решітках. Операторні рівняння після виконання процедури регуляризації зведено до інтегральних рівнянь, що містять інтеграли у сенсі головного значення за Коші й скінченної частини за Адамаром. Наведено алгоритм дискретизації.

Досліджено розподіл поля в близькій і далекій зонах при різних параметрах.

Розвинений підхід є ефективним інструментом у розв'язанні низки задач антенної техніки й електроніки надвисоких частот.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. *Дифракция волн на решетках*. Харьков: Издательство ХГУ, 1973. 287 с.
2. Matsushima A., Nakamura Y., and Tomino S. Application of Integral Equation Method to Metal-Plate Lens Structures. *Prog. Electromagn. Res.* 2005. Vol. 54. P. 245–262. DOI: 10.2528/PIER05011401
3. Munk B. A. *Frequency Selective Surfaces: Theory and Design*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 440 p.
4. Фельд Я. Н. Дифракция электромагнитной волны на полубесконечной решетке. *Радиотехника и электроника*. 1958. Т. 13, № 7. С. 882–889.
5. Фельд Я. Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах. *Доклады АН СССР*. 1955. Т. 102, № 2. С. 257–260.
6. Hills N. L and Karp S. N. Semi-Infinite Diffraction Gratings–I. *Commun. Pure Appl. Math.* 1965. Vol. 18, Is. 1-2. P. 203–233. DOI: 10.1002/cpa.3160180119
7. Hills N. L. Semi-Infinite Diffraction Gratings. II. Inward Resonance. *Commun. Pure Appl. Math.* 1965. Vol. 18, Is. 3. P. 389–395. DOI: 10.1002/cpa.3160180302
8. Wasylkiwskyj W. Mutual coupling effects in semi-infinite arrays. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1973. Vol. 21, Is. 3. P. 277–285. DOI: 10.1109/TAP.1973.1140507
9. Nishimoto M. and Ikuno H. Numerical analysis of plane wave diffraction by a semi-infinite grating. *IEEJ Trans. Fundam. Mater.* 2001. Vol. 121, Is. 10. P. 905–910. DOI: 10.1541/ieejfms1990.121.10_905
10. Capolino F. and Albani M. Truncation Effects in a Semi-Infinite Periodic Array of Thin Strips: A Discrete Wiener-Hopf Formulation. *Radio Sci.* 2009. Vol. 44, Is. 2. id RS2S91. DOI: 10.1029/2007RS003821
11. Nishimoto M. and Ikuno H. Analysis of Electromagnetic Wave Diffraction by a Semi-Infinite Strip Grating and Eva-

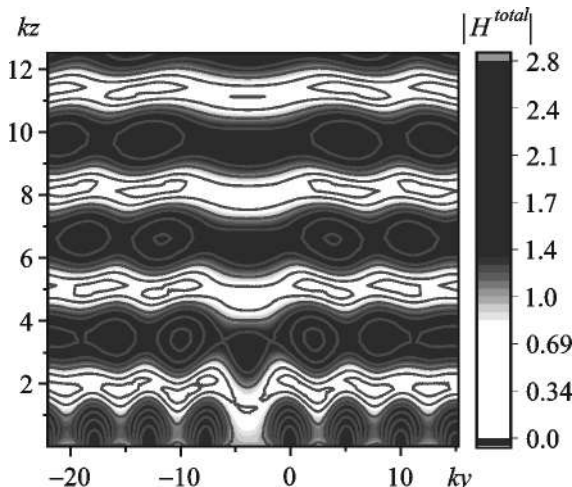


Рис. 6. Розподіл повного поля в близькій зоні $|H^{total}|$ при $kl = 5$, $kd = \pi/2$, $k\Delta = 7.8$

- luation of End-effects. *Prog. Electromagn. Res.* 1999. Vol. 23. P. 39–58. DOI: 10.2528/PIER98101602
12. Kaliberda M., Lytvynenko L., and Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: *H*-polarization case. *Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci.* 2017. Vol. 25, No. 6. P. 4496–4509. DOI: 10.3906/elk-1703-170
 13. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. N., and Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed: *E*-polarization case. *J. Electromagn. Waves Appl.* 2018. Vol. 32, Is. 3. P. 332–346. DOI: 10.1080/09205071.2017.1383943
 14. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. N., and Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of two semi-infinite coplanar gratings of flat PEC strips with arbitrary gap between them. *J. Electromagn. Waves Appl.* 2019. Vol. 33, Is. 12. P. 1557–1573. DOI: 10.1080/09205071.2019.1615996
 15. Литвіненко Л. М., Резник І. І., Литвіненко Д. Л. Дифракція хвиль на напівнескінченних періодичних структурах. *Доповіді АН Української РСР.* 1991. № 6. С. 62–66.
 16. Kaliberda M. E., Litvinenko L. N., and Pogarsky S. A. Operator Method in the Analysis of Electromagnetic Wave Diffraction by Planar Screens. *J. Commun. Technol. Electron.* 2009. Vol. 54, No. 9. P. 975–981. DOI: 10.1134/S1064226909090010
 17. Воробьев С. Н., Литвіненко Л. Н., Просвірин С. Л. Дифракція електромагнітних волн на структурі з кінцевого числа нееквідистантно розположених лент різної ширини. Сравнение спектрального и операторного методов. *Радиофізика і радіоастрономія.* 1996. Т. 1, № 1. С. 110–118.
 18. Vorobyov S. N. and Lytvynenko L. M. Electromagnetic Wave Diffraction by Semi-Infinite Strip Grating. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2011. Vol. 59, Is. 6. P. 2169–2177. DOI: 10.1109/TAP.2011.2143655
 19. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., and Pogarsky S. A. Wave Diffraction by Semi-Infinite Venetian Blind Type Grating. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2013. Vol. 61, Is. 12. P. 6120–6127. DOI: 10.1109/TAP.2013.2281510
 20. Felsen L. B. and Marcuvitz N. *Radiation and Scattering of Waves.* Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1973.
 1. SHESTOPALOV, V. P., LYTVYENKO, L. M., MASALOV, S. A. and SOLOGUB, V. G., 1973. *Wave diffraction by gratings.* Kharkiv, Ukraine: Kharkiv State University Press. (in Russian).
 2. MATSUSHIMA, A., NAKAMURA, Y. and TOMINO, S., 2005. Application of Integral Equation Method to Metal-Plate Lens Structures. *Prog. Electromagn. Res.* vol. 54, pp. 245–262. DOI: 10.2528/PIER05011401
 3. MUNK, B. A., 2000. *Frequency Selective Surfaces: Theory and Design.* New York: John Wiley & Sons, Inc.
 4. FEL'D, Y. N., 1958. Electromagnetic Wave Diffraction by Semi-Infinite Grating. *Radiotekhnika i Elektronika.* vol. 13, no. 7, pp. 882–889. (in Russian).
 5. FEL'D, Y. N., 1955. On infinite systems of linear algebraic equations connected with problems on semi-infinite periodic structures. *Doklady AN USSR.* vol. 102, no. 2, pp. 257–260. (in Russian).
 6. HILLS, N. L. and KARP, S. N., 1965. Semi-Infinite Diffraction Gratings—I. *Commun. Pure Appl. Math.* vol. 18, is. 1-2, pp. 203–233. DOI: 10.1002/cpa.3160180119
 7. HILLS, N. L., 1965. Semi-Infinite Diffraction Gratings. II. Inward Resonance. *Commun. Pure Appl. Math.* vol. 18, is. 3, pp. 389–395. DOI: 10.1002/cpa.3160180302
 8. WASYLKIWSKYJ, W., 1973. Mutual coupling effects in semi-infinite arrays. *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 21, is. 3, pp. 277–285. DOI: 10.1109/TAP.1973.1140507
 9. NISHIMOTO, M. and IKUNO, H., 2001. Numerical analysis of plane wave diffraction by a semi-infinite grating. *IEEJ Trans. Fundam. Mater.* vol. 121, is. 10, pp. 905–910. DOI: 10.1541/ieejfms1990.121.10_905
 10. CAPOLINO, F. and ALBANI, M., 2009. Truncation Effects in a Semi-Infinite Periodic Array of Thin Strips: A Discrete Wiener-Hopf Formulation. *Radio Sci.* vol. 44, is. 2, id RS2S91. DOI: 10.1029/2007RS003821
 11. NISHIMOTO, M. and IKUNO, H., 1999. Analysis of Electromagnetic Wave Diffraction by a Semi-Infinite Strip Grating and Evaluation of End-Effects. *Prog. Electromagn. Res.* vol. 23, pp. 39–58. DOI: 10.2528/PIER98101602
 12. KALIBERDA, M., LYTVYENKO, L. and POGARSKY, S., 2017. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: *H*-polarization case. *Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci.* vol. 25, no. 6, pp. 4496–4509. DOI: 10.3906/elk-1703-170
 13. KALIBERDA, M. E., LYTVYENKO, L. N. and POGARSKY, S. A., 2018. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed: *E*-polarization case. *J. Electromagn. Waves Appl.* vol. 32, is. 3, pp. 332–346. DOI: 10.1080/09205071.2017.1383943
 14. KALIBERDA, M. E., LYTVYENKO, L. N. and POGARSKY, S. A., 2019. Electromagnetic interaction of two semi-infinite coplanar gratings of flat PEC strips with arbitrary gap between them. *J. Electromagn. Waves Appl.* vol. 33, is. 12, pp. 1557–1573. DOI: 10.1080/09205071.2019.1615996
 15. LYTVYENKO, L. M., REZNIK, I. I. and LYTVYENKO, D. L., 1991. Wave scattering by semi-infinite periodic structure. *Doklady AN Ukr. SSR.* no. 6, pp. 62–67. (in Russian).
 16. KALIBERDA, M. E., LITVINENKO, L. N. and POGARSKY, S. A., 2009. Operator Method in the Analysis of Electromagnetic Wave Diffraction by Planar Screens. *J. Commun. Technol. Electron.* vol. 54, no. 9, pp. 975–981. DOI: 10.1134/S1064226909090010
 17. VOROBYOV, S. N., LITVINENKO, L. N. and PROSVIRIN, S. L., 1996. Electromagnetic Wave Diffraction by Finite Extent Structure Consisting of Nonequidistant Strips Having Different Width. Comparison of Full-Wave Spectral and Operator Method. *Radio Phys. Radio Astron.* vol. 1, no. 1, pp. 110–118. (in Russian).
 18. VOROBYOV, S. N. and LYTVYENKO, L. M., 2011. Electromagnetic Wave Diffraction by Semi-Infinite Strip Grating. *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 59, is. 6, pp. 2169–2177. DOI: 10.1109/TAP.2011.2143655
 19. LYTVYENKO, L. M., KALIBERDA, M. E. and POGARSKY, S. A., 2013. Wave Diffraction by Semi-Infinite Venetian Blind Type Grating. *IEEE Trans. Anten-*

nas Propag. vol. 61, is. 12, pp. 6120–6127. DOI: 10.1109/TAP.2013.2281510

20. FELSEN, L. B. and MARCUVITZ, N., 1973. *Radiation and Scattering of Waves*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall.

M. E. Kaliberda^{1,2}, *L. M. Lytvynenko*^{1,2}, and *S. A. Pogarsky*^{1,2}

¹ V. N. Karazin Kharkiv National University,
4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

² Institute of Radio Astronomy,
National Academy of Sciences of Ukraine,
4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine

OPERATOR METHOD IN THE PROBLEM OF THE *H*-POLARIZED WAVE DIFFRACTION BY TWO SEMI-INFINITE GRATINGS PLACED IN THE SAME PLANE

Purpose: Problem of the *H*-polarized plane wave diffraction by the structure, which consists of two semi-infinite strip gratings, is considered. The gratings are placed in the same plane. The gap between the gratings is arbitrary. The purpose of the paper is to develop the operator method to the structures, which scattered fields have both discrete and continuous spatial spectra.

Design/methodology/approach: In the spectral domain, in the domain of the Fourier transform, the scattered field is expressed in terms of the unknown Fourier amplitude. The field reflected by the considered structure is represented as a sum of two fields of currents on the strips of semi-infinite gratings. The operator equations are obtained for the

Fourier amplitudes. These equations use the operators of reflection of semi-infinite gratings, which are supposed to be known. The field scattered by a semi-infinite grating can be represented as a sum of plane and cylindrical waves. The reflection operator of a semi-infinite grating has singularities at the points, which correspond to the propagation constants of plane waves. Consequently, the unknown Fourier amplitudes of the field scattered by the considered structure also have singularities. To eliminate these latter, the regularization procedure has been carried out. As a result of this procedure, the operator equations are reduced to the system of integral equations containing the integrals, which should be understood as the Cauchy principal value and Hadamard finite part integrals. The discretization has been carried out. As a result, the system of linear equations is obtained, which is solved with the use of the iterative procedure.

Findings: The operator equations with respect to the Fourier amplitudes of the field scattered by the structure, which consists of two semi-infinite gratings, are obtained. The computational investigation of convergence has been made. The near and far scattered fields are investigated for different values of the grating parameters.

Conclusions: The effective algorithm to study the fields scattered by the strip grating, which has both discrete and continuous spatial spectra, is proposed. The developed approach can be an effective instrument in solving a series of problems of antennas and microwave electronics.

Key words: semi-infinite grating, operator method, singular integral, hypersingular integral, regularization procedure

Стаття надійшла до редакції 23.06.2021