

## ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД В ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА КІЛЬЦЕВІЙ ЩІЛИНІ В ПЛОЩИНІ АБО НА КІЛЬЦІ

Предмет і мета роботи: Розглядається задача про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевій щілині в ідеально провідній нескінченно тонкій площині. Як дуальна до неї розглядається також задача про дифракцію на ідеально провідному плоскому нескінченно тонкому кільці. Мета роботи полягає у розвиненні операторного методу для аксіально-симетричної структури, розташованої у вільному просторі.

Методи і методологія: Задача розглядається в спектральній області. Розсіяне поле виражається через невідомі амплітуди Фур'є (спектральні функції). Кільцева щілина надається у вигляді сполучення двох простіших неоднорідностей, а саме круглого диску і круглого отвору в площині, які взаємодіють одна з одною. Амплітуда Фур'є розсіяного поля знаходиться як сума двох амплітуд – амплітуди Фур'є поля струмів, що течуть диском, і амплітуди Фур'є поля струмів, що течуть ідеально провідною площиною з круглим отвором. Для цих амплітуд записано операторні рівняння, які враховують електромагнітний зв'язок диску з отвором в площині. Рівняння використовують оператори відбиття окремого ізоляованого диску і окремого отвору в площині. Вони вважаються відомими і можуть бути знайдені, наприклад, методом моментів. Оператори відбиття можуть мати особливості. Після перетворень отримано рівняння, еквівалентні інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, які можуть бути розв'язані чисельно.

Результати: Отримано операторні рівняння відносно амплітуд Фур'є поля, розсіяного розглянутою структурою. Досліджено розсіяні поля в далекій зоні для кільцевої щілини і кільця за різних значень параметрів.

Висновки: Отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію електромагнітної хвилі на кільцевій щілині в площині і на кільці. Задачу зведено до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Досліджено розподіл поля в далекій зоні за різних параметрів. Розвинений підхід є ефективним інструментом для розв'язання низки задач антенної техніки.

Ключові слова: круглий отвір, диск, кільцева щілина, кільце, операторний метод, дифракція

### 1. Вступ

Задачі про дифракцію на аксіально-симетричних розсіювачах, наприклад на диску або кільці, виникають при створенні антенних систем [1–3]. Крім чисто числових методів розв'язання цих задач, таких як метод сіток або метод скінчених елементів, які використовують наближені умови випромінення і точність яких обмежена кількома знаками, можна виділити декілька строгих підходів. Один з них базується на методі граничних інтегральних рівнянь. В [4] розглянуто дифракцію акустичної хвилі на кільці у випадку граничної умови Діріхле. Отримано інтегральне рівняння першого роду з логарифмічною особливістю. В роботі [5] отримано інтегральні рівняння Фредгольма першого роду для струмів, які збуджуються на ідеально провідному кільці. В [6] запропоновано схему зведення інтегральних рівнянь першого роду до рівнянь другого

роду та розглянуто дифракцію на концентричній скінченній системі кілець. Двоперіодичні решітки з круглих отворів та кільцевих щілин у екрані, розташованому на діелектричній підкладці, розглянуто у [7] з використанням суматорних рівнянь, які розв'язувалися методом Гальоркіна.

Асимптотичні методи дозволяють дослідити базові фізичні явища за набагато менший комп'ютерний час. У [8] розглянуто наближений розв'язок задачі про дифракцію на кільці, радіуси якого значно перевищують довжину хвилі.

Ще один підхід базується на операторному методі. Основна ідея полягає в тому, щоб розглянути складну неоднорідність як об'єднання більш простих. Якщо оператори розсіяння кожного поодинокого простого елемента вважати відомими, то властивості всієї структури можна визначити з операторних рівнянь. Раніше операторний метод успішно застосовувався для дослідження структур зі стрічок або щілин в екрані, ребра яких пара-

лельні осям декартової системи координат [9, 10]. У роботах [11, 12] з використанням операторного методу розглянуто скалярну задачу про дифракцію на кільцевому отворі в екрані або на кільці у випадку граничних умов Діріхле і Неймана.

Метою цієї роботи є розв'язання операторного методу для розв'язання задачі дифракції електромагнітних хвиль на кільцевих неоднорідностях у вільному просторі.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо задачу про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевому отворі в нескінченно тонкому ідеально провідному екрані або на ідеально провідному кільці. Ці дві задачі є дуальними. Тому для визначеності далі отримаємо рівняння лише для отвору в екрані.

Розташуємо екран з отвором у площині  $z = 0$  декартової системи координат. Менший та більший радіуси позначимо як  $r_d$  і  $r_h$ ,  $r_d < r_h$ . Припустимо, що плоска хвиля падає з області  $z > 0$  та має такі дотичні компоненти електричного поля:

$$\begin{pmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \exp(-ik(Ax + By + \gamma(A, B)z)), \quad (1)$$

де  $q = (q_x, q_y)^*$  – вектор амплітуди Фур'є падаючого поля;  $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число;  $\gamma(A, B) = \sqrt{1 - A^2 - B^2} = \cos \theta_0$  і  $\text{Re} \gamma \geq 0$ ,  $\text{Im} \gamma \geq 0$ ,  $A = \cos \alpha$ ,  $B = \cos \beta$ , кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta_0$  – це кути падаючої хвилі відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . Геометрія структури і позначення наведено на рис. 1. Залежність полів від часу візьмемо у вигляді  $\exp(-i\omega t)$ , де  $\omega$  – кругова частота, і надалі будемо пропускати.

Повне поле шукаємо як суму падаючого і розсіяного полів,

$$E^{total} = E^i + E^{sc}.$$

Дотичні компоненти розсіяного електричного поля надамо у вигляді інтеграла Фур'є (суперпозиції плоских хвиль):

$$E_{\Theta}^{sc}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\Theta}^E(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi)z)) d\xi_x d\xi_y, \quad \Theta = x, y, \quad z > 0, \quad (2)$$

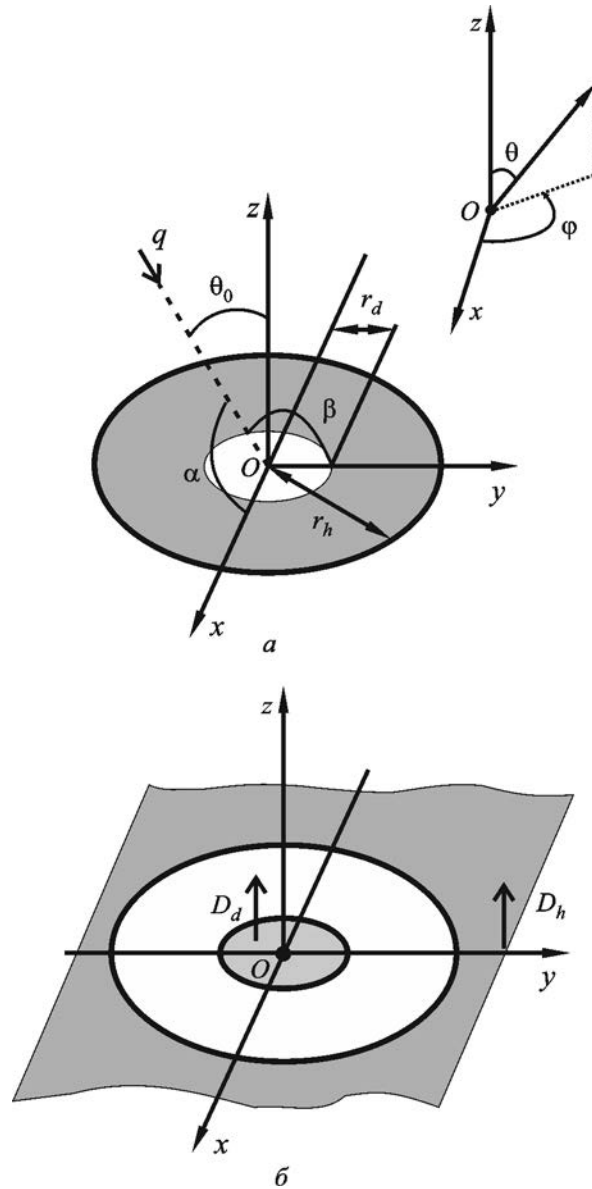


Рис. 1. Геометрія досліджуваної структури: а – кільце, б – кільцева щілина

де  $D_{\Theta}^E(\xi_x, \xi_y)$  – невідомі амплітуди Фур'є або спектральні функції. Всі інші компоненти електромагнітного поля можна знайти з рівнянь Максвелла.

## 3. Розв'язання задачі

Зазначимо, що кільцеву щілину у ідеально провідній площині можна представити як об'єднання двох ключових неоднорідностей. Одна з них – це ідеально провідний диск радіусу  $r_d$ , а друга – круговий отвір радіуса  $r_h$  у ідеально провідній площині. У разі використання операторного ме-

тому необхідно знати оператори розсіяння цих двох об'єктів. Далі ми стисло опишемо алгоритм їх визначення методом моментів [13, 14].

### 3.1. Оператори розсіяння диска і кругового отвору у площині

У роботах [13, 14] надано розв'язок задачі про дифракцію на диску або отворі у площині. Передбачається, що хвильовий вектор лежить у площині  $xOz$  ( $\beta = 90^\circ$ ). Довільний випадок можна отримати з використанням афінних перетворень обернення системи координат навколо осі  $Oz$ . Невідомі спектральні функції надаються як сума інтегралів від функцій Бесселя з невідомими коефіцієнтами. Електромагнітні поля виражаються за допомогою векторів Герца (електричного у випадку диска і магнітного у випадку отвору). Задача зводиться до розв'язання двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A_n^m$  і  $B_n^m$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^m S_n^m(r, 0) = -(i)^m J_m(kr \sin \alpha),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^m S_n^m(r, 0) = \frac{J_m(kr)}{2 - \delta_{m,0}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $S_n^m(r, z) = -i\sqrt{ka} \times \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi} J_m(kr\xi) J_{m+2n+1/2}(ka\xi) \exp(ik|z|\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$ ,  
 $J_m(x)$  – функція Бесселя порядку  $m$ ;  $a = r_d$  у випадку диска або  $a = r_h$  у випадку отвору;  $\delta_{m,n}$  – символ Кронекера;  $S_n^m(r, z) = S_n^{-m}(r, z)$ ,  $A_n^m = A_n^{-m}$ ,  $B_n^m = B_n^{-m}$ .

Дотичні компоненти векторів Герца  $\Pi_\Theta$  розсіяного поля виражаються у вигляді суперпозиції циліндричних хвиль:

$$\Pi_\Theta(r, \varphi, z) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q_\Theta^m \exp(im\varphi) \times \int_0^{\infty} \frac{\xi a_n^{m|}(\xi) J_m(kr\xi) \exp(ik|z|\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad (3)$$

де  $Q_\Theta^m$  залежить від коефіцієнтів  $A_n^{m|}$ ,  $B_n^{m|}$  та амплітуди падаючого поля,  $\Theta = x, y$ ;

$$a_n^m(\xi) = \frac{(-i)^{m+1} \sqrt{ka} J_{m+2n+1/2}(ka\xi)}{2\pi \sqrt{\xi}}; \quad m > 0.$$

Для подальшого розв'язання задачі операторним методом необхідно надати (3) у вигляді плоских хвиль. Для цього, використовуючи надання функції Бесселя у вигляді  $J_m(x) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \exp(i(x \cos \psi - m\psi)) d\psi$ , остаточно можна записати

$$\Pi_\Theta(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q_\Theta^m \exp(im \text{Arcctg}(\xi_x, \xi_y)) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n^{m|} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{\gamma(\xi_x, \xi_y)} \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)|z|)) d\xi, \quad (4)$$

де функція  $\text{Arcctg}(\xi_x, \xi_y)$  забезпечує взаємно однозначне перетворення циліндричних координат до декартових,

$$\text{Arcctg}(\xi_x, \xi_y) = \begin{cases} \text{arctg}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right), & \text{при } \xi_y \geq 0; \\ \pi + \text{arctg}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right), & \text{при } \xi_y < 0. \end{cases}$$

Вираз (4) дозволяє поставити у відповідність амплітуді Фур'є падаючої хвилі амплітуду Фур'є плоскої хвилі, поширюваної у напрямку, який визначається косинусами  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  і  $\gamma(\xi_x, \xi_y)$  комплексних кутів.

Введемо оператори відбиття одиночного ізолюваного диску  $R_d$  і ізолюваного отвору у площині  $R_h$ ,

$$R_j = \begin{pmatrix} R_{j,xx} & R_{j,xy} \\ R_{j,yx} & R_{j,yy} \end{pmatrix}, \quad j = d, h.$$

У випадку, якщо падаюче на ізолюваний диск або отвір поле надається формулою (1), розсіяне поле можна знайти за формулами

$$A_j = R_j q, \quad j = d, h, \quad (5)$$

де  $A_d = (A_{d,x}, A_{d,y})^*$ ,  $A_h = (A_{h,x}, A_{h,y})^*$  – амплітуди Фур'є розсіяного диском або отвором поля.

У розгорнутій формі (5) має вигляд

$$A_{j,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = R_{j,\Theta,x}(\xi_x, \xi_y, A, B) q_x +$$

$$+R_{j,\Theta,y}(\xi_x, \xi_y, A, B)q_y, \quad j = d, h, \quad \Theta = x, y,$$

де ядра операторів  $R_j$  позначені похилим шрифтом. Поле, відбите ізольованими ключовими неоднорідностями, пов'язане з операторами відбиття за допомогою інтеграла Фур'є та формул (5):

$$E_{\Theta}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{j,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp\left(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)\right) d\xi_x d\xi_y, \quad z > 0, \quad \Theta = x, y.$$

### 3.2. Операторні рівняння

Отримаємо операторні рівняння для знаходження амплітуди Фур'є  $D^E = (D_x^E, D_y^E)^*$  розсіяного поля (2).

Поле, розсіяне кільцевою щілиною, надамо як суму двох полів. Перше поле, випромінене струмами, які течуть диском радіусом  $r_d$ , має амплітуду Фур'є  $D_d$ . Друге поле, випромінене струмами, які течуть площиною з круглою щілиною радіусом  $r_h$ , має амплітуду Фур'є  $D_h$ . Тоді  $D^E = D_d + D_h$ . Так само поле з амплітудою Фур'є  $D_d$  можна надати як суперпозицію двох полів, а саме: поля падаючої плоскої хвилі, відбитої диском, з амплітудою  $R_d q$ , і поля, випроміненого площиною з отвором і відбитого диском, з амплітудою  $R_d D_h$ . Поле з амплітудою Фур'є  $D_h$  також можна надати як суперпозицію двох полів, а саме: поля падаючої плоскої хвилі, відбитої площиною із отвором, з амплітудою  $R_h q$  і поля, випроміненого диском і відбитого площиною із отвором, з амплітудою  $R_h D_d$ . В результаті можна отримати такі операторні рівняння:

$$D_d = R_d D_h + R_d q, \quad (6)$$

$$D_h = -R_h D_d + R_h q. \quad (7)$$

Знак мінус у рівнянні (7) пов'язаний зі співвідношеннями між векторами Герца та компонентами електричного поля, а також з тим, що хвилі з амплітудами  $q$  і  $D_d$  поширюються у протилежних напрямках осі  $Oz$ .

Зі співвідношення між векторами Герца та компонентами електричного поля, а також з виразу (4) впливає, що функція  $D_d$  і ядро оператора  $R_d$  мають кореневу особливість:

$$D_{d,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = \frac{D_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y)}{\gamma(\xi_x, \xi_y)}, \quad (8)$$

$$R_{d,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y) = \frac{R_{1,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y)}{\gamma(\xi_x, \xi_y)}, \quad \Theta, \Xi = x, y, \quad (9)$$

де  $D_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y)$ ,  $R_{1,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y)$  – регулярні функції. Оскільки поле плоскої хвилі, відбите площиною із кільцевою щілиною, можна надати як суму плоскої хвилі з тією самою амплітудою, але протилежною за знаком, та циліндричних хвиль, функцію  $D_h$  і оператор  $R_h$  можна представити як

$$R_h = R_2 - I, \quad (10)$$

$$D_{h,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = D_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) - \delta(\xi_x, \xi_y), \quad \Theta = x, y, \quad (11)$$

де  $I$  – одиничний оператор,  $\delta(\xi_x, \xi_y)$  – дельта-функція.

Підставляючи (8)–(11) у (6), (7), остаточно отримуємо рівняння для знаходження амплітуди Фур'є  $D_1$ :

$$D_1 = -R_1 R_2 \Gamma D_1 - R_1 \Gamma D_1 + R_1 \Gamma R_2 q, \quad (12)$$

де дія оператора  $\Gamma$  зводиться до множення на  $1/\gamma(\xi_x, \xi_y)$ .

Після того як  $D_1$  знайдено з рівняння (12), амплітуду Фур'є розсіяного поля (2) можна знайти зі співвідношення

$$D^E = D_d + D_h = -R_2 \Gamma D_1 + R_2 q - q.$$

Операторне рівняння (12) еквівалентне інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду. Інтеграли у (12) можуть містити кореневу інтегровану особливість.

### 4. Числові результати

Розглянемо розсіяне поле в дальній зоні в задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевій щілині. Для того щоб отримати значення дотичних компонент електричного поля в дальній зоні, застосуємо асимптотичне представлення для інтегралу (2) при  $r \rightarrow \infty$ , де  $r$  – це відстань від щілини до точки спостереження у сферичній системі координат. Визначимо діаграму спрямованості за формулою

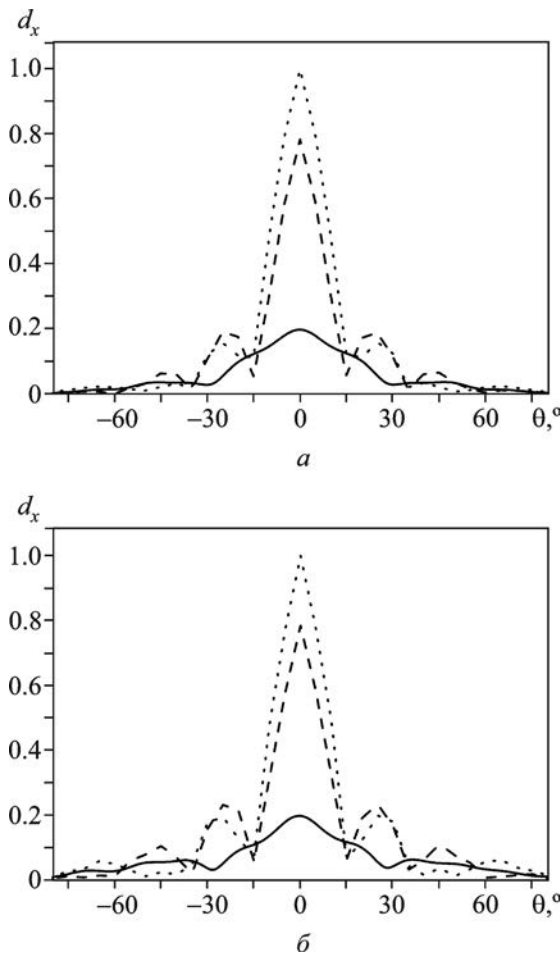
$$d_{\Theta}(\varphi, \theta) = \left| D_{\Theta}^E(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta) + q_{\Theta} \right| \times \\ \times \gamma(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta), \quad \Theta = x, y,$$

де  $\varphi$  – полярний кут, який відраховується від осі  $Ox$ ;  $\theta$  – кут відносно осі  $Oz$ .

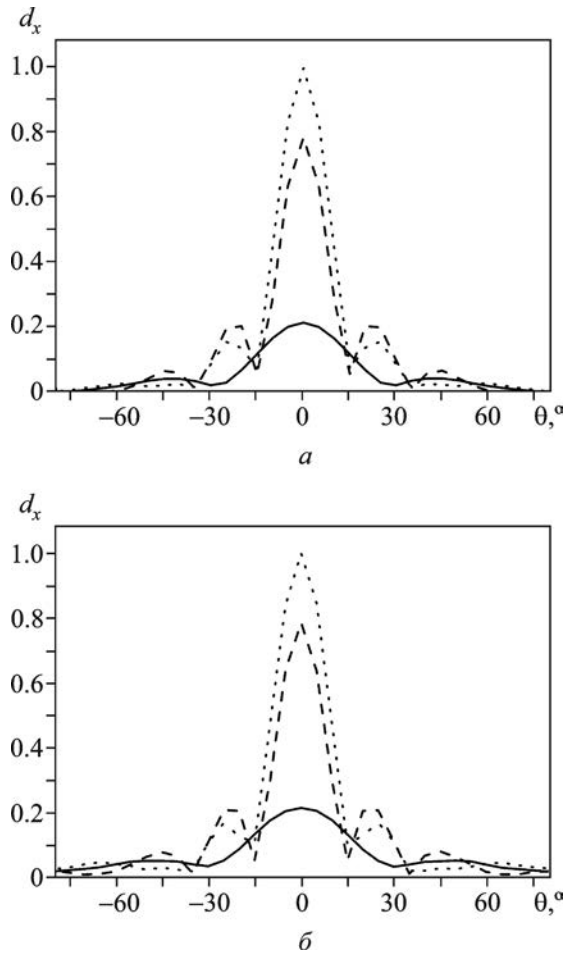
На рис. 2 зображено нормовані діаграми спрямованості у випадку кільцевої щілини в площині. Діаграми нормовано на загальний максимум.

На рис. 3 зображено нормовані діаграми спрямованості для кільця. Плоска хвиля падає ортогонально з амплітудою  $q_x = 1, q_y = 0$  (вектор електричного поля паралельний осі  $Ox$ ).

У випадку кільця використовувались такі вирази, що пов'язують амплітуди Фур'є дотичних компонент електричного і магнітного полів:



**Рис. 2.** Нормовані діаграми спрямованості  $d_x(\varphi, \theta)$  у випадку кільцевої щілини у площині при  $r_d = \lambda/2, r_h = \lambda$  (суцільні криві);  $r_d = \lambda, r_h = 2\lambda$  (штрихові криві) та  $r_d = \lambda/2, r_h = 2\lambda$  (пунктирні криві);  $q_x = 1, q_y = 0$ , ортогональне падіння,  $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_0 = 0^\circ$ :  $a - \varphi = 0^\circ, b - \varphi = 90^\circ$



**Рис. 3.** Нормовані діаграми спрямованості  $d_x(\varphi, \theta)$  у випадку кільця при  $r_d = \lambda/2, r_h = \lambda$  (суцільні криві);  $r_d = \lambda, r_h = 2\lambda$  (штрихові криві) та  $r_d = \lambda/2, r_h = 2\lambda$  (пунктирні криві);  $q_x = 1, q_y = 0$ , ортогональне падіння,  $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_0 = 0^\circ$ :  $a - \varphi = 0^\circ, b - \varphi = 90^\circ$

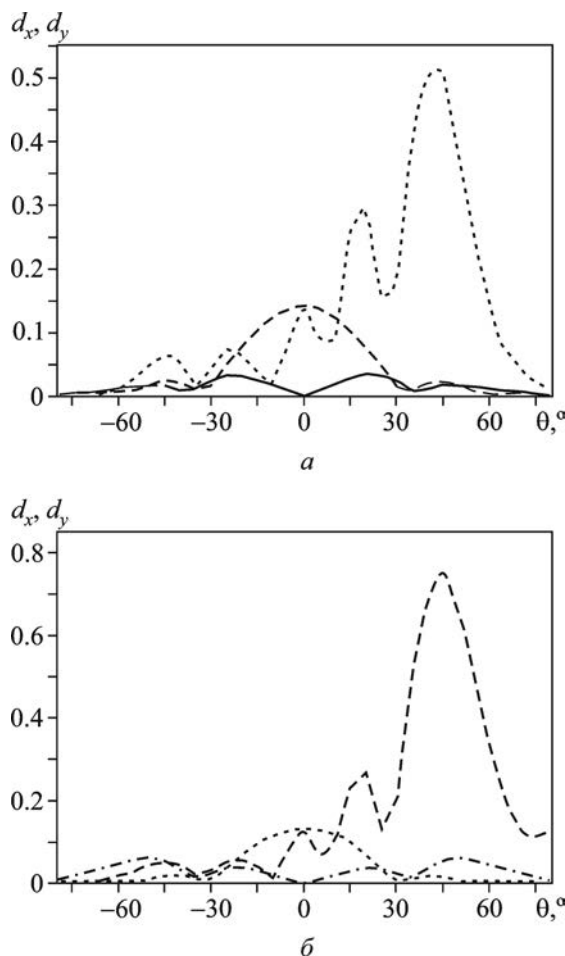
$$D_x^E(\xi_x, \xi_y) = \\ = \frac{\xi_x \xi_y D_x^H(\xi_x, \xi_y) + (1 - \xi_x^2) D_y^H(\xi_x, \xi_y)}{Z_0 \gamma(\xi_x, \xi_y)}, \\ D_y^E(\xi_x, \xi_y) = \\ = \frac{\xi_x \xi_y D_y^H(\xi_x, \xi_y) + (1 - \xi_y^2) D_x^H(\xi_x, \xi_y)}{Z_0 \gamma(\xi_x, \xi_y)},$$

де хвильовий опір вакууму  $Z_0 = 120\pi$  Ом; верхній індекс “E” або “H” означає, що амплітуда відповідає електричному або магнітному полю.

У разі ортогонального падіння максимум головного пелюстка діаграми спрямованості спостерігається при  $\theta = 0^\circ$ . Зі збільшенням площини

поверхні кільця або щілини збільшується значення максимуму. Криві на рисунках для кутів  $\varphi = 0^\circ$  і  $\varphi = 90^\circ$  відрізняються несуттєво. З ортогональним падінням  $E_y = 0$  при  $\varphi = 0^\circ$  і  $\varphi = 90^\circ$ .

На рис. 4 зображено нормовані діаграми спрямованості з падінням плоскої хвилі під кутом  $\theta_0 = -45^\circ$ . Кут нахилу головного пелюстка становить  $\theta = 45^\circ$ . Максимум головного пелюстка набуває меншого значення, ніж у разі ортогонального падіння. У випадку  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  при  $\varphi = 0^\circ$  маємо  $d_y = 0$ . Якщо ж  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  при  $\varphi = 90^\circ$  маємо  $d_x = 0$ .



**Рис. 4.** Нормовані діаграми спрямованості у випадку кільця –  $d_x(\varphi, \theta)$ ,  $\varphi = 90^\circ$  (пунктирні криві);  $d_x(\varphi, \theta)$ ,  $\varphi = 90^\circ$  (штрихові криві);  $d_y(\varphi, \theta)$ ,  $\varphi = 90^\circ$  (штрих-пунктирна крива на нижній панелі);  $d_y(\varphi, \theta)$ ,  $\varphi = 90^\circ$  (суцільна крива на верхній панелі);  $r_d = \lambda$ ,  $r_h = 2\lambda$ ,  $q_x = 1$ ,  $q_y = 0$ , падіння під кутом:  $a$  –  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  (у цьому випадку  $d_y = 0$  при  $\varphi = 0^\circ$ );  $b$  –  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  (у цьому випадку  $d_x = 0$  при  $\varphi = 90^\circ$ )

## 5. Висновки

У роботі з використанням операторного методу отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію електромагнітної хвилі на кільцевій щілині в площині і на кільці. Задачу зведено до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Досліджено розподіл поля в дальній зоні за різних параметрів. Розвинений підхід є ефективним інструментом для розв'язку низки задач антенної техніки.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Black D. N. and Wiltse J. C. Millimeter-Wave Characteristics of Phase-Correcting Fresnel Zone Plates. *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 1987. Vol. 35, Is. 12. P. 1122–1129. DOI: 10.1109/TMTT.1987.1133826
2. Ji Y. and Fujita M. Design and Analysis of a Folded Fresnel Zone Plate Antenna. *Int. J. Infrared Milli. Waves.* 1994. Vol. 15, Is. 8. P. 1385–1406. DOI: 10.1007/BF02096066
3. Saidoglu N. Y. and Nosich A. I. Method of analytical regularization in the analysis of axially symmetric excitation of imperfect circular disk antennas. *Comput. Math. Appl.* 2020. Vol. 79, Is. 10. P. 2872–2884. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.12.020
4. Dikmen F., Karachuha E., and Tuchkin Y. A. Scalar Wave Diffraction by a Perfectly Soft Infinitely Thin Circular Ring. *Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci.* 2001. Vol. 9, No. 2. P. 199–219.
5. Агафонова М. А. Методи інтегральних рівнянь в задачах дифракції на полосе и щели. *T-comm – Телекомунікації и транспорт.* 2013. № 11. С. 21–24.
6. Dikmen F. and Tuchkin Y. A. Analytical Regularization Method for Electromagnetic Wave Diffraction by Axially Symmetrical Thin Annular Strips. *Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci.* 2009. Vol. 17, No. 2. P. 107–124. DOI: 10.3906/elk-0811-10
7. Казьмин И. А., Лерер А. М., Шевченко В. Н. Дифракция электромагнитной волны на двумерно периодической решетке из круглых и кольцевых отверстий. *Радиотехника и электроника.* 2008. Т. 53, № 2. С. 191–197.
8. Li S. and Scharstein R. W. High Frequency Scattering by a Conducting Ring. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2005. Vol. 53, Is. 6. P. 1927–1938. DOI: 10.1109/TAP.2005.848506
9. Lytvynenko L. M. and Prosvirnin S. L. Wave reflection by a periodic layered metamaterial. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 2009. Vol. 46, No. 3. id. 32608. DOI: 10.1051/epjap:2008128
10. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. М., Погарский С. О. Операторный метод в задачі про дифракцію  $H$ -поляризованої хвилі на двох однакових напівнескінченних решітках, розташованих в одній площині. *Радіофізика і радіоастрономія.* Т. 26, № 3. С. 239–249. DOI: 10.15407/rpra26.03.239
11. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Операторный метод в скалярной задаче дифракции на

- аксильно-симметричных неоднородностях в экране. *Радіофізика і радіоастрономія*. Т. 23, № 1. С. 36–42. DOI: 10.15407/rpra23.01.036
12. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., and Lytvynenko L. M. Operator Method in Scalar Wave Scattering by Circular Slot in Screen in Case of Dirichlet Conditions. In: *Proceedings of the 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*. (21-25 Sept, 2020. Kharkiv, Ukraine). 2020. P. 1–4. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252632
  13. Nomura Y. and Katsura S. Diffraction of Electromagnetic Waves by Circular Plate and Circular Hole. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1955. Vol. 10, No. 4. P. 285–304. DOI: 10.1143/JPSJ.10.285
  14. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Хижняк А. Н. *Полубрацение оператора с использованием метода моментов в задачах дифракции волн на структурах из тонких дисков*. Препринт № 19. Радиоастрономический институт Академии наук УССР. 1988. 31 с.
- ## REFERENCES
1. BLACK, D. N. and WILTSE, J. C., 1987. Millimeter-Wave Characteristics of Phase-Correcting Fresnel Zone Plates. *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* vol. 35, is. 12, pp. 1122–1129. DOI: 10.1109/TMTT.1987.1133826
  2. JI, Y. and FUJITA, M., 1994. Design and Analysis of a Folded Fresnel Zone Plate Antenna. *Int. J. Infrared Milli. Waves.* vol. 15, is. 8, pp. 1385–1406. DOI: 10.1007/BF02096066.
  3. SAIDOGLU, N. Y. and NOSICH, A. I., 2020. Method of analytical regularization in the analysis of axially symmetric excitation of imperfect circular disk antennas. *Comput. Math. Appl.* vol. 79, is. 10, pp. 2872–2884. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.12.020
  4. DIKMEN, F., KARACHUHA, E. and TUCHKIN, Y. A., 2001. Scalar Wave Diffraction by a Perfectly Soft Infinitely Thin Circular Ring. *Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci.* vol. 9, no. 2, pp. 199–219.
  5. AGAFONOVA, M. A., 2013. Methods of Integral Equations in Problems of Diffraction on Strip and Slots. *T-comm.* no. 11, pp. 21–24. (in Russian).
  6. DIKMEN, F. and TUCHKIN, Y. A., 2009. Analytical Regularization Method for Electromagnetic Wave Diffraction by Axially Symmetrical Thin Annular Strips. *Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci.* vol. 17, no. 2, pp. 107–124. DOI: 10.3906/elk-0811-10
  7. KAZ' MIN, I. A., LERER, A. M. and SHEVCHENKO, V. N., 2008. Electromagnetic-Wave Diffraction by a 2D Periodic Grating of Circular and Ring Slots. *J. Commun. Technol. Electron.* vol. 53, no. 2, pp. 177–183. DOI: 10.1134/S1064226908020071
  8. LI, S. and SCHARSTEIN, R. W., 2005. High Frequency Scattering by a Conducting Ring. *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 53, is. 6, pp. 1927–1938. DOI: 10.1109/TAP.2005.848506
  9. LYTVYENENKO, L. M. and PROSVIRNIN, S. L., 2009. Wave reflection by a periodic layered metamaterial. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* vol. 46, no. 3, id. 32608. DOI: 10.1051/epjap:2008128
  10. KALIBERDA, M. E., LYTVYENENKO, L. M. and POGARSKY, S. A., 2021. Operator Method in the Problem of the *H*-Polarized Wave Diffraction by Two Semi-Infinite Gratings Placed in the Same Plane. *Radio Phys. Radio Astron.* vol. 26, no. 3, pp. 239–249. (in Ukrainian). DOI: 10.15407/rpra26.03.239
  11. KALIBERDA, M. E., LYTVYENENKO, L. M. and POGARSKY, S. A., 2018. Operator Method in the Scalar Wave Diffraction by Axially-Symmetric Discontinuities in the Screen. *Radio Phys. Radio Astron.* vol. 23, no. 1, pp. 36–42. (in Russian). DOI: 10.15407/rpra23.01.036
  12. KALIBERDA, M. E., POGARSKY, S. A. and LYTVYENENKO, L. M., 2020. Operator Method in Scalar Wave Scattering by Circular Slot in Screen in Case of Dirichlet Conditions. In: *2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW) Proceedings*. Kharkiv, Ukraine, 21-25 Sept., 2020. pp. 1–4. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252632
  13. NOMURA, Y. and KATSURA, S., 1955. Diffraction of Electromagnetic Waves by Circular Plate and Circular Hole. *J. Phys. Soc. Jpn.* vol. 10, no. 4, pp. 285–304. DOI: 10.1143/JPSJ.10.285
  14. LYTVYENENKO, L. M., PROSVIRNIN, S. L. and KHIZHNYAK, A. N., 1988. *Semiinversion of the Operator with the Using of Method of Moments in the Scattering Problems by the Structures Consisting of the Thin Disks*. Preprint No. 19. Institute of Radio Astronomy, Academy of Sciences of Ukrainian SSR. 31 p. (in Russian).
- M. E. Kaliberda*<sup>1,2</sup>, *L. M. Lytvynenko*<sup>1,2</sup>, and *S. A. Pogarsky*<sup>1,2</sup>
- <sup>1</sup> V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- <sup>2</sup> Institute of Radio Astronomy, National Academy of Sciences of Ukraine, 4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine
- ## OPERATOR METHOD IN THE PROBLEM OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY AN ANNULAR SLOT IN THE PLANE OR BY A RING
- Purpose:* The problem of a plane electromagnetic wave diffraction by an annular slot in the perfectly conducting zero thickness plane is considered. As a dual problem, the problem of diffraction by a perfectly conducting zero thickness ring is also considered. The paper aims at developing the operator method for the axially symmetric structures placed in free space.
- Design/methodology/approach:* The problem is considered in the spectral domain. The scattered field is expressed in terms of unknown Fourier amplitudes (spectral functions). The annular slot is given as a unity of two simple discontinuities, namely of a disk and a circular hole in the plane, which interact with each other. The Fourier amplitude of the scattered field is sought as a sum of two amplitudes, the Fourier amplitude of the field of currents on the disk and Fourier amplitude of the field of currents on the perfectly conducting plane with circular hole. The operator equations are written for these amplitudes, which take into account the electromagnetic coupling of the disk and the hole in the plane. The

equations use the reflection operators of a single isolated disk and a single hole in the plane. They are supposed to be known and can be obtained for example by the method of moments. The reflection operators can have singularities. After transformations, the equations are obtained, which are equivalent to the Fredholm integral equations of second kind and they can be solved numerically.

*Findings:* The operator equations relative to the Fourier amplitudes of the field scattered by the discussed structure are obtained. The far zone scattered field for an annular slot and a ring for different values of parameters are studied.

*Conclusions:* The rigorous solution of the problem of the electromagnetic wave diffraction by an annular slot in the plane and by a circular ring is obtained. The problem is reduced to the Fredholm integral equations of second kind. The far field distribution for different parameters is studied. The developed approach is an effective instrument for a number of problems of antenna technique to be solved.

*Key words:* circular hole, disk, annular slot, ring, operator method, diffraction

*Стаття надійшла до редакції 01.09.2021*