

# РОЗСИЮВАННЯ І ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ

---

## SCATTERING AND DIFFRACTION OF WAVES

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra27.03.167>

УДК 537.874.6

PACS number: 07.05.Tr

**М.Є. Каліберда<sup>1,2</sup>, Л.М. Литвиненко<sup>1,2</sup>, С.О. Погарський<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

E-mail: KaliberdaME@gmail.com; Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua

<sup>2</sup> Радіоастрономічний інститут НАН України

вул. Мистецтв, 4, м. Харків, 61002, Україна

E-mail: lytvynenko.leonid.m@gmail.com

### ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД У ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ НА НЕСКІНЧЕННО ТОНКИХ ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНИХ НАПІВПЛОЩИНІ ТА ДВОХ ДИСКАХ

---

**Предмет і мета роботи.** Розглянуто дифракцію плоскої хвилі на системі, яка складається з напівплощини та двох дисків. Диски та напівплощина, що вважаються ідеально провідними та нескінченно тонкими, розташовано в паралельних площинах. Досліджуються два випадки, а саме коли обидва диски лежать по один бік від напівплощини, та коли вони є розміщеними по різні боки від напівплощини. Метою роботи є розв'язання операторного методу та дослідження з його використанням дифракції на вказаній структурі.

**Методи і методологія.** Розв'язок задачі отримано операторним методом. Дотичні до напівплощини та дисків компоненти електричного поля за допомогою інтегралів Фур'є виражаються через невідомі функції, які мають сенс амплітуд. Для невідомих амплітуд записано операторні рівняння, які використовують оператори розсіяння на поодиноких дисках і напівплощині.

**Результати.** Після перетворень операторних рівнянь отримано інтегральні рівняння відносно амплітуд сферичних хвиль. Досліджено розсіяні поля при розміщенні дисків у області тіні від напівплощини, в напівтіні та в області, що повністю освітлюється хвилею, яка падає. Показано, що за рахунок розсіяння плоскої хвилі на краю напівплощини поле циліндричних хвиль має відмінну від нуля амплітуду навіть у випадку, якщо диски знаходяться цілком у області тіні та не освітлюються падаючою плоскою хвилею.

**Висновки.** З використанням операторного методу вперше отримано розв'язок задачі про дифракцію плоскої хвилі на системі, яка складається з ідеально провідних і нескінченно тонких напівплощини та двох дисків. Показано, що операторні рівняння цієї задачі можливо звести до інтегральних, які можуть бути чисельно розв'язані за допомогою дискретизації на базі квадратурних формул. Досліджено поведінку поля в ближній і далекій зонах відносно дисків при різних значеннях радіусів дисків і при зміні їхнього положення відносно напівплощини.

**Ключові слова:** напівплощина, диск, операторний метод, дифракція, інтегральні рівняння.

---

Цитування: Каліберда М.Є., Литвиненко Л.М., Погарський С.О. Операторний метод у задачі про дифракцію плоскої хвилі на нескінченно тонких ідеально провідних напівплощині та двох дисках. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2022. Т. 27. № 3. С. 167–180. <https://doi.org/10.15407/rpra27.03.167>

Citation: Kaliberda, M.E., Lytvynenko, L.M. and Pogarsky, S.A., 2022. An operator method for the problem of plane wave diffraction by infinitely thin, perfectly conducting half-plane and two disks. *Radio physics and radio astronomy*, 27(3). pp. 167–180. <https://doi.org/10.15407/rpra27.03.167>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2022. Статтю опубліковано відповідно до умов відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

© Publisher PH "Akademperiodyka" of the NAS of Ukraine, 2022. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

## Вступ

Задачі про дифракцію на напівплощині або диску належать до класичних задач електродинаміки. У [1, 2] розв'язок задачі про дифракцію плоскої хвилі на напівплощині отримано методом Джонса. У [3, 4] записано інтегральні рівняння відносно щільності струмів. У [5] розв'язок отримано за допомогою факторизації ядра парних інтегральних рівнянь. У [6] розглянуто випадок падіння довільного двовимірного електромагнітного поля, а у [7] — неоднорідної плоскої хвилі. У [8, 9] розглянуто розсіяння хвиль круглим диском або щілиною в площині за допомогою розкладання в степеневий ряд. У [10, 11] використовувався метод моментів. Невідомі спектральні функції розкладалися в ряд гіпергеометричних поліномів, які було отримано в результаті інтегрування функцій Бесселя. У [12] парні інтегральні рівняння задачі про дифракцію на круглому диску розв'язувалися за допомогою методу потенціалів Кобаяші. У [13–15] з використанням методу Гальоркіна виконано дискретизацію інтегральних рівнянь для електричного поля в області скалярного перетворення Ханкеля, отриманих для ідеально провідного нескінченно тонкого круглого резонатора в багатощаровому середовищі, а також диску на границі середовища з втратами.

У [16] з використанням методу Гальоркіна виконано дискретизацію інтегральних рівнянь для електричного поля, але в області векторного перетворення Ханкеля в задачі про дифракцію на довільно орієнтованому диску, який розташований на границі середовища з втратами. У [17] використовується метод аналітичної регуляризації для розв'язання задачі про дифракцію на нескінченно тонкому круглому диску. Проектування виконувалося за допомогою методу Гальоркіна на власні функції статичної частини оператора задачі. У [18] метод аналітичної регуляризації використано для дослідження тонкого диску скінченної товщини.

У всіх цих роботах розглядалася або поодинокі напівплощина, або диски. Цікаво розглянути розсіяння хвиль системою напівплощина — диски. У роботах [19, 20] з використанням операторного методу отримано розв'язок задачі про дифракцію на напівплощині та одному диску. У даній роботі розглядаються напівплощина та два диски.

## 1. Постановка задачі

Розглянемо ідеально провідні нескінченно тонкі напівплощину  $y < 0, z = 0$  і два диски радіусу  $r_1$  і  $r_2$ , які задаються рівняннями  $(x - \Delta_{x,i})^2 + (y - \Delta_{y,i})^2 < r_i^2, z = h_i$ , де  $\Delta_{x,i}$  — зсув  $i$ -го диску відносно осі  $Ox$ ,  $\Delta_{y,i}$  — зсув  $i$ -го диску відносно осі  $Oy, i = 1, 2$ . Досліджуються два випадки розташування дисків. Перший,  $h_1 > 0, h_2 > 0$ : обидва диски знаходяться з одного боку від напівплощини (рис. 1, а). Другий,  $h_1 > 0$  і  $h_2 < 0$ , диски знаходяться по різні боки від напівплощини (рис. 1, б). Розглядається випадок падіння плоскої хвилі «зверху» — хвиля набігає з області  $z > 0$ , та «знизу» — хвиля набігає з області  $z < 0$ .

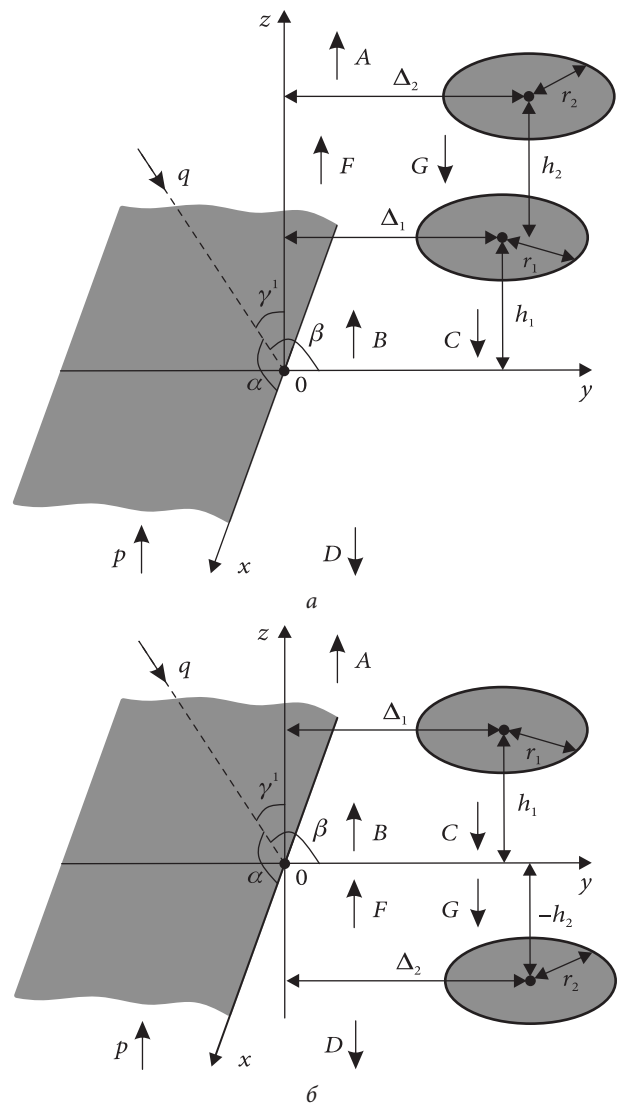


Рис. 1. Геометрія досліджуваної структури: диски розташовано по один бік від напівплощини (а), диски розташовано по різні боки від напівплощини (б)

Передбачається, що на структуру з області  $z > 0$  падає плоска хвиля з вектором амплітуд Фур'є  $q = (q_x, q_y)^*$ , а з області  $z < 0$  — плоска хвиля з вектором амплітуд Фур'є  $p = (p_x, p_y)$ . Дотичні компоненти електричного поля мають вигляд

$$\begin{pmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \exp(-ik(Ax + By + \gamma(A, B)z)) + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \exp(ik(Ax + By + \gamma(A, B)z)),$$

де  $\gamma(A, B) = \sqrt{1 - A^2 - B^2}$ ,  $A, B$  — косинуси кутів падіння відносно осей  $Oz, Ox$  і  $Oy$  відповідно,  $\text{Re } \gamma \geq 0, \text{Im } \gamma \geq 0, k$  — хвильове число. Всі інші компоненти електромагнітного поля можуть бути знайдені з рівнянь Максвелла. Повне поле — сума падаючого та розсіяного полів. Залежність полів від часу  $\exp(-i\omega t)$ , де  $\omega$  — кругова частота, опускається. Поле, що є розсіяним системою напівплощини — два диски, подамо у вигляді суперпозиції плоских хвиль. У випадку, коли диски знаходяться по один бік від напівплощини ( $h_2 > 0$ ), маємо

$$E_{\Theta}^s(x, y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, \\ z > h_2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_1)) + \\ + G_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_2))) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, h_1 < z < h_2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (B_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)z) + \\ + C_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_1))) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, 0 < z < h_1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y - \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, \\ z < 0, \Theta = x, y, \end{cases} \quad (1)$$

де  $A = (A_x, A_y)^*, D = (D_x, D_y)^*$  — амплітуди Фур'є відбитого поля і поля, що пройшло;  $B = (B_x, B_y)^*, C = (C_x, C_y)^*, F = (F_x, F_y)^*, G = (G_x, G_y)^*$  — амплітуди Фур'є розсіяного поля між дисками та напівплощиною. Ці амплітуди — невідомі. У випадку, коли диски знаходяться по різні боки від напівплощини ( $h_2 < 0$ ), вираз для розсіяного поля має вигляд:

$$E_{\Theta}^s(x, y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, \\ z > h_1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (B_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)z) + \\ + C_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_1))) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, 0 < z < h_1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)(z + h_2)) + \\ + G_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, h_2 < z < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \times \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y - \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, \\ z < h_2, \Theta = x, y. \end{cases} \quad (2)$$

Введемо оператори проходження крізь напівплощину та відбиття від неї,  $y < 0, z = 0, T_1$  і  $R_1$ , а також диску радіусу  $r_1, x^2 + y^2 < r_1$ , центр якого співпадає з початком координат  $T_2$  і  $R_2$ , диску радіусу  $r_2, x^2 + y^2 < r_2$ , центр якого співпадає з початком координат  $T_3$  і  $R_3$ . Їхня дія на довільну функцію  $g$  може бути описана за допомогою інтегралів

$$\begin{aligned} (R_j g)_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) &= \\ &= \sum_{\Xi=x, y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{j, \Theta \Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) \times \\ &\times g_{\Xi}(\zeta_x, \zeta_y) d\zeta_x d\zeta_y; \end{aligned} \quad (3)$$

$$(T_j g)_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) = \sum_{\Xi=x, y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{j, \Theta \Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) \times g_{\Xi}(\zeta_x, \zeta_y) d\zeta_x d\zeta_y, \quad \Theta = x, y, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де  $R_{j, \Theta \Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y)$ ,  $T_{j, \Theta \Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y)$  — ядра операторів. Вони вважаються відомими. Оператори розсіяння напівплощиною можуть бути знайдені методом факторизації [5], а оператори розсіяння для дисків можуть бути знайдені методом моментів [10, 11].

## 2. Розв'язання задачі

### 2.1. Операторні рівняння

Розсіяне структурою поле можна подати у вигляді суми полів, розсіяних ізольованою напівплощиною й ізольованими дисками, та поля, пере-відбитого ними.

#### 2.1.1. Випадок, коли диски розташовано по один бік від напівплощини

Розглянемо випадок, коли диски розташовано по один бік від напівплощини ( $h_2 > 0$ ). Операторні рівняння мають вигляд

$$A = e_1^- e_2^- s_2^- T_3 e_2^+ s_2^+ F + e_1^- e_2^- s_2^- R_3 e_1^- e_2^- s_2^+ q; \quad (5)$$

$$D = T_1 e_1^+ s_1^- C + R_1 p; \quad (6)$$

$$B = R_1 e_1^+ s_1^- C + T_1 p; \quad (7)$$

$$C = R_2 e_1^+ s_1^+ B + T_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G; \quad (8)$$

$$F = s_1^- T_2 e_1^+ s_1^+ B + s_1^- R_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G; \quad (9)$$

$$G = R_3 e_2^+ s_2^+ F + T_3 e_1^- e_2^- s_1^+ q, \quad (10)$$

де оператори  $e_i^{\pm}$  визначають зміну амплітуди поля при зсуві системи координат на величину  $|h_i|$  вздовж осі  $Oz$  у позитивному або негативному напрямку відносно напрямку поширення хвилі, а оператори  $s_i^{\pm}$  визначають зміну амплітуди поля при зсуві системи координат на величину  $\pm \Delta_{x,i}$  і  $\pm \Delta_{y,i}$ .

Зазначимо, що оператори проходження та відбиття пов'язані наступним чином

$$T_j = I + R_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

де  $I$  — одиничний оператор.

Введемо нові функції, віднявши від невідомих амплітуд частину, пов'язану з падаючим полем,

$$B_1 = B - p; \quad (12)$$

$$C_1 = C - e_1^- s_1^+ q; \quad (13)$$

$$F_1 = F - e_1^+ p; \quad (14)$$

$$G_1 = G - e_1^- e_2^- s_2^- q. \quad (15)$$

Використовуючи (5)–(11), можна записати операторні рівняння відносно нових невідомих функцій (12)–(15):

$$A = e_1^- F_1 + e_1^- e_2^- s_2^- R_3 e_2^+ s_2^+ F_1 + e_1^- e_2^- s_2^- R_3 s_2^+ (e_1^+ e_2^+ p + e_1^- e_2^- q) + p; \quad (16)$$

$$D = e_1^+ s_1^- C_1 + R_1 e_1^+ s_1^- C_1 + R_1 (p + q) + q; \quad (17)$$

$$B_1 = R_1 e_1^+ s_1^- C_1 + R_1 (p + q); \quad (18)$$

$$C_1 = R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + e_2^+ s_1^+ s_2^- G_1 + R_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G_1 + R_2 s_1^+ (e_2^+ p + e_2^- q); \quad (19)$$

$$F_1 = e_1^+ B_1 + s_1^- R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + s_1^- R_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G_1 + s_1^- R_2 s_1^+ (e_1^+ p + e_1^- q); \quad (20)$$

$$G_1 = R_3 e_2^+ s_2^+ F_1 + R_3 s_2^+ (e_1^+ e_2^+ p + e_1^- e_2^- q). \quad (21)$$

#### 2.1.2. Випадок, коли диски розташовано по різні боки від напівплощини

Розглянемо випадок, коли диски розташовано по різні боки від напівплощини ( $h_2 < 0$ ). Операторні рівняння відносно амплітуд Фур'є мають вигляд:

$$A = e_1^- s_1^- T_2 e_1^+ s_1^+ B + e_1^- s_1^- R_2 e_1^- s_1^+ q; \quad (22)$$

$$D = e_2^- s_2^- T_3 e_2^+ s_2^+ G + e_2^- s_2^- R_3 e_2^- s_2^+ p; \quad (23)$$

$$B = R_1 e_1^+ s_1^- C + T_1 e_2^+ s_2^- F; \quad (24)$$

$$C = R_2 e_1^+ s_1^+ B + T_2 e_1^- s_1^+ q; \quad (25)$$

$$F = R_3 e_2^+ s_2^+ G + T_3 e_2^- s_2^+ p; \quad (26)$$

$$G = T_1 e_1^+ s_1^- C + R_1 e_2^+ s_2^- F. \quad (27)$$

Введемо нові функції, віднявши від амплітуд Фур'є розсіяного поля частину, яку пов'язано з амплітудою падаючого поля

$$B_1 = B - p; \quad (28)$$

$$C_1 = C - e_1^- s_1^+ q; \quad (29)$$

$$F_1 = F - e_2^- s_2^+ p; \quad (30)$$

$$G_1 = G - q. \quad (31)$$

Як і у випадку, розглянутому в п. 2.1.1., використовуючи (11), з (22)–(27) може бути отримано операторні рівняння відносно нових невідомих функцій (28)–(31):

$$A = B_1 + e_1^- s_1^- R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + e_1^- s_1^- R_2 s_1^+ (e_1^+ p + e_1^- q) + p; \quad (32)$$

$$D = G_1 + e_2^- s_2^- R_3 e_2^+ s_2^+ G_1 + e_2^- s_2^- R_3 s_2^+ (e_2^+ p + e_2^- q); \quad (33)$$

$$B_1 = e_2^+ s_2^- F_1 + R_1 (e_1^+ s_1^- C_1 + e_2^+ s_2^- F_1) + R_1 (p + q); \quad (34)$$

$$C_1 = R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + R_2 s_1^+ (e_1^+ p + e_1^- q); \quad (35)$$

$$F_1 = R_3 e_2^+ s_2^+ G_1 + R_3 s_2^+ (e_2^- p + e_2^+ q); \quad (36)$$

$$G_1 = e_1^+ s_1^- C + R_1 (e_1^+ s_1^- C + e_2^+ s_2^- F) + R_1 (p + q). \quad (37)$$

Зауважимо, що якщо  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $F_1$ , і  $G_1$  буде знайдено, тоді з (16), (17) або (32), (33)  $A$  і  $D$  також може бути знайдено. Наша задача звести операторні рівняння (18)–(21), (34)–(37) до інтегральних рівнянь такого вигляду, які б можна було розв'язати чисельно.

## 2.2. Інтегральні рівняння

### 2.2.1. Випадок, коли диски розташовано по один бік від напівплощини

Зауважимо, що ядро оператора відбиття напівплощини має неінтегровану особливість на дійсній осі в точці, яка відповідає постійній поширення відбитої плоскої хвилі. Крім того, ядра операторів відбиття напівплощини та диску мають інтегровану кореневу особливість. У результаті, амплітуди Фур'є розсіяного поля також можуть мати особливості. Введемо нові функції, які б не мали особливостей, за формулами

$$U_{j,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) = R_{j,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) \times \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad j = 2, 3; \quad (38)$$

$$B_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left( B_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - A^2 - B}}{\sqrt{1 - A^2 - \xi_y}} \frac{q_x + p_x}{\xi_y - \frac{B}{below}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}; \quad (39)$$

$$B_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left( B_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}} \times \frac{q_x + p_x}{\sqrt{1 - A^2 - B} \sqrt{1 - A^2 - \xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - A^2 - \xi_y}}{\sqrt{1 - A^2 - B}} \frac{q_y + p_y}{\xi_y - \frac{B}{below}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}; \quad (40)$$

$$C_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = C_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}; \quad (41)$$

$$F_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left( F_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \exp(ik\gamma(A, \xi_y)h_1) \times \frac{\sqrt{1 - A^2 - B}}{\sqrt{1 - A^2 - \xi_y}} \frac{q_x + p_x}{\xi_y - \frac{B}{below}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}; \quad (42)$$

$$F_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left( F_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \exp(ik\gamma(A, \xi_y)h_1) \times \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}} \frac{q_x + p_x}{\sqrt{1 - A^2 - B} \sqrt{1 - A^2 - \xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \exp(ik\gamma(A, \xi_y)h_1) \times \frac{\sqrt{1 - A^2 - \xi_y}}{\sqrt{1 - A^2 - B}} \frac{q_y + p_y}{\xi_y - \frac{B}{below}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}; \quad (43)$$

$$G_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = G_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad \Theta = x, y. \quad (44)$$

Взагалі кажучи, у зв'язку з тим, що коренева особливість є інтегрованою, її можна було явно не виділяти у (38)–(44). Проте ми її виділили для побудови швидко збіжної схеми дискретизації на базі відповідних квадратурних формул.

Для запису інтегральних рівнянь, для стислості, введемо позначення [20]:

$$(F_1g)(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \xi_y} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \zeta_y}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \xi_y}; \quad (45)$$

$$(F_2g)(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \xi_y} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\xi_x^2 - \zeta_y^2}} \frac{\xi_x}{\sqrt{1-\xi_x^2}} \frac{d\zeta_y}{\sqrt{1-\xi_x^2 - \zeta_y^2}}; \quad (46)$$

$$(F_3g)(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{1-\xi_x^2 - \xi_y^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \zeta_y}} \frac{g(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\xi_x^2 - \zeta_y^2}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \xi_y}; \quad (47)$$

$$F_4g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\zeta_x^2 - \zeta_y^2}} d\zeta_x d\zeta_y; \quad (48)$$

$$F_5g = -\frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-A^2} - B} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(A, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - B}; \quad (49)$$

$$F_6g = \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1-\alpha^2} - B}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(A, \zeta_y) d\zeta_y}{\sqrt{\sqrt{1-\alpha^2} - \zeta_y}}; \quad (50)$$

$$F_7g = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y} g(A, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - B}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - B}; \quad (51)$$

$$F_8g = g(A, B).$$

Позначення «above» або «below» означають, що особливу точку, яка є полюсом, треба обходити зверху або знизу на комплексній площині.

Після підстановки (38)–(44) у (18)–(21), з урахуванням (45)–(51), остаточно отримуємо інтегральні рівняння

$$B_{2,x} = F_1 e_1^+ s_1^- C_{2,x}; \quad (52)$$

$$B_{2,y} = F_2 e_1^+ s_1^- C_{2,x} + F_3 e_1^+ s_1^- C_{2,y}; \quad (53)$$

$$C_{2,\Theta} = e_2^+ s_2^- s_1^+ G_{2,\Theta} + F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} (e_1^+ s_1^+ B_{2,\Xi} + e_2^+ s_2^- s_1^+ G_{2,\Xi}) + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{2,\Theta,x} e_1^+ s_1^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} s_1^+ (e_1^+ p_{\Xi} + e_1^- q_{\Xi}); \quad (54)$$

$$F_{2,\Theta} = s_1^- F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} (e_1^+ s_1^+ B_{2,\Xi} + e_2^+ s_2^- s_1^+ G_{2,\Xi}) + (q_x + p_x) \cdot s_1^- F_5 U_{2,\Theta,x} e_1^+ s_1^+ + (q_x + p_x) \cdot s_1^- F_6 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + (q_y + p_y) \cdot s_1^- F_7 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} s_1^+ (e_1^+ p_{\Xi} + e_1^- q_{\Xi}); \quad (55)$$

$$G_{2,\Theta} = F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} e_2^+ s_2^+ F_{2,\Xi} + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{3,\Theta,x} e_2^+ e_1^+ s_2^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{3,\Theta,y} e_2^+ e_1^+ s_2^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{3,\Theta,y} e_2^+ e_1^+ s_2^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} s_2^+ (e_2^+ e_1^+ p_{\Xi} + e_2^- e_1^- q_{\Xi}), \quad \Theta = x, y. \quad (56)$$

Підінтегральні функції у (52)–(56) мають неінтегровану особливість на дійсній осі. Для обчислення інтегралів необхідно провести процедуру регуляризації.

### 2.2.2. Випадок, коли диски розташовано по різні боки від напівплощини

Введемо нові функції, які б не мали особливостей, за формулами (38)–(41), а також

$$F_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = F_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1-\xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad \Theta = x, y; \quad (57)$$



$$G_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left( G_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{1-A^2-B}}{\sqrt{1-A^2}-\xi_y} \frac{q_x+p_x}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1-\xi_x^2-\xi_y^2}; \quad (58)$$

$$G_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left( G_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{q_x+p_x}{\sqrt{1-A^2-B}\sqrt{1-A^2}-\xi_y} + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}{\sqrt{1-A^2}-B} \frac{q_y+p_y}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1-\xi_x^2-\xi_y^2}. \quad (59)$$

Тоді в позначеннях (45)–(51), з урахуванням (38)–(41), (57)–(59), операторні рівняння (34)–(37) можуть бути зведені до інтегральних рівнянь:

$$B_{2,x} = e_2^+ s_2^- F_{2,x} + F_1(e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}); \quad (60)$$

$$B_{2,y} = e_2^+ s_2^- F_{2,y} + F_2(e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}) + F_3(e_1^+ s_1^- C_{2,y} + e_2^+ s_2^- F_{2,y}); \quad (61)$$

$$C_{2,\Theta} = F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} e_1^+ s_1^+ B_{2,\Xi} + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{2,\Theta,x} e_1^+ s_1^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} s_1^+ (e_1^+ p_\Xi + e_1^- q_\Xi); \quad (62)$$

$$F_{2,\Theta} = F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} e_2^+ s_2^+ G_{2,\Xi} + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{3,\Theta,x} e_2^+ s_2^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{3,\Theta,y} e_2^+ s_2^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{3,\Theta,y} e_2^+ s_2^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} s_2^+ (e_2^- p_\Xi + e_2^+ q_\Xi); \quad (63)$$

$$G_{2,x} = e_1^+ s_1^- C_{2,x} + F_1(e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}); \quad (64)$$

$$B_{2,y} = e_1^+ s_1^- F_{2,y} + F_2(e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}) + F_3(e_1^+ s_1^- C_{2,y} + e_2^+ s_2^- F_{2,y}). \quad (65)$$

Підінтегральні функції у (60)–(65) мають неінтегровану особливість на дійсній осі. Для обчислення інтегралів необхідно провести процедуру регуляризації.

### 2.3. Процедура регуляризації

Для обчислення інтегралів у (52)–(56), (60)–(65) трансформуємо контур інтегрування в комплексній площині таким чином, щоб він співпадав із дійсною віссю всюди, за виключенням особливих точок. А особливості у вигляді полюсів підінтегральних функцій обходив зверху (позначення «above») або знизу (позначення «below»). Після цього в підінтегральній функції віднімемо такий доданок, щоб їх різниця не мала особливостей, а інтеграл від цього доданка міг би бути обчислено аналітично. Для того, щоб зберегти тотожність, цей же доданок і додається:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{below}}{\frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)-g(\xi)}{\zeta-\xi} d\zeta + \pi i g(\xi); \quad (66)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{above}}{\frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)-g(\xi)}{\zeta-\xi} d\zeta - \pi i g(\xi), \quad (67)$$

де  $g(\zeta)$  – така довільна функція, щоб інтеграли (66) і (67) існували. У (66), (67) враховано, що [21]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{below}}{\frac{1}{\zeta-\xi}} d\zeta = \pi i, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{above}}{\frac{1}{\zeta-\xi}} d\zeta = -\pi i.$$

Маючи на увазі, що

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

де  $PV$  означає, що інтеграл слід розуміти в сенсі головного значення за Коші, отримуємо інтеграли, придатні для обчислення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{below}}{\frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi}} d\zeta = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi} d\zeta + \pi i g(\xi),$$

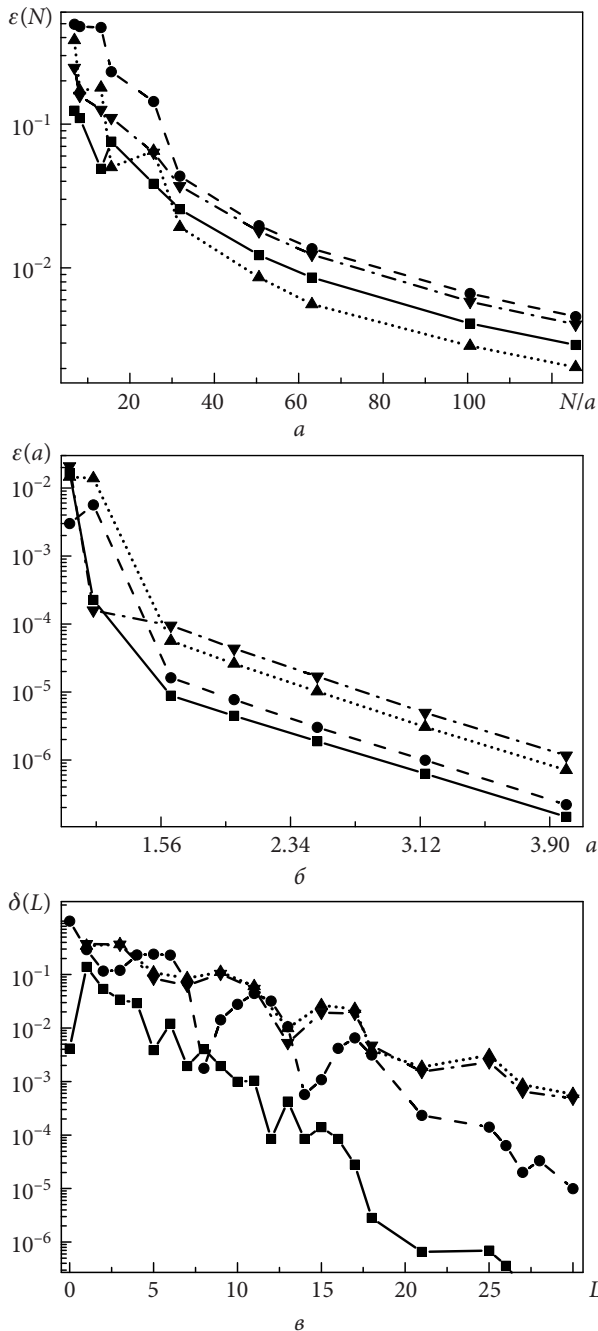


Рис. 2. Дослідження збіжності при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ ,  $kh_2 = \pi / 2$  (суцільні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ ,  $kh_2 = \pi / 2$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ ,  $kh_2 = -\pi / 2$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ ,  $kh_2 = -\pi / 2$  (штрих-пунктирні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = \pi / 2$ . Залежність  $\varepsilon(N)$  від  $N/a$ ; залежність  $\varepsilon(a)$  від  $a$  (б); залежність  $\delta(L)$  від  $L$  (в)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta - \pi ig(\xi).$$

Після регуляризації інтегралів рівняння (52)–(56), (60)–(65) можуть бути дискретизовані з ви-

користанням складених квадратурних формул інтерполяційного типу. У результаті буде отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку стисло можна подати у вигляді:

$$P = MP + Q, \tag{68}$$

де  $P$  – вектор значень невідомих амплітуд у вузлах;  $M$  і  $Q$  – відомі матриця й вектор, які отримано після дискретизації інтегральних рівнянь. Для розв’язання системи рівнянь (68) використовувалася ітераційна процедура, яку було організовано за формулою:

$$P^0 = 0,$$

$$P^{l+1} = MP^l + Q, \quad l = 0, 1, \dots, L,$$

де верхній індекс  $l$  означає номер ітерації;  $L$  – загальна кількість ітерацій.

### 3. Числові результати

Взагалі кажучи, збіжність наближеного розв’язку до точного базується на відповідних теоремах про дискретизацію сингулярних інтегралів [22]. Для числового вивчення швидкості збіжності введемо функції похибок за формулами:

$$\varepsilon(N) = |A^{sw}(N) - A^{sw}(2N - 1)| / |A^{sw}(2N - 1)|,$$

$$\varepsilon(a) = |A^{sw}(a) - A^{sw}(\Phi)| / |A^{sw}(\Phi)|,$$

$$\delta(L) = |A^{sw}(L) - A^{sw}(L + 1)| / |A^{sw}(L + 1)|,$$

де  $A^{sw} = [(A_x^{sw}(\xi_x = 0, \xi_y = 0))^2 + (A_y^{sw}(\xi_x = 0, \xi_y = 0))^2]^{1/2}$  – амплітуда сферичної хвилі в напрямку, паралельному осі  $Oz$ ;  $\Phi = 10$ ;  $N$  – кількість вузлів у квадратурних формулах;  $a$  – величина інтервалу інтегрування, яким замінюється нескінченний інтервал  $(-\infty; \infty) \mapsto (-a; a)$ .

На рис. 2 наведено залежності похибки від параметрів. Починаючи з деякого значення, при збільшенні кількості вузлів і величини інтервалу, похибка спадає монотонно. При збільшенні кількості ітерацій похибка також спадає до нуля, але не монотонно, спостерігаються осциляції. Зазначимо, що залежність похибки від числа ітерацій у випадку двох дисків демонструє зовсім іншу поведінку на відміну від випадку одного диску [19], [20]. По-перше, у випадку одного диску похибка спадала монотонно. По-друге, швидкість спадання була значно вищою: для отримання по-



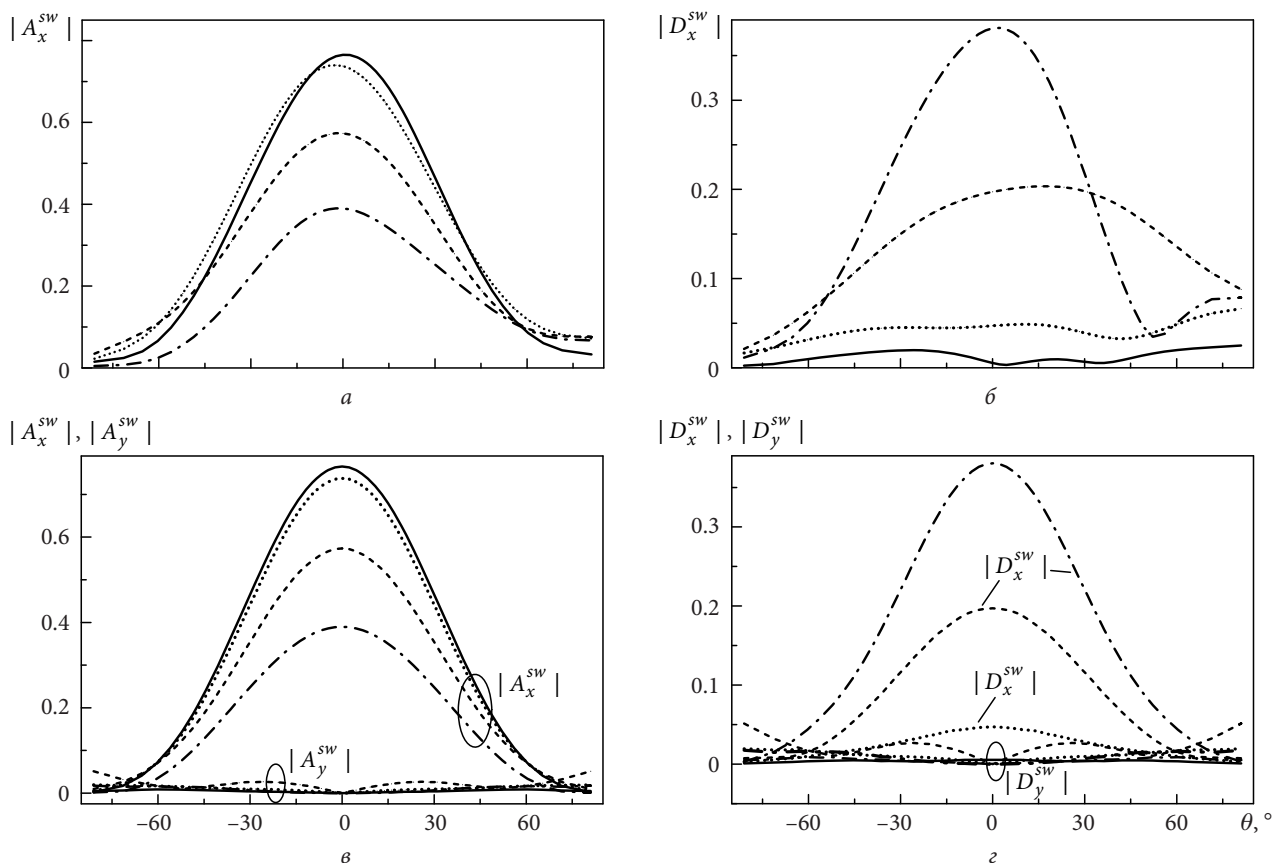


Рис. 3. Діаграми направленості у випадку, коли диски розташовано по різні боки від напівплощини при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$  (штрих-пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$  (суцільні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = -kh_2 = \pi/2$ , ортогональне падіння,  $q_x \neq 0$ ,  $q_y = 0$ .  $|A_x^{sw}|$  при  $\varphi = 90^\circ$ , тут  $A_y^{sw} = 0$  (а);  $|D_x^{sw}|$  при  $\varphi = 90^\circ$ , тут  $|D_y^{sw}| = 0$  (б);  $|A_x^{sw}|$ ,  $|A_y^{sw}|$  при  $\varphi = 0^\circ$  (в);  $|D_x^{sw}|$ ,  $|D_y^{sw}|$  при  $\varphi = 0^\circ$  (г)

хибки менше ніж  $10^{-3}$  достатньо було лише двох ітерацій при досліджуваних параметрах.

Поле, розсіяне структурою, можна подати у вигляді суми полів трьох типів

$$E^{sc} = E^{pw} + E^{err} + E^{sw}. \quad (69)$$

Перший доданок у (69) праворуч  $E^{pw}$  — це поле плоскої хвилі, яка з'являється в результаті відбиття від напівплощини. Амплітуда поля плоскої хвилі не спадає зі збільшенням відстані до структури. Другий доданок у (69) праворуч  $E^{err}$  — це поле циліндричної хвилі (за винятком області  $y=0$ ), яка з'являється в результаті розсіювання краєм напівплощини і виражається через функцію помилок. Третій доданок у (69) праворуч  $E^{sw}$  — це поле сферичних хвиль, які з'являються через наявність дисків. Амплітуда цього поля спадає як  $1/(k\rho)$ , при  $k\rho \rightarrow \infty$ , де  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — відстань. Поле  $E^{sw}$  описує електромагнітний

зв'язок напівплощини та дисків, у той час як  $E^{pw}$  і  $E^{err}$  залишаються такими ж, як і у випадку ізольованої напівплощини.

Із використанням методу перевалу можна отримати вираз для поля сферичних хвиль у далекій зоні:

$$|E_{\Theta}^{sw}(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta)| \sim \begin{cases} \frac{2\pi}{kr} A_{\Theta}^{sw}(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta), & z > 0, \\ \frac{2\pi}{kr} D_{\Theta}^{sw}(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta), & z < 0, \end{cases}$$

де  $\Theta = x, y$ ,  $(\rho, \theta, \varphi)$  — координати сферичної системи координат;  $A_{\Theta}^{sw}$  і  $D_{\Theta}^{sw}$  — частини амплітуд  $A_{\Theta}$ ,  $D_{\Theta}$ , які відповідають сферичним хвилям.

На рис. 3–8 представлено діаграми направленості поля сферичних хвиль при різних положеннях дисків. На всіх рисунках  $\Delta_{x,1} = \Delta_{x,2} = 0$ ,  $r_1 = r_2$ . Випадку дисків, розташованих по один бік від напівплощини, відповідають значення  $h_2 > 0$ .

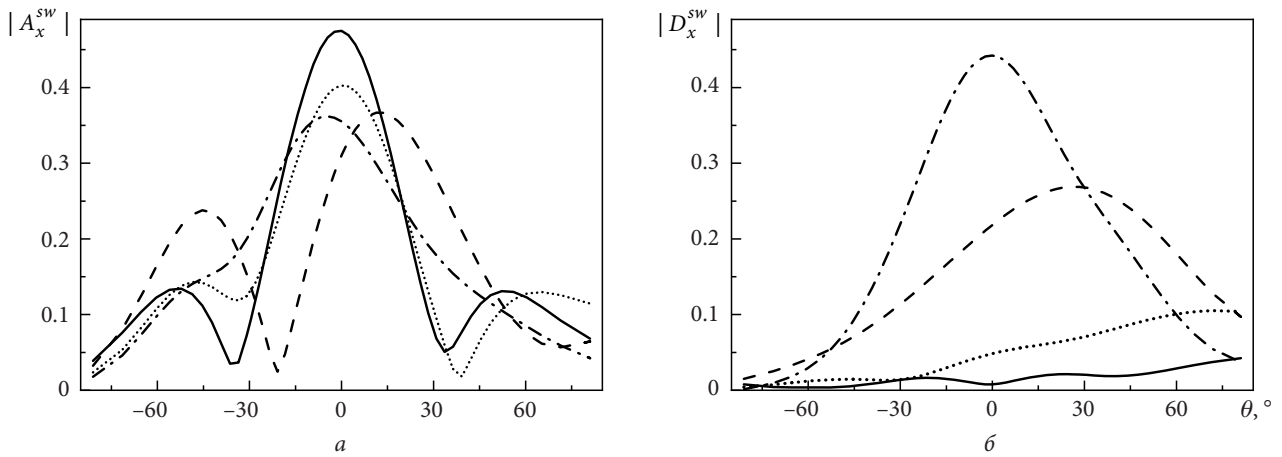


Рис. 4. Діаграми направленості у випадку, коли диски розташовано по один бік від напівплощини при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$  (штрих-пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$  (суцільні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = kh_2 = \pi/2$ , ортогональне падіння,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $q_x \neq 0$ ,  $q_y = p_x = p_y = 0$ . Тут  $|A_y^{sw}| = |D_y^{sw}| = 0$ .  $|A_x^{sw}|$  (а),  $|D_x^{sw}|$  (б)

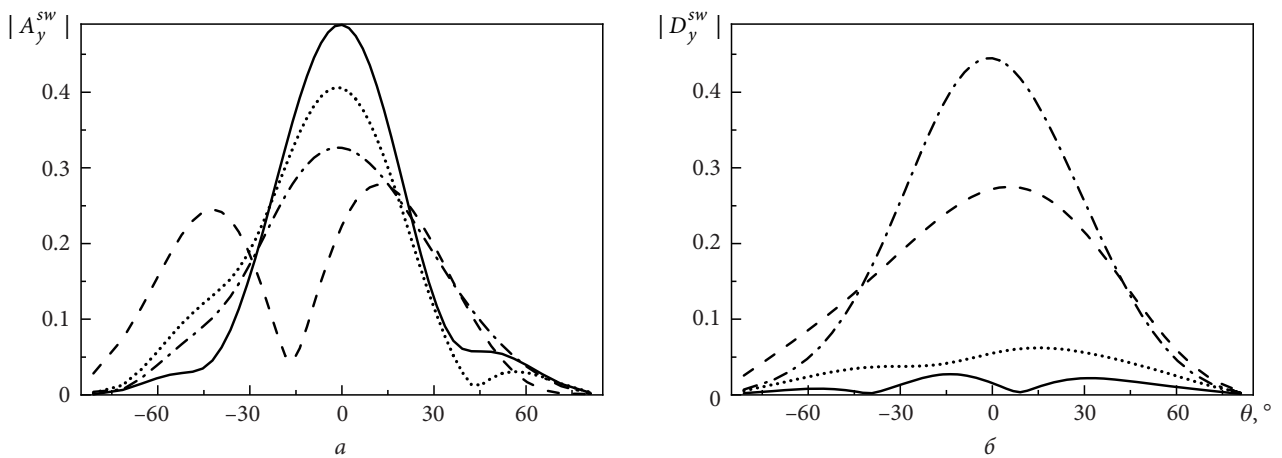


Рис. 5. Діаграми направленості у випадку, коли диски розташовано по один бік від напівплощини при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$  (штрих-пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$  (суцільні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = kh_2 = \pi/2$ , ортогональне падіння,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $q_y \neq 0$ ,  $q_x = p_x = p_y = 0$ . Тут  $|A_x^{sw}| = |D_x^{sw}| = 0$ .  $|A_y^{sw}|$  (а),  $|D_y^{sw}|$  (б)

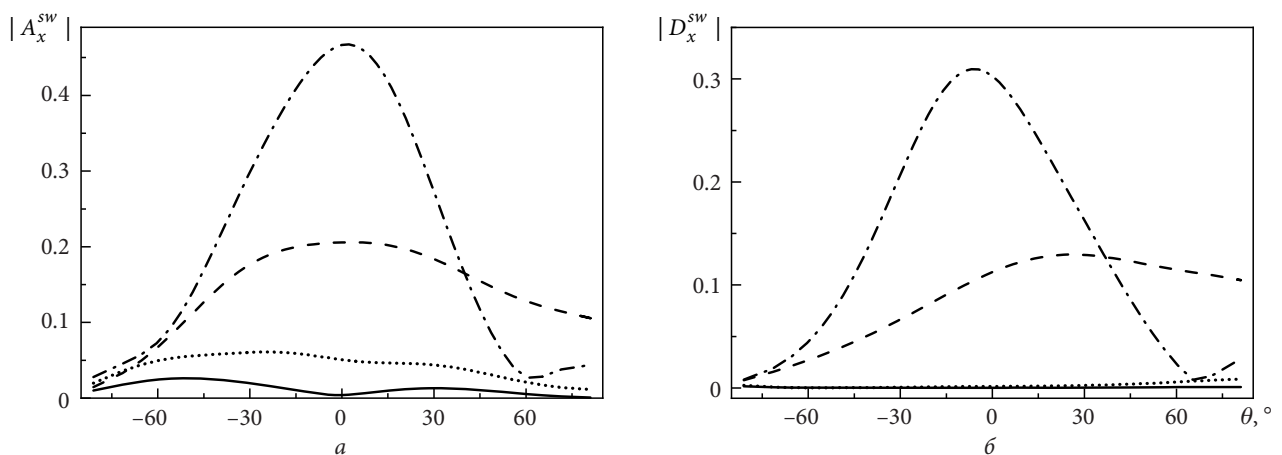


Рис. 6. Діаграми направленості у випадку, коли диски розташовано по один бік від напівплощини при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$  (штрих-пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$  (суцільні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = kh_2 = \pi/2$ , ортогональне падіння,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $p_x \neq 0$ ,  $q_x = q_y = p_y = 0$ . Тут  $|A_y^{sw}| = |D_y^{sw}| = 0$ .  $|A_x^{sw}|$  (а),  $|D_x^{sw}|$  (б)

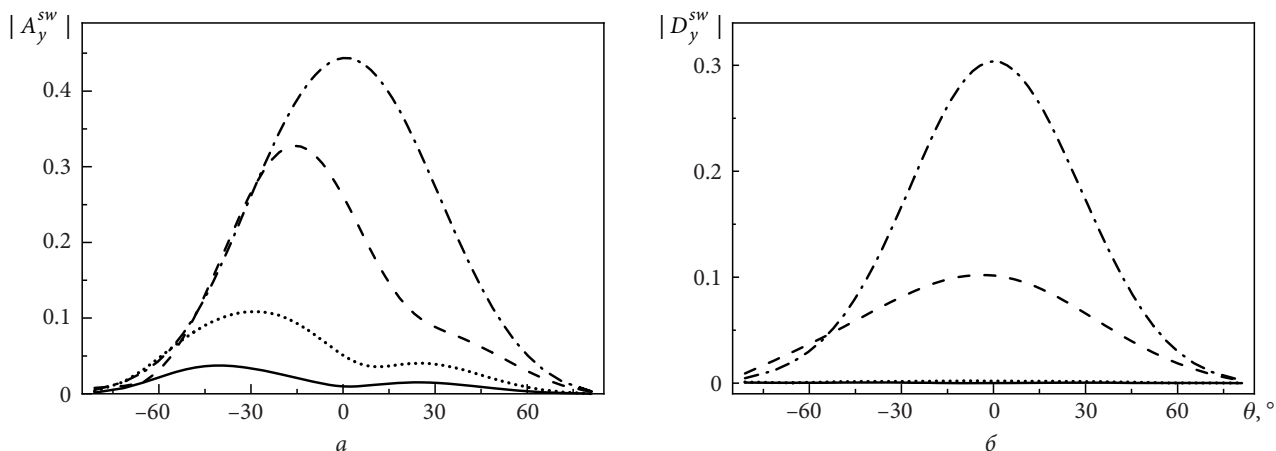


Рис. 7. Діаграми направленості у випадку, коли диски розташовано по один бік від напівплощини при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$  (штрих-пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$  (суцільні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = kh_2 = \pi/2$ , ортогональне падіння,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $p_y \neq 0$ ,  $q_x = q_y = p_x = 0$ . Тут  $|A_x^{sw}| = |D_x^{sw}| = 0$ .  $|A_y^{sw}|$  (а),  $|D_y^{sw}|$  (б)

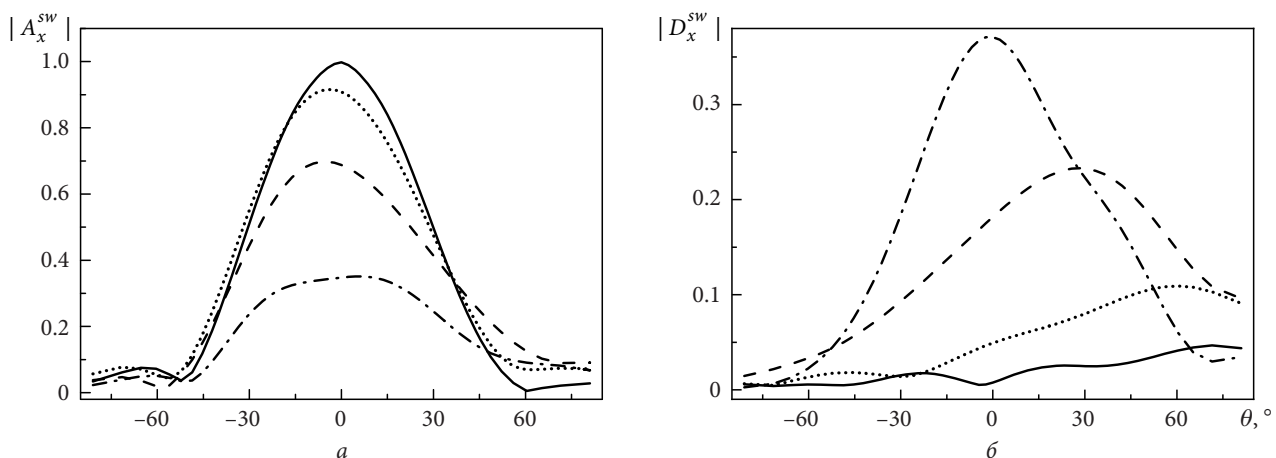


Рис. 8. Діаграми направленості у випадку, коли диски розташовано по один бік від напівплощини при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$  (штрих-пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$  (пунктирні криві),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$  (криві з точок),  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$  (суцільні криві),  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = \pi/2$ ,  $kh_2 = \pi$ , ортогональне падіння,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $q_x \neq 0$ ,  $q_y = p_x = p_y = 0$ . Тут  $|A_y^{sw}| = |D_y^{sw}| = 0$ .  $|A_x^{sw}|$  (а),  $|D_x^{sw}|$  (б)

Припускаємо, що на структуру ортогонально падає плоска хвиля одиничної амплітуди. Діаграми нормуються на загальний максимум. При  $\Delta_{1,x} = \Delta_{2,x} = 0$  структура є симетричною відносно осі  $Oy$ , тому при  $\varphi = 0^\circ$  діаграми направленості також є симетричними відносно  $\theta = 0^\circ$ .

При  $kh_1 = \pi/2$  і  $\Delta_{y,1} < 0$  диск знаходиться в максимумі поля стоячої хвилі, сформованої падаючої та відбитою від напівплощини плоскими хвилями. Через наявність стоячої хвилі амплітуда поля сферичних хвиль при  $\Delta_{y,1} = \Delta_{y,2} < 0$  перевищує амплітуду поля сферичних хвиль при  $\Delta_{y,1} = \Delta_{y,2} > 0$ .

На рис. 4–8 розглядаються діаграми направленості у випадку, коли диски знаходяться по

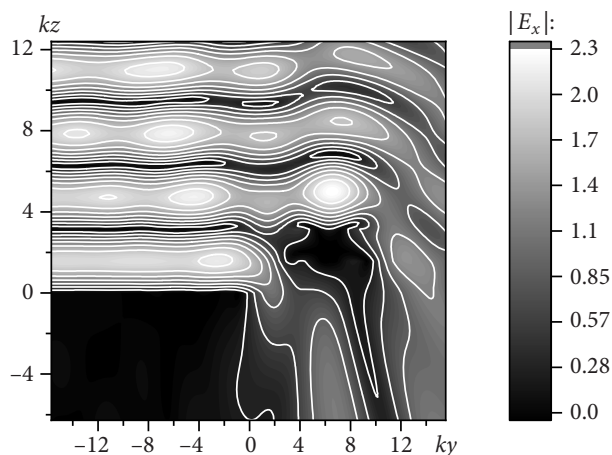


Рис. 9. Розподіл повного поля в ближній зоні, компонента  $|E_x|$  у площині  $x = 0$  при  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ ,  $kr = \pi$ ,  $kh_1 = kh_2 = \pi/2$ , ортогональне падіння

один бік від напівплощини. Перший диск знаходиться в пучності поля стоячої хвилі. Як можна бачити, на максимум діаграми направленості значним чином впливає положення другого диску. Якщо другий диск розмістити у вузлі стоячої хвилі, за рахунок взаємного впливу дисків відбувається несуттєве зростання максимуму діаграми направленості в порівнянні з випадком  $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ . Якщо ж другий диск помістити в пучність поля стоячої хвилі, спостерігається зростання максимуму в більш ніж два рази.

При  $h_2 > 0$  розглядаються випадки падіння плоскої хвилі «зверху» ( $p_x = p_y = 0$ ), коли диски освітлюються падаючою хвилею, та «знизу» ( $q_x = q_y = 0$ ), коли диски можуть знаходитися в області тіні від напівплощини та не освітлюватися падаючою хвилею напряму. З рис. 6, 7 видно, що навіть якщо диски знаходяться в області тіні,  $\Delta_{y,1} = \Delta_{y,2} < r_1 = r_2$ , сферичні хвилі мають не нульову амплітуду через розсіяння краєм. Поле розсіяне краєм на півплощини, розсіюється дисками, також збуджуючи сферичну хвилю.

На рис. 9 наведено розподіл повного поля в ближній зоні. Для обчислення інтегралів у (1), (2) проводилася процедура регуляризації. Після чого застосовувалися квадратурні формули. На рис. 9 добре видно поле падаючої плоскої хвилі в області  $y > 0$ , стоячої хвилі в області  $y < 0$ , а також поле циліндричної та сферичної хвиль. Відбита плоска хвиля існує лише в області  $y < 0$ . Це підтверджується і законами геометричної оптики. Напівплощина — це нескінченна в області  $y < 0$  структура. Тому в області  $y < 0$  падаюча хви-

ля відбивається, а в області  $y > 0$  падаюча хвиля проходить. Поблизу площини  $y = 0$  з'являється границя між двома областями: областю  $y < 0$ , де існує відбита плоска хвиля, й областю  $y > 0$ , де відбита плоска хвиля не існує. Область  $y = 0$  — це перехідна область або границя тіні [23]. Неперервність представлення поля в ній забезпечується доданком  $E^{err}$  (69).

## Висновки

В роботі з використанням операторного методу вперше отримано розв'язок задачі про дифракцію плоскої хвилі на ідеально провідних і нескінченно тонких напівплощині та двох дисках. Розглянуто випадок, коли диски знаходяться по один бік від напівплощини та по різні боки від неї. Операторні рівняння відносно амплітуд розсіяного поля зведено до системи інтегральних рівнянь. Для виключення особливостей проведено процедуру регуляризації. Досліджено діаграми направленості поля сферичних хвиль, а також розподіл повного поля у ближній зоні відносно дисків при різних параметрах.

Розв'язок задачі можна також отримати за допомогою операторного методу, але на базі іншого підходу до запису операторних рівнянь. Можливо використовувати рекурентний підхід, при застосуванні якого властивості структури, що складається з  $N$  неоднорідностей (дисків, напівплощини), виражаються за допомогою операторних рівнянь, які використовують оператори розсіяння структури, що складається з  $N - 1$  неоднорідності.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Jones D.S. Note on diffraction by an edge. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1950. Vol. 3, Iss. 4. P. 420—434. DOI: 10.1093/qjmam/3.4.420.
2. Jones D.S. A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems. *Q. J. Math.* 1952. Vol. 3, Iss. 1. P. 189—196. DOI: 10.1093/qmath/3.1.189.
3. Copson E.T. On an integral equation arising in the theory of diffraction. *Q. J. Math.* 1946. Vol. os-17, Iss. 1. P. 19—34. DOI: 10.1093/qmath/os-17.1.19.
4. Copson E.T. Diffraction by a plane screen. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1950. Vol. 202, Iss. 1069. P. 277—284. DOI: 10.1098/rspa.1950.0100.
5. Noble B. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*. London: Pergamon Press, 1958. 246 p.
6. Хестанов Р.Х. Дифракция произвольного поля на полуплоскости. *Радиотехника и электроника*. 1970. Т. 15, № 2. С. 289—297.
7. Bertoni H.L., Green A., Felsen L.B. Shadowing an inhomogeneous plane wave by an edge. *J. Opt. Soc. Am.* 1978. Vol. 68, Iss. 7. P. 983—989. DOI: 10.1364/JOSA.68.000983.
8. Bouwkamp C.J. On the diffraction of electromagnetic waves by small circular disks and holes. *Philips Research Reports*. 1950. Vol. 5. P. 401—422.
9. Maixner J., Andrejewski W. Strenge theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm. *Ann. Phys.* 1950. Vol. 442, Iss. 3—4. P. 157—168.

10. Nomura Y., Katsura S. Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1955. Vol. 10, Iss. 4. P. 285–304. DOI: 10.1143/JPSJ.10.285.
11. Литвиненко Л.М., Просвирнин С.Л., Хижняк А.Н. Полуобращение оператора с использованием метода моментов в задачах дифракции волн на структурах из тонких дисков. Харьков: РИАН УССР, 1988. Препр. № 19. С. 1–8.
12. Hongo K., Naqvi Q.A. Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly conducting plane. *PIER*. 2007. Vol. 68. P. 113–150. DOI: 10.2528/PIER06073102.
13. Losada V., Boix R. R., Horno M. Resonant modes of circular microstrip patches in multilayered substrates. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 1999. Vol. 47, Iss. 4. P. 488–498. DOI: 10.1109/22.754883.
14. Losada V., Boix R.R., Horno M. Full-wave analysis of circular microstrip resonators in multilayered media containing uniaxial anisotropic dielectrics, magnetized ferrites, and chiral materials. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 2000. Vol. 48, Iss. 6. P. 1057–1064. DOI: 10.1109/22.904745.
15. Losada V., Boix R.R., Medina F. Fast and accurate algorithm for the short-pulse electromagnetic scattering from conducting circular plates buried inside a lossy dispersive half-space. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 2003. Vol. 41, Iss. 5. P. 988–997. DOI: 10.1109/TGRS.2003.810678.
16. Di Murro F., Lucido M., Panariello G., Schettino F. Guaranteed-convergence method of analysis of the scattering by an arbitrarily oriented zero-thickness PEC disk buried in a lossy half-space. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2015. Vol. 63, Iss. 8. P. 3610–3620. DOI: 10.1109/TAP.2015.2438336.
17. Lucido M., Panariello G., Schettino F. Scattering by a zero-thickness PEC disk: A new analytically regularizing procedure based on Helmholtz decomposition and Galerkin method. *Radio Sci.* 2017. Vol. 52, Iss. 1. P. 2–14. DOI: 10.1002/2016RS006140.
18. Balaban M.V., Sauleau R., Benson T.M., Nosich A.I. Dual integral equations technique in electromagnetic wave scattering by a thin disk. *PIER B*. 2009. Vol. 16. P. 107–126. DOI: 10.2528/PIERB09050701.
19. Kaliberda M.E., Lytvynenko L.M., Pogarsky S.A. Electromagnetic wave scattering by half-plane and disk placed in the same plane or circular hole in half-plane. *J. Electromagn. Waves Appl.* 2022. Vol. 36, Iss. 10. P. 1463–1483. DOI: 10.1080/09205071.2022.2032379.
20. Kaliberda M.E., Lytvynenko L.M., Pogarsky S.A. Scattering by PEC half-plane and disk placed on parallel planes. *Int. J. Microw. Wirel. Technol.* 2022. P. 1–11. DOI: 10.1017/S1759078722000472.
21. Мухелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968. 512 с.
22. Lifanov I.K. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht: VSP, 1996. 475 p.
23. Hills N.L., Karp S.N. Semi-infinite diffraction gratings–I. *Commun. Pure App. Math.* 1965. Vol. 18, Iss. 1–2. P. 203–233. DOI: 10.1002/cpa.3160180119.

Стаття надійшла 25.04.2022

## REFERENCES

1. Jones, D.S., 1950. Note on diffraction by an edge. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **3**(4), pp. 420–434. DOI: 10.1093/qjmam/3.4.420.
2. Jones, D.S., 1952. A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems. *Q. J. Math.*, **3**(1), pp. 189–196. DOI: 10.1093/qmath/3.1.189.
3. Copson, E.T., 1946. On an integral equation arising in the theory of diffraction. *Q. J. Math.*, **os-17**(1), pp. 19–34. DOI: 10.1093/qmath/os-17.1.19.
4. Copson, E.T., 1950. Diffraction by a plane screen. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **202**(1069), pp. 277–284. DOI: 10.1098/rspa.1950.0100
5. Noble, B., 1958. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*. London: Pergamon Press.
6. Khestanov, R.K., 1970. Diffraction of an arbitrary field on a half-plane. *Radiotekhnika i elektronika*, **15**(2), pp. 289–297 (in Russian).
7. Bertoni, H.L., Green, A., Felsen, L.B., 1978. Shadowing an inhomogeneous plane wave by an edge. *J. Opt. Soc. Am.*, **68**(7), pp. 983–989. DOI: 10.1364/JOSA.68.000983.
8. Bouwkamp, C.J., 1950. On the diffraction of electromagnetic waves by small circular disks and holes. *Philips Research Reports*, **5**, pp. 401–422.
9. Maixner, J., Andrejewski, W., 1950. Strenge theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm. *Ann. Phys.*, **442**(3–4), pp. 157–168.
10. Nomura, Y., Katsura, S., 1955. Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **10**(4), pp. 285–304. DOI: 10.1143/JPSJ.10.285.
11. Lytvynenko, L.M., Prosvirnin, S.L., Khizhnyak, A.N., 1988. Semiinversion of the operator with the using of method of moments in the scattering problems by the structures consisting of the thin disks. *Preprint*, 19. Institute of Radio Astronomy Academy of Sciences Ukr SSR, pp. 1–8 (in Russian).
12. Hongo, K., Naqvi, Q.A., 2007. Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly conducting plane. *PIER*, **68**, pp. 113–150. DOI: 10.2528/PIER06073102.
13. Losada, V., Boix, R. R., Horno, M., 1999. Resonant modes of circular microstrip patches in multilayered substrates. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **47**(4), pp. 488–498. DOI: 10.1109/22.754883.
14. Losada, V., Boix, R.R., Horno, M., 2000. Full-wave analysis of circular microstrip resonators in multilayered media containing uniaxial anisotropic dielectrics, magnetized ferrites, and chiral materials. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **48**(6), pp. 1057–1064. DOI: 10.1109/22.904745.



15. Losada, V., Boix, R.R., Medina, F., 2003. Fast and accurate algorithm for the short-pulse electromagnetic scattering from conducting circular plates buried inside a lossy dispersive half-space. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **41**(5), pp. 988–997. DOI: 10.1109/TGRS.2003.810678.
16. Di Murro, F., Lucido, M., Panariello, G., Schettino, F., 2015. Guaranteed-convergence method of analysis of the scattering by an arbitrarily oriented zero-thickness PEC disk buried in a lossy half-space. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **63**(8), pp. 3610–3620. DOI: 10.1109/TAP.2015.2438336.
17. Lucido, M., Panariello, G., Schettino, F., 2017. Scattering by a zero-thickness PEC disk: A new analytically regularizing procedure based on Helmholtz decomposition and Galerkin method. *Radio Sci.*, **52**(1), pp. 2–14. DOI: 10.1002/2016RS006140.
18. Balaban, M.V., Sauleau, R., Benson, T.M., Nosich, A.I., 2009. Dual integral equations technique in electromagnetic wave scattering by a thin disk. *PIER B*, **16**, pp. 107–126. DOI: 10.2528/PIERB09050701
19. Kaliberda, M.E., Lytvynenko, L.M., Pogarsky, S.A., 2022. Electromagnetic wave scattering by half-plane and disk placed in the same plane or circular hole in half-plane. *J. Electromagn. Waves Appl.*, **36**(10), pp. 1463–1483. DOI: 10.1080/09205071.2022.2032379.
20. Kaliberda, M.E., Lytvynenko, L.M., Pogarsky, S.A., 2022. Scattering by PEC half-plane and disk placed in parallel planes. *Int. J. Microw. Wirel. Technol.*, pp. 1–11. DOI: 10.1017/S1759078722000472.
21. Muskhelishvili, N.I., 1972. *Singular integral equations*. Boundary problems of functions theory and their applications to mathematical physics. Wolters-Noordhoff. The Netherlands, Groningen. Revised transl. from Russian.
22. Lifanov, I.K., 1996. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht: VSP.
23. Hills, N.L., Karp, S.N., 1965. Semi-infinite diffraction gratings–I. *Commun. Pure App. Math.*, **18**(1–2), pp. 203–233. DOI: 10.1002/cpa.3160180119

Received 25.04.2022

M.E. Kaliberda<sup>1</sup>, L.M. Lytvynenko<sup>2</sup>, and S.A. Pogarsky<sup>1</sup>

<sup>1</sup> V.N. Karazin National University of Kharkiv

4, Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

<sup>2</sup> Institute of Radio Astronomy National Academy of Sciences of Ukraine

4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine

AN OPERATOR METHOD FOR THE PROBLEM  
OF PLANE WAVE DIFFRACTION BY INFINITELY THIN,  
PERFECTLY CONDUCTING HALF-PLANE AND TWO DISKS

**Subject and Purpose.** Considered in the paper is diffraction of a plane wave by a structure involving a half-plane and two disks. The disks and the half-plane, lying within parallel planes, are assumed to be infinitely thin and perfectly conducting. The problem is to be analyzed for two cases, namely for that of both disks located on the same side with respect to the half-plane, and for the other where they are placed on opposite sides against the half-plane. The purpose of the paper is to develop a suitable operator method for performing the analysis of the structure described.

**Methods and Methodology.** The solution to the problem has been sought for within the operator method suggested. The electric field components tangential to the half-plane and the disks are expressed, with the aid of Fourier integrals, via some unknown functions having the sense of amplitudes. The unknown amplitudes shall obey the operator equations formulated in terms of wave scattering operators for individual disks and the sole half-plane.

**Results.** When subjected to certain transformations, the operator equations allow obtaining integral equations relative amplitudes of the spherical waves involved. The integral equations permit investigating scattered wave fields for the cases where the disks stay in the shadow region behind the half-plane or in the penumbra, or else in the region which is illuminated by the incident wave. As has been shown, in the case of plane wave scattering at the edge of the half-plane the resulting cylindrical waves possess non-zero amplitudes even with the disks placed totally in the shadow region, hence not illuminated by the incident plane wave.

**Conclusions.** Making use of an operator method, an original solution has been obtained for the problem of plane wave diffraction by a structure consisting of a perfectly conducting, infinitely thin half-plane and two disks. The operator equations of the problem have been shown to be reducible to integral equations, further solvable numerically with the use of discretization based on quadrature rules. The behavior of far and near fields relative to the disks has been studied for a variety of values of the disk radii and their positions relative to the half-plane.

**Keywords:** half-plane, disk, operator method, diffraction, integral equations.