

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra28.04.304>

УДК 52-17:519.2

PACS 96.12.Kz:07.05.Tr:02.50.-r

І.О. Дулова¹, Н.В. Бондаренко^{1, 2}

¹ Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України
вул. Акад. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

² Університет Каліфорнії – Санта Круз, м. Санта Круз, 95064, США
E-mail: irina.dulva@gmail.com

МЕТОД УДОСКОНАЛЕНОЇ ФОТОКЛИНОМЕТРІЇ ДЛЯ ВІДНОВЛЕННЯ РЕЛЬЄФУ ПОВЕРХНІ ЗА ЗОБРАЖЕННЯМИ: ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИСОТИ ТА НАХИЛІВ

Предмет і мета роботи. Шляхом комп'ютерного моделювання досліджуються похибки, що виникають у результаті відновлення рельєфу поверхні планети за набором її зображень методом удосконаленої фотоклинометрії. Метою роботи є оцінка числових значень похибок обчислення висот і нахилів поверхні, що виникають у разі використання зображень з різниці відношеннями сигнал/шум, у тому числі оцінка мінімально можливих похибок.

Методи і методологія. Використовується метод удосконаленої фотоклинометрії, який дозволяє за набором зображень ділянки поверхні планети обчислити її найімовірніший рельєф. Досліджуються два варіанти реалізації методу: оптимальна фільтрація із застосуванням перетворення Фур'є та розв'язання рівняння Пуассона методом скінченних різниць.

Результати. Комп'ютерні експерименти показали, що рельєф, реконструйований за зображеннями із застосуванням методу удосконаленої фотоклинометрії, завжди якісно подібний до справжнього. У разі використання методу скінченних різниць для реалізації обчислень похибка висот становила $0.21\sigma_0 \dots 0.27\sigma_0$ (σ_0 – середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу). За реалізації методу із застосуванням фур'є-аналізу похибка обчислення висоти змінювалася від $0.86\sigma_0$ до $0.33\sigma_0$, коли відношення сигнал/шум (ВСШ) початкових зображень набувало значень від 1.0 до 100. Для цього варіанта методу теоретично передбачені мінімальні похибки обчислення висоти змінюються від $0.83\sigma_0$ до $0.13\sigma_0$. Рельєф у середній частині ділянки, що вивчається, завжди відновлюється точніше в порівнянні з прилеглими до межі районами, незалежно від того, який із двох варіантів реалізації методу застосовано.

Висновки. Застосування методу удосконаленої фотоклинометрії дозволило відновити рельєф поверхні за набором її зображень з похибкою $0.21\sigma_0 \dots 0.27\sigma_0$ (з використанням методу скінченних різниць для реалізації обчислень) та $0.33\sigma_0$ (із застосуванням фур'є-аналізу, ВСШ = 50). Рекомендовано відновлювати рельєф на ділянці з більшою площею, ніж необхідна для дослідження, оскільки похибка отриманих висот рельєфу, обчислена у середній частині ділянки, завжди виявляється у кілька разів меншою від похибки, обчисленої за всією площею досліджуваної ділянки.

Ключові слова: оптимальна фільтрація, похибка обчислення висоти, рельєф поверхні планети, фотометрія.

Цитування: Дулова І.О., Бондаренко Н.В. Метод удосконаленої фотоклинометрії для відновлення рельєфу поверхні за зображеннями: похибки обчислення висоти та нахилів. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2023. Т. 28. № 4. С. 304–317. <https://doi.org/10.15407/rpra28.04.304>

Citation: Dulova, I.A., and Bondarenko, N.V., 2023. An improved photogrammetry technique for surface relief retrieval from images: error levels for height and slope estimates. *Radio Phys. Radio Astron.*, **28**(4), pp. 304–317. <https://doi.org/10.15407/rpra28.04.304>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Статтю опубліковано відповідно до умов відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

© Publisher PH "Akadempriodyka" of the NAS of Ukraine, 2023. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Вступ

Метод удосконаленої фотоклинометрії (МУФК), який дозволяє визначити найімовірніший рельєф ділянки поверхні за серією її зображень, вперше було викладено у статті В.Г. Парусімова та Ю.В. Корнієнка [1], опублікованій у 1973 році. Ідея обчислення найімовірнішого рельєфу дозволяє враховувати випадкову шумову складову початкових даних і дає можливість одночасно обробляти будь-яку кількість зображень.

Метод удосконаленої фотоклинометрії, подібно до традиційної фотоклинометрії, запропонованої в 1951 році Ван Діггеленом [2], використовує залежність яскравості елемента зображення від нахилу поверхні. Ця залежність дозволяє обчислити поле нахилів поверхні за яскравістю, що спостерігається, та в ідеальному випадку, за відсутності шумів, обчислити висоту в кожній точці досліджуваної ділянки шляхом інтегрування цього поля по відповідному контуру.

За відсутності шумів різниця висот між двома точками поверхні не залежить від шляху інтегрування. Однак у реальних експериментах реєстрація вимірювань завжди супроводжується нестабільністю електричних потоків (шумами) різної природи в усіх частинах системи космічного апарата, який приймає та реєструє зображення. Ця нестабільність зумовлена, у тому числі, тепловим шумом, що виникає через хаотичні рухи електронів (див., наприклад, [3]), квантовим шумом та іншими чинниками [4, 5]. Мінімальна величина завад у багатьох системах часто визначається дробовим шумом, який не залежить від температури, а пов'язаний з дискретністю потоків електронів та фотонів, що спричинює безладні коливання рівня зареєстрованого сигналу. Наявність подібних шумів призводить до того, що результати інтегрування поля нахилів між двома точками на поверхні відрізнятимуться залежно від обраного контуру.

Традиційну фотоклинометрію [2] широко використовували на ранніх етапах планетних досліджень, коли інша топографічна інформація була недоступною. Її застосовували у дослідженнях поверхні Марса (наприклад, [6, 7]), крижаних супутників (наприклад, [8, 9]) та інших тіл Сонячної системи (наприклад, [10, 11]). Останнім часом традиційна фотоклинометрія вико-

ристовується разом із фотограмметрією (наприклад, [12–16]). Обчислювальний алгоритм, що комбінує фотоклинометрію та фотограмметрію [17], дозволив успішно визначити форму малих тіл Сонячної системи [17–19]. Фотоклинометричний модуль було додано до системи обробки Ames Stereo Pipeline [20]; тут було реалізовано алгоритм мінімізації похибок шляхом прямого розв'язання системи рівнянь для кожної точки зображення, водночас самі обчислення потребували значного часу.

Подібно до традиційної фотоклинометрії, МУФК можна застосовувати у будь-якому діапазоні довжин хвиль (наприклад, [21–24]). Також МУФК можна реалізувати з використанням додаткової інформації про рельєф, наприклад, вимірювань альтиметра [14, 25, 26]. Окрім того, цей метод дозволяє одночасно з відновленням рельєфу отримати інформацію про фотометричні властивості поверхні (наприклад, [23, 24]). Для визначення найімовірнішого рельєфу методом МУФК можна використовувати будь-яку кількість початкових зображень [27]. Проте потрібно врахувати, що для надійного обчислення рельєфу необхідно мати, як мінімум, два зображення. Якщо треба додатково визначити фотометричні властивості поверхні, то необхідно використати щонайменше три початкових зображення, залежно від кількості параметрів, що підлягають визначенню. У загальному випадку, що більше число зображень, отриманих за різних умов освітлення, буде використано, то точнішим буде обчислений рельєф [27]. Однак навіть якщо маємо лише одне початкове зображення, обчислений за цим зображенням рельєф буде найімовірнішим.

Успішність застосування МУФК було продемонстровано на прикладах визначення рельєфу ділянок поверхні Марса [28, 29] та Місяця [24, 26, 30]. На сьогодні для великої кількості ділянок поверхні Місяця існують набори зображень, отриманих камерою високої роздільної здатності LROC, встановленою на космічному апараті Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO) [31] за оптимальних для застосування МУФК умов спостереження, а саме коли кут між напрямками освітлення хоча б однієї з пар зображень наближається до 90° .

Метою цієї статті є оцінка похибок обчислення висот поверхні за допомогою МУФК. Буде

розглянуто два варіанти реалізації МУФК — обчислення із застосуванням перетворення Фур'є та методу скінченних різниць. Буде вивчено похибки обчислених висот залежно від значень відношення сигнал/шум (ВСП) початкових зображень, від розмірів та форми деталей рельєфу, що реконструюється.

1. Метод МУФК та його реалізації

Обґрунтування МУФК та особливості його реалізації детально обговорюються у [1, 23–30, 32]. Ми зупинимось лише на головній ідеї методу МУФК та отриманих для його реалізації формулах.

Задача МУФК ставиться як пошук функції $H(x, y)$, що визначає залежність висоти поверхні H від координат (x, y) , за яскравістю елементів на m зображеннях $Q_j(x, y), j = 1, \dots, m$. Для цього необхідно знати фотометричну функцію поверхні, що вивчається, тобто залежність коефіцієнта розсіювання елементарної ділянки поверхні від орієнтації цієї ділянки відносно спостерігача та джерела освітлення.

Розклавши $Q_j(x, y)$ у ряд Тейлора та обмежившись двома першими членами (першим наближенням), матимемо вираз

$$Q_j(x, y) = Q_{0j} + \mathbf{c}_j \times \mathbf{t}(x, y), \quad (1)$$

де $\mathbf{t}(x, y)$ — це поле нахилів, яке спостерігається, а векторна константа \mathbf{c}_j — це перша похідна фотометричної функції F за компонентами нахилу,

$$\mathbf{c}_j = A \cdot F'(\mathbf{t}, \theta_j, \varepsilon_j, \psi_j) |_{\mathbf{t}}, \quad (2)$$

де θ_j, ε_j і ψ_j — умови спостереження, тобто кути освітлення, розсіювання та фазовий відповідно; A — альbedo, яке залежить від властивостей матеріалу, що вкриває поверхню, яку належить вивчити.

Надалі в обчисленнях будуть використовуватися значення J_j , тобто відхилення яскравості зображення Q_j від постійного значення Q_{0j} :

$$J_j(x, y) = Q_j(x, y) - Q_{0j}. \quad (3)$$

Поле нахилів $\mathbf{t}(x, y)$, що спостерігається, у загальному випадку відрізняється від справжньо-

го поля нахилів поверхні ∇H на деяку випадкову величину $\delta(x, y)$, обумовлену наявністю випадкового шуму реєстрації у початкових зображеннях:

$$\nabla H(x, y) = \mathbf{t}(x, y) + \delta(x, y). \quad (4)$$

Передбачається, що $H(x, y)$ та $\delta(x, y)$ — це реалізації стаціонарних гаусових процесів із заданими спектральними щільностями $I_H(\mathbf{k})$ та $I_\delta(\mathbf{k})$, де \mathbf{k} — вектор просторової частоти.

Найімовірніший рельєф ділянки поверхні, що обчислюється за допомогою МУФК — це оптимальна статистична оцінка, отримана за формулою Байєса [33]. Згідно з цією формулою, статистична оцінка пов'язує апостеріорну густину ймовірності $\rho_{\text{apo}}(x)$ з апіорною густиною $\rho_{\text{apr}}(x)$ через умовну густину ймовірності $\rho(Y|x)$. Величина $\rho(Y|x)$ описує ймовірність отримати в експерименті з вимірювання X результат Y за умови, що насправді величина X має значення x :

$$\rho_{\text{apo}}(x) = \rho_{\text{apr}}(x) \times \rho(Y|x) / \Phi, \quad (5)$$

де Φ — нормуючий множник, вигляд якого в цій задачі несуттєвий.

Зважаючи на те, що фур'є-компоненти стаціонарного гаусового процесу статистично незалежні одна від одної, подальші викладки зручно виконувати в області просторових частот. Тоді замість функцій $H(x, y), J_j(x, y)$ та $\mathbf{t}(x, y)$ будуть використовуватися їх фур'є-образи: $\tilde{H}(\mathbf{k}), \tilde{J}_j(\mathbf{k})$ та $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{k})$ відповідно. Підставивши в (5) вирази для відповідних густин імовірності та прологарифмувавши праву і ліву частини рівняння, отримуємо логарифмічний функціонал правдоподібності, що визначає апостеріорну густину ймовірності рельєфу $\tilde{H}(\mathbf{k})$, коли відоме $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{k})$ [26, 32]:

$$\ln \rho(\tilde{\mathbf{t}} | \tilde{H}) = - \int \frac{|\tilde{H}(\mathbf{k})|^2}{I_H(\mathbf{k})} dS_{\mathbf{k}} - \int \frac{|i\mathbf{k}\tilde{H}(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{k})|^2}{I_\delta(\mathbf{k})} dS_{\mathbf{k}}. \quad (6)$$

Умова максимуму функціоналу (6) дає оптимальну статистичну оцінку значення висот, або, іншими словами, визначає найімовірніший рельєф. Прирівнявши до нуля похідну виразу (6) за $\tilde{H}(\mathbf{k})$, отримуємо рівняння для визначення най-

імовірнішого рельєфу. Тоді фур'є-компоненти рельєфу, що підлягає визначенню, на кожній просторовій частоті \mathbf{k} матимуть вигляд [25, 32]

$$\tilde{H}(\mathbf{k}) = \frac{i \sum_j \mathbf{k} c_j \tilde{J}_j(\mathbf{k})}{I_\delta(\mathbf{k})/I_H(\mathbf{k}) + \sum_j (\mathbf{k} c_j)^2}. \quad (7)$$

Відношення $I_\delta(\mathbf{k})/I_H(\mathbf{k})$ являє собою величину, обернену до ВСШ для кожної просторової частоти \mathbf{k} фур'є-образу початкових зображень, а коефіцієнти c_j визначаються виходячи з обраної для обчислень фотометричної функції за формулою (2).

Виконуючи обернене перетворення Фур'є від частотної характеристики рельєфу, обчисленої за формулою (7), отримуємо найімовірніший рельєф поверхні згідно з використаними зображеннями.

Звідси видно, що у цьому варіанті реалізації МУФК (тобто МУФК-Ф) етап попередніх обчислень поля нахилів $\mathbf{t}(x, y)$, яке спостерігається, перестав бути обов'язковим. Натомість використовується оптимальний фільтр (7), який переводить сукупність m розподілів яскравості J_j ($j = 1, \dots, m$), див. вираз (3), у фур'є-компоненти найімовірнішого рельєфу.

Якщо спектральна щільність похибки I_δ постійна на всій частотній площині, а апіорна спектральна щільність рельєфу I_H досить велика, щоб першим доданком у (6) можна було знехтувати (тобто немає апіорних відомостей про статистику рельєфу), то пошук найімовірнішого рельєфу поверхні приводить до рівняння Пуассона (див. детальний опис у [1], а також [26]):

$$\Delta H(x, y) = \operatorname{div} \mathbf{t}(x, y). \quad (8)$$

Тут $\mathbf{t}(x, y)$ — найімовірніше поле нахилів, обчислене за результатами спостережень. Це поле нахилів належить визначити перед використанням (8). Отже, для кожної точки (x, y) на поверхні треба виконати пошук оптимального значення нахилу цієї поверхні з використанням усіх початкових зображень у вигляді J_j ($j = 1, \dots, m$), див. вираз (3), шляхом мінімізації обраної у конкретному дослідженні функції втрат. З цієї метою ми скористалися підходом, викладеним

у [27], однак можна також застосувати будь-який інший метод.

Цей варіант реалізації МУФК надалі називатимемо МУФК-Т. Розв'язання рівняння Пуассона виконується чисельно за допомогою методу скінченних різниць. Водночас враховується гранична умова Неймана [34]

$$\nabla H(x, y)|_C = \mathbf{t}_n(x, y), \quad (9)$$

де C — межа кадру; $\mathbf{t}_n(x, y)$ — нормальна похідна $H(x, y)$ на межі.

Кожен із методів реалізації МУФК має свої переваги та недоліки. Варіант МУФК-Ф дозволяє виконати швидкі обчислення, однак у цьому разі потрібно, щоб розміри зображень можна було подати як степінь двійки, щоб забезпечити реалізацію алгоритмів швидкого перетворення Фур'є. Варіант МУФК-Т можна застосовувати до зображень будь-якого розміру, проте самі обчислення можуть вимагати досить багато часу.

2. Похибки МУФК — теоретичні оцінки

Загалом, до похибок у обчисленні рельєфу за допомогою МУФК будуть призводити будь-які спотворення початкових зображень. Ми не розглядатимемо можливі спотворення, що виникають на етапах формування самого зображення за допомогою, наприклад, ПЗЗ-лінійки. Основна увага приділятиметься похибкам, спричиненим випадковим шумом реєстрації приймальної апаратури, та похибкам, властивим різним варіантам реалізації МУФК.

Ми також не розглядатимемо можливі спотворення рельєфу, що виникають через недостатньо точне суміщення початкових зображень, за якими обчислюється рельєф (тобто функція $H(x, y)$). Під точним суміщенням ми маємо на увазі таке суміщення, коли розбіжності положення деталей одна щодо одної не перевищують одного елемента розділення початкових зображень. Тоді форма найдрібніших об'єктів, які можна розпізнати на поверхні, не буде зазнавати спотворень. Якщо точного суміщення початкових зображень досягти не вдається, то слід чекати спотворення дрібних топографічних форм, виникнення артефактів тощо. За таких обставин треба знижувати розділення початкових зображень доти, поки

не виконається умова точного суміщення, що, у свою чергу, вказує на можливість надійного відтворення форм лише великих топографічних утворень.

Ефективний метод суміщення зображень з використанням МУФК описано в [35]. Метод полягає у тому, що замість початкових зображень суміщають рельєфи, знайдені методом МУФК за кожним зображенням окремо.

Потрібно зазначити, що зареєстрована яскравість поверхні Q в точці (x, y) відрізняється від яскравості Q_S , що спостерігається в цій точці:

$$Q(x, y) = Q_S(x, y) + N(x, y),$$

де $N(x, y)$ — випадковий шум реєстрації, що призводить до спотворення оцінок нахилів $\delta(x, y)$ цієї поверхні, див. формулу (4). Похибка яскравості, що реєструється, породжує випадкові спотворення (похибки) результату обчислення висот поверхні, і що вищим буде рівень шуму, то більшими будуть ці спотворення.

Згідно з [32], у реалізації МУФК-Ф випадкову похибку обчисленого рельєфу, що визначається як різниця між справжнім рельєфом H_0 і статистичною оцінкою найімовірнішого рельєфу (7), у частотній площині можна записати як

$$\tilde{\tau}(\mathbf{k}) = (P(\mathbf{k}) - 1) \tilde{H}_0(\mathbf{k}) + \sum_j U_j(\mathbf{k}) \tilde{N}_j(\mathbf{k}); \quad (10)$$

$$P(\mathbf{k}) = \frac{\sum_j (\mathbf{k} \mathbf{c}_j)^2}{I_\delta(\mathbf{k})/I_H(\mathbf{k}) + \sum_j (\mathbf{k} \mathbf{c}_j)^2}, \quad (11)$$

$$U_j(\mathbf{k}) = \frac{i \mathbf{k} \mathbf{c}_j}{I_\delta(\mathbf{k})/I_H(\mathbf{k}) + \sum_j (\mathbf{k} \mathbf{c}_j)^2}.$$

Видно, що випадкова похибка (10) складається з двох доданків суттєво різної природи. Перший доданок залежить від самого сигналу, він пов'язаний з характером формуючого фільтра (7), який має властивість згладжувати. Другий доданок — це шум N , пропущений через фільтр (7), що формує рельєф з початкових зображень. Обидва доданки залежать від частотної характеристики фільтра, а отже, від статистичних властивостей рельєфу та шуму. Проте перший доданок

залежить від конкретних реалізацій шуму N , а другий — від справжнього рельєфу H_0 . Перший доданок (10) являє собою складову частину систематичної похибки рельєфу.

Автокореляційна функція похибки (10) визначається виразом [32]

$$\tilde{D}(\mathbf{k}) = \left[\frac{1}{I_H(\mathbf{k})} + \frac{1}{I_\delta(\mathbf{k})} \sum_j (\mathbf{k} \mathbf{c}_j)^2 \right]^{-1}.$$

Якщо фільтр визначається рівністю (7), автокореляційна функція похибки досягає мінімуму для всіх \mathbf{k} [32].

Компоненти фур'є-образу похибки нахилу поверхні, рельєф якої визначено за формулою (7), згідно з [32], мають вигляд

$$\tilde{\nu}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} (P(\mathbf{k}) - 1) \tilde{H}_0(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \sum_j U_j(\mathbf{k}) \tilde{N}_j(\mathbf{k}); \quad (12)$$

статистичні властивості цієї похибки детально обговорюються у [32].

Похибки МУФК також залежать від параметрів дискретизації та скінченного розміру початкових зображень. У реалізації МУФК-Ф це призводить до обмеження діапазону фур'є-спектрів масивів, що обробляються, і, як наслідок, до того, що фур'є-образи цих масивів у нескінченній площині просторових частот — це періодично повторювані функції. Через це на межах кадрів виникають розриви і похибки обчислення поблизу меж виходять максимальними.

Похибки методу скінчених різниць (МСР), який використовується в рамках МУФК-Т, прямо залежать від кроку дискретизації зображень і мають порядок $O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$, де Δx та Δy — розміри одного пікселя зображення на поверхні (див., наприклад, [36]). Якщо $\Delta x = \Delta y$, то похибка МСР матиме порядок $O(\Delta x^2)$. Отже, зменшення похибки МСР можна досягти шляхом зменшення кроку дискретизації, що і було показано, наприклад, у [37]. Зменшення похибок МУФК-Т також можна досягти шляхом використання справжніх значень висот (граничні умови Діріхле [34]) замість граничних умов Неймана (9), якщо ці дані відомі.

Треба зазначити, що основне джерело похибок МУФК — це урахування лише першого наближення у рівнянні (1). Це обмеження породжує

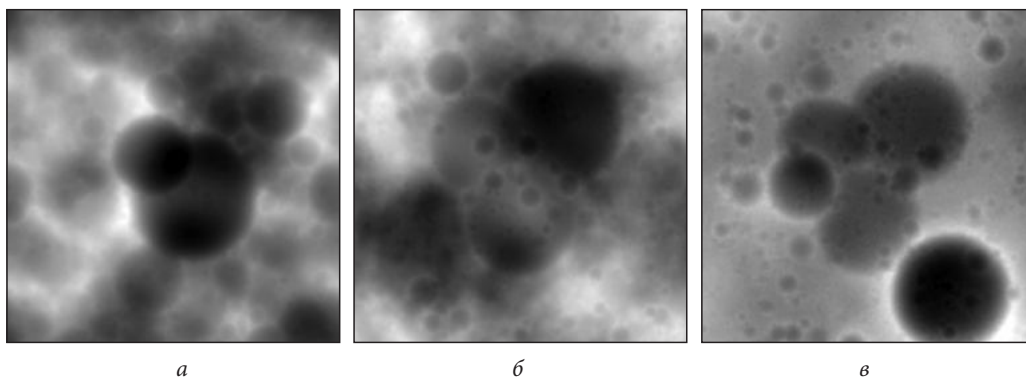


Рис. 1. Варіанти моделей рельєфу, які використовувалися для тестових обчислень: *a* — модель А; *б* — модель Б; *в* — модель В

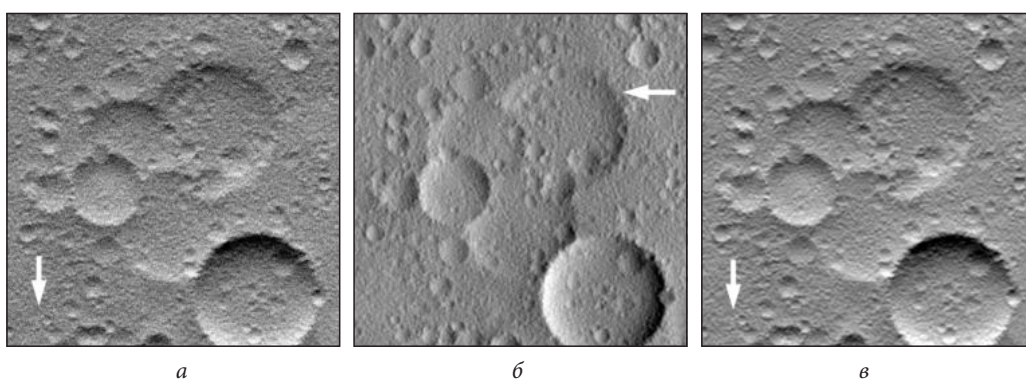


Рис. 2. Приклади початкових для МУФК зображень моделі рельєфу В (рис. 1, *в*), отриманих з шумом реєстрації: *a* — ВСШ = 1; *б* — ВСШ = 10; *в* — ВСШ = 50. Напрямки освітлення показано стрілками

систематичну похибку відновленого рельєфу як у разі застосування оптимального фільтра (7), так і в результаті розв'язання рівняння Пуассона (8).

3. Тестові експерименти

Похибки висот поверхні, обчислених за зображеннями з допомогою МУФК, визначалися як за теоретичними розрахунками, див. формули (10), (11), так і за допомогою тестових експериментів. Для обчислень було використано моделі рельєфу, показані на рис. 1. Це варіанти деякої підстильної поверхні, модифікованої кратерами. Такий тип ландшафту часто трапляється на поверхні планет земної групи. Для моделей А і Б як підстильна поверхня використовувалася площина, а для моделі В — спеціально згенерована поверхня, яка є реалізацією вінерівського випадкового процесу [38]. Середнє значення висот тестового рельєфу завжди дорівнювало нулю, а самі висоти змінювалися у таких межах: $[-2.86\sigma_0; 2.49\sigma_0]$ —

для моделі А, $[-2.36\sigma_0; 2.21\sigma_0]$ — для моделі Б, $[-3.59\sigma_0; 2.09\sigma_0]$ — для моделі В. Тут σ_0 — середньоквадратичне відхилення висот відповідної моделі рельєфу. Розмір ділянки для формування моделей рельєфу А, Б та В становив 512×512 пк.

За кожною моделлю рельєфу (рис. 1) формувалися набори початкових для МУФК зображень, зокрема, пари зображень із взаємно перпендикулярними напрямками освітлення. Передбачалося, що поверхня розсіює падаюче випромінювання за законом Ламберта [39], а альbedo поверхні в межах ділянки постійне та дорівнює 0.1.

Також було розглянуто різні стани приймальної апаратури, коли ВСШ набувало значень 1, 10, 50, 100 та 1 000. На рис. 2 показано приклади деяких зображень, згенерованих для моделі В (рис. 1, *в*) з ВСШ = 1, 10 та 50. Видно, що варіант з ВСШ = 1 (рис. 2, *a*) призводить до найменш чіткого зображення, топографія поверхні тут вирізняється найгірше порівняно з менш зашумленими зображеннями.

4. Глобальні похибки обчислення висоти та нахилів

Похибки обчислення висоти поверхні H , що виникають у результаті застосування МУФК для відновлення рельєфу ділянки B , наведено у таблиці. Вони визначались як середньоквадратичні значення похибки обчислених висот по всьому кадру. Похибки обчислено для обох реалізацій методу (МУФК-Т і МУФК-Ф) за різних ВСШ початкових зображень. Кут падіння випромінювання дорівнював 40° . Згідно з таблицею, у результаті використання МУФК-Т виходять менші похибки обчислення висоти порівняно з МУФК-Ф для всіх значень ВСШ початкових зображень. Варіант реалізації МУФК-Т також дозволяє отримати менші похибки градієнта висот рельєфу ε_ξ порівняно з МУФК-Ф для всіх значень ВСШ (див. таблицю).

У таблиці також наведено значення теоретичної похибки τ , обчисленої за формулою (10), та її випадкову складову R , тобто другий доданок (10). Видно, що випадкова похибка R пояснює незначну частину всієї похибки ε_H , що спостерігається у разі застосування МУФК-Ф. Теоретична похибка τ практично збігається з ε_H для ВСШ = 1 та передбачає значну частину ε_H в інших випадках.

Рельєф, реконструйований за допомогою МУФК (МУФК-Ф і МУФК-Т), за будь-якої якості початкових зображень виявився візуально подібним до модельного. Коефіцієнти кореляції між обчисленим та модельним рельєфом майже завжди виходили близькими до одиниці (таблиця); найнижче значення (0.6893) отримали, коли МУФК-Ф було застосовано до зображень з ВСШ = 1. Попри це можна зробити висновок, що всі значення коефіцієнтів кореляції з таблиці вказують на наявність прямої кореляції між обчисленим за допомогою МУФК рельєфом та базовою моделлю. Так, згідно з [40], якщо для виборок випадкових величин, розмір яких становить 512×512 елементів, обчислений експериментальний коефіцієнт кореляції дорівнює або перевищує 0.005, то гіпотеза про наявність кореляції між цими величинами підтверджується з імовірністю 0.99.

У разі використання МУФК-Ф середньоквадратичне відхилення висот відновленого за зображеннями рельєфу σ_H виявляється тим меншим, що нижчим є значення ВСШ (таблиця). У цьому проявляється згладжуючий характер фільтра (7), що призводить до значних похибок у визначенні висоти. Для МУФК-Т, коли ВСШ = 1, обчислений рельєф так само має найбільшу по-

Властивості рельєфу, відновленого за зображеннями з деякими значеннями ВСШ за допомогою методу вдосконаленої фотоклинометрії, реалізованого із застосуванням фур'є-аналізу (МУФК-Ф) і методу скінченних різниць (МУФК-Т)

Тип обробки зображень	ВСШ			
	1	10	50	100
<i>Середньоквадратичне відхилення висот відновленого рельєфу σ_H (у величинах σ_0^*)</i>				
МУФК-Т	1.0128	0.9882	0.9747	0.9758
МУФК-Ф	0.2434	0.5946	0.8285	0.8914
<i>Коефіцієнт кореляції між обчисленим рельєфом і моделлю</i>				
МУФК-Т	0.9657	0.9631	0.9769	0.9746
МУФК-Ф	0.6893	0.8959	0.9443	0.9512
<i>Похибки визначення висот поверхні ε_H (у величинах σ_0)</i>				
МУФК-Т	0.2703	0.2640	0.2137	0.2237
МУФК-Ф	0.8593	0.5599	0.3709	0.3308
τ^{**}	0.8318	0.4877	0.2165	0.1309
R^{***}	0.0214	0.0077	0.0037	0.0026
<i>Похибки градієнта висот поверхні ε_ξ</i>				
МУФК-Т	0.01225	0.00512	0.00379	0.00360
МУФК-Ф	0.02301	0.00975	0.00550	0.00474

Примітки. * σ_0 — середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу; τ^{**} і R^{***} — теоретично передбачена похибка та її випадкова складова відповідно.

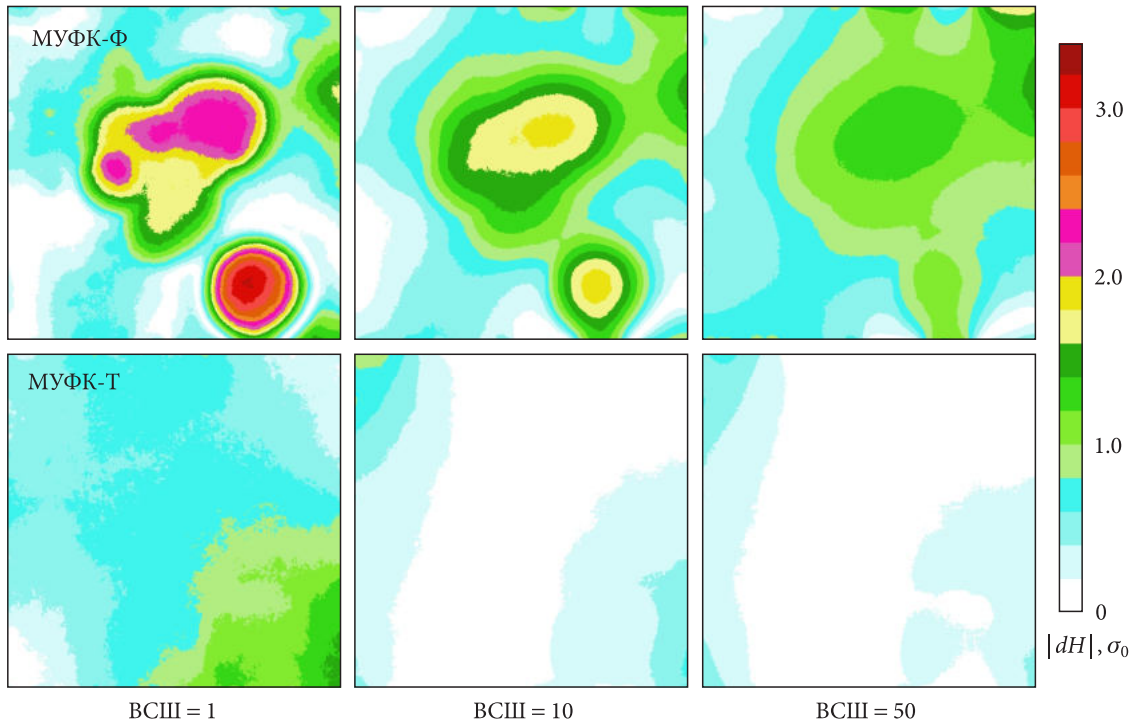


Рис. 3. Модель рельєфу В (рис. 1, в): просторовий розподіл модуля похибки обчислених висот $|dH|$ у разі визначення рельєфу за допомогою МУФК-Ф (верхній ряд) і МУФК-Т (нижній ряд), коли початкові зображення мають ВСШ = 1, 10 та 50; σ_0 – середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу

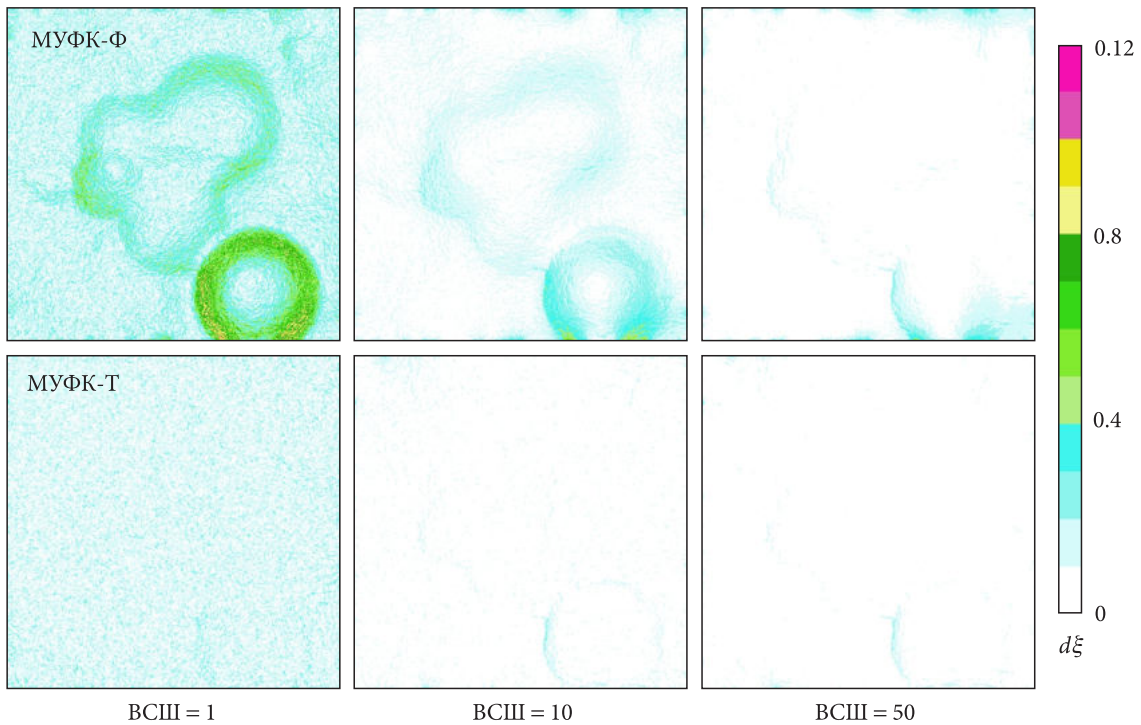


Рис. 4. Модель рельєфу В (рис. 1, в): просторовий розподіл похибки нахилів поверхні $d\xi$ рельєфу, визначеного за допомогою МУФК-Ф (верхній ряд) і МУФК-Т (нижній ряд), у випадках, коли початкові зображення мають ВСШ = 1, 10 та 50

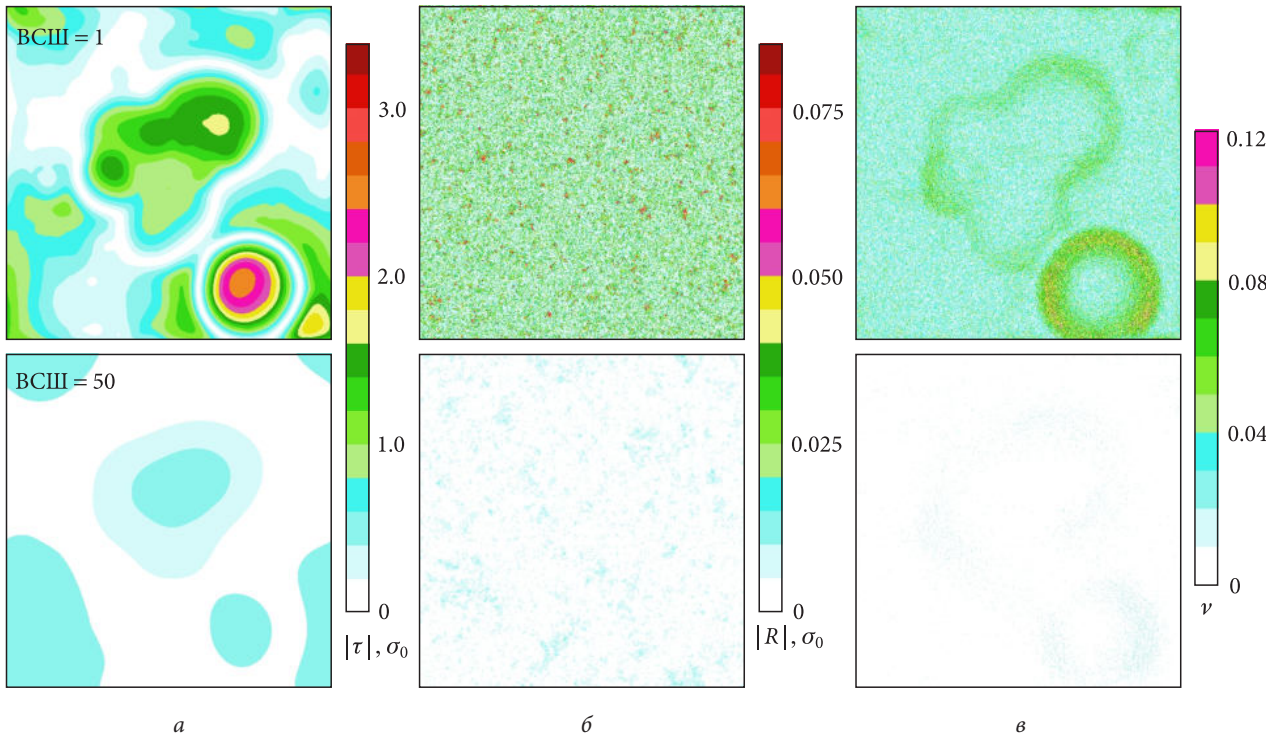


Рис. 5. Просторовий розподіл теоретично передбачених похибок відновленого рельєфу моделі В (рис. 1, в), обчисленого за допомогою МУФК-Ф за початковими зображеннями з ВСШ = 1 (верхній ряд) і 50 (нижній ряд): а – модуль повної теоретичної похибки обчислення висот $|\tau|$; б – модуль випадкової теоретичної похибки обчислення висот $|R|$ (σ_0 – середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу В); в – похибка нахилів поверхні ν

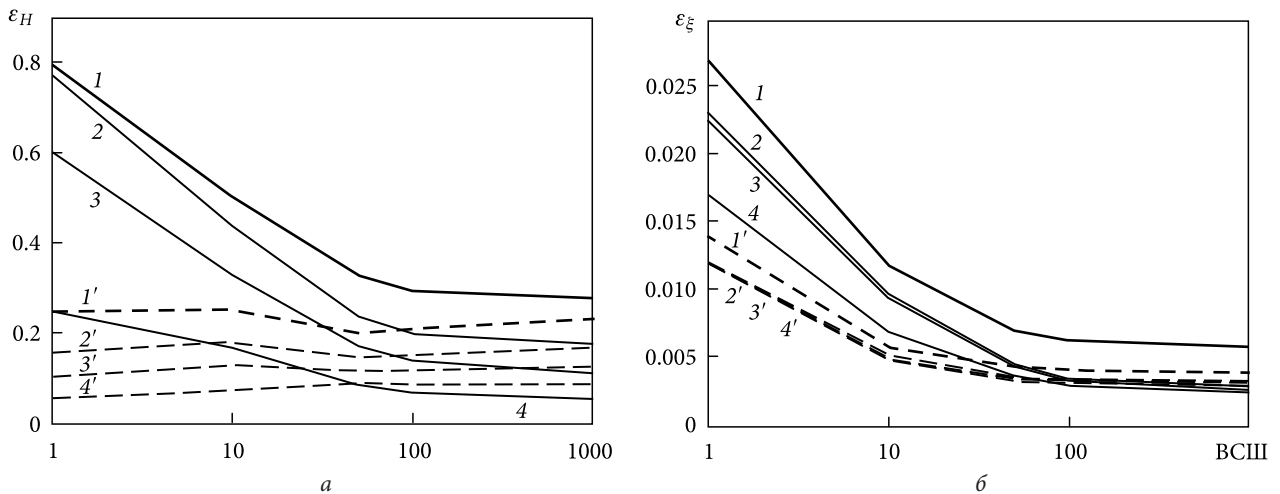


Рис. 6. Залежність похибок відновлення рельєфу (а – висоти ε_H , у величинах σ_0 ; б – градієнта висот ε_ξ) від ВСШ початкових зображень у середній частині ділянки В (рис. 1, в) з відступами від меж 1 пк (криві 1 і 1'), 64 пк (криві 2 і 2'), 128 пк (криві 3 і 3') та 192 пк (криві 4 і 4'). Суцільні лінії відповідають обчисленням за допомогою МУФК-Ф, а переривчасті – МУФК-Т

хибку, а σ_H , навпаки, виявляється більшим за середньоквадратичне відхилення висот модельного рельєфу σ_0 .

Просторовий розподіл похибки обчислених за допомогою МУФК висот ділянки В (рис. 1, в) для ВСШ початкових зображень, який дорівнював

1, 10 та 50, показано на рис. 3. Тут добре видно похибки, що виникають поблизу меж ділянки, зокрема, для ВСШ = 10 та 50. Як згадувалося вище (див. п. 3), для МУФК-Ф це, здебільшого, пов'язано з дискретизацією початкових зображень, а для МУФК-Т – насамперед із викорис-

танням граничної умови Неймана. Також для МУФК-Т наявність шуму у початкових зображеннях може призводити до неточностей обчислення граничних умов.

Просторовий розподіл похибки відновлених за допомогою МУФК нахилів поверхні $d\xi$ ділянки В (рис. 1, в) за початковими зображеннями з ВСШ, що дорівнювало 1, 10 та 50, показано на рис. 4. Видно, що для всіх ВСШ у разі використання МУФК-Ф найбільші похибки нахилів виникають поблизу меж ділянки та на схилах кратерів. У результаті застосування МУФК-Т похибки нахилів на найкрутіших схилах також можна помітити, однак вони значно менші від похибок МУФК-Ф. Крім того, похибки нахилів для варіанта МУФК-Т із ВСШ = 1 спричинені, здебільшого, наявністю шумової складової.

Просторовий розподіл теоретично передбачених похибок відновленого за допомогою МУФК-Ф рельєфу моделі В (рис. 1, в) у випадках, коли початкові зображення мали ВСШ = 1 та 50, показано на рис. 5. Модуль теоретичної похибки $|\tau|$, обчисленої за формулою (10), та її випадкової складової $|R|$, показано на рис. 5, а та б відповідно. Колірна шкала відповідає рис. 3. Видно, що розподіл $|R|$ (рис. 5, б) не має ніякого зв'язку із самим рельєфом, а найбільші теоретичні похибки спостерігаються поблизу кратерів (рис. 5, а).

Найвищі значення похибки нахилів ν , обчисленої за формулою (12), відповідають найкрутішим схилам. Для ВСШ = 50 ця похибка дуже мала і не перевищує $0.01\sigma_0$. Колірна шкала на рис. 5, в відповідає рис. 4.

На рис. 6 наведено залежність похибки обчислених висот (рис. 6, а) та її градієнта (рис. 6, б) від ВСШ початкових зображень у середній частині ділянки поверхні (модель В, рис. 1, в) з відступами від меж величиною 1, 64, 128 та 192 пк. Результати, отримані МУФК-Ф, показано суцільними лініями, а МУФК-Т — переривчастими лініями. Видно, що коли відступ від межі ділянки збільшується, похибка обчислених висот у її середній частині завжди зменшується. Якщо відступ ≥ 192 пк, то точність відновлення висот методом Фур'є виявляється дещо кращою, ніж у варіанті МУФК-Т.

Усі похибки, обчислені у середній частині ділянки, виявляються нижчими за похибки, визначені по всій площі ділянки (див. таблицю). Цей

факт указує на те, що найкраще відновлювати рельєф на більшій, порівняно з необхідною для вивчення, ділянці поверхні, а також, аналізуючи результати, уникати використання прилеглих до меж ділянок.

Висновки

Тестові експерименти показали, що рельєф, реконструйований за зображеннями з використанням методу вдосконаленої фотоклинометрії, завжди подібний до модельного. У результаті реалізації обчислень за допомогою МУФК-Ф виявилось, що відновлений рельєф чітко залежить від ВСШ початкових зображень: за низьких ВСШ відхилення значень висот від рівня середньої поверхні виявилися заниженими; середньоквадратична похибка визначення висот в експериментах на моделі змінювалася в межах від $0.86\sigma_0$ (для початкових зображень з ВСШ = 1) до $0.33\sigma_0$ (для ВСШ = 100), де σ_0 — середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу. Мінімальні значення похибок обчислення висот у разі використання МУФК-Ф змінюються від $0.83\sigma_0$ (ВСШ = 1) до $0.13\sigma_0$ (ВСШ = 100). Для МУФК-Т похибка визначення висот отриманого рельєфу змінювалася незначно та складала $0.21\sigma_0 \dots 0.27\sigma_0$.

Рельєф у середній частині ділянки, що вивчається, відновлюється точніше у порівнянні з прилеглими до меж районами. Так, для всіх значень ВСШ і для обох варіантів реалізації методу (МУФК-Ф та МУФК-Т) похибка визначення висот рельєфу ε_H , обчислена у середній частині ділянки (площа якої у 16 разів менша за площу всієї ділянки), виявилася приблизно у 3–6 разів меншою порівняно з ε_H , обчисленою по всій площі досліджуваної ділянки. З огляду на це можна вважати обґрунтованими такі рекомендації: найкраще обчислювати рельєф на більшій порівняно з необхідною для дослідження ділянці поверхні, а також, аналізуючи результати його відновлення, бажано уникати використання прилеглих до межі кадру ділянок. Слід брати до уваги, що розмір топографічних об'єктів, форма яких відтворюється надійно, визначається таким просторовим розділенням початкових зображень, яке забезпечує виконання умови їх точного суміщення. Це просторове розділення може бути істотно гіршим за розділення зображень, одержаних безпосередньо космічним апаратом.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Парусимов В.Г., Корниенко Ю.В. Об отыскании наиболее вероятного рельефа поверхности планеты по ее оптическому изображению. *Астрометрия и астрофизика*. 1973. Вып. 19. С. 20–24.
2. Van Diggelen J. A photometric investigation of the slopes and the heights of the ranges of hills in the Maria of the Moon. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*. 1951. Vol. 11. P. 283–289.
3. Nyquist H. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* 1928. Vol. 32. P. 110–113. DOI: 10.1103/PhysRev.32.110
4. Huang T.S. *Advances in computer vision and image processing*. USA: JAI Press, 1986. 344 p.
5. Boncelet C., and Bovik A.C. Image Noise Models. *Handbook of image and video processing*. Ed. by A.C. Bovik. P. 397–409. USA: Academic Press, 2005. 1384 p.
6. Howard A.D., Blasius K.R., and Cutts J.A. Photoclinometric determination of the topography of the Martian north polar cap. *Icarus*. 1982. Vol. 50, Iss. 2–3. P. 245–258. DOI: 10.1016/0019-1035(82)90125-7
7. Goldspiel J.M., Squyres S.W., and Jankowski D.G. Topography of small Martian valleys. *Icarus*. 1993. Vol. 105, Iss. 2. P. 479–500. DOI: 10.1006/icar.1993.1143
8. Squyres S.W. The topography of Ganymede's grooved terrain. *Icarus*. 1981. Vol. 46, Iss. 2. P. 156–168. DOI: 10.1016/0019-1035(81)90204-9
9. Barnes J.W., Brown R.H., Soderblom L., Sotin C., Le Mouèlic S., Rodriguez S., Jaumann R., Beyer R.A., Buratti B.J., Pitman K., Baines K.H., Clark R., and Nicholson P. Spectroscopy, morphometry, and photoclinometry of Titan's dunefields from Cassini/VIMS. *Icarus*. 2008. Vol. 195, Iss. 1. P. 400–414. DOI: 10.1016/j.icarus.2007.12.006
10. Mougini-Mark P. J. and Wilson L. MERC: a FORTRAN IV Program for the production of topographic data for the planet Mercury. *Comput. Geosci.* 1981. Vol. 7, Iss. 1. P. 35–45. DOI: 10.1016/0098-3004(81)90038-8
11. Muinonen K., Lumme K., and Irvine W.M. Slope variations on the surface of Phobos. *Planet. Space Sci.* 1991. Vol. 39, Iss. 1–2. P. 327–334. DOI: 10.1016/0032-0633(91)90153-2
12. Schenk P.M., and Moore J.M. Volcanic constructs on Ganymede and Enceladus: Topographic evidence from stereo images and photoclinometry. *J. Geophys. Res.* 1995. Vol. 100, Iss. E9. P. 19009–19022. DOI: 10.1029/95JE01854
13. Lohse V., Heipke C., and Kirk R.L. Derivation of planetary topography using multi-image shape-from-shading. *Planet. Space Sci.* 2006. Vol. 54, Iss. 7. P. 661–674. DOI: 10.1016/j.pss.2006.03.002
14. Korokhin V., Velikodsky Y., Shkuratov Y., Kaydash V., Mall U., and Videen G. Using LROC WAC data for Lunar surface photoclinometry. *Planet. Space Sci.* 2018. Vol. 160. P. 120–135. DOI: 10.1016/j.pss.2018.05.020
15. Velichko S., Korokhin V., Velikodsky Y., Kaydash V., Shkuratov Y., and Videen G. Removal of topographic effects from LROC NAC images as applied to the inner flank of the crater Hertzprung S. *Planet. Space Sci.* 2020. Vol. 193, 105090. DOI: 10.1016/j.pss.2020.105090
16. Velichko S., Korokhin V., Shkuratov Y., Kaydash V., Surkov Y., and Videen G. Photometric analysis of the Luna spacecraft landing sites. *Planet. Space Sci.* 2022. Vol. 216, 105475. DOI: 10.1016/j.pss.2022.105475
17. Gaskell R.W., Barnouin-Jha O.S., Scheeres D.J., Konopliv A.S., Mukai T., Abe S., Saito J., Ishiguro M., Kubota T., Hashimoto T., Kawaguchi J., Yoshikawa M., Shirakawa K., Kominato T., Hirata N., and Demura H. Characterizing and navigating small bodies with imaging data. *Meteorit. Planet. Sci.* 2008. Vol. 43, Iss. 6. P. 1049–1061. DOI: 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00692.x
18. Raymond C.A., Jaumann R., Nathues A., Sierks H., Roatsch T., Preusker F., Scholten F., Gaskell R.W., Jorda L., Keller H.U., Zuber M.T., Smith D.E., Mastrodemos N., and Mottola S. The dawn topography investigation. *Space Sci. Rev.* 2011. Vol. 163. P. 487–510. DOI: 10.1007/s11214-011-9863-z
19. Jorda L., Gaskell R., Capanna C., Hviid S., Lamy P., Ďurech J., Faury G., Groussin O., Gutiérrez P., Jackman C., Keihm S.J., Keller H.U., Knollenberg J., Kührt E., Marchi S., Mottola S., Palmer E., Schloerb F.P., Sierks H., Vincent J.-B., A'Hearn M.F., Barbieri C., Rodrigo R., Koschny D., Rickman H., Barucci M.A., Bertaux J.L., Bertini I., Cremonese G., Da Deppo V., Davidsson B., Debei S., De Cecco M., Fornasier S., Fulle M., Güttler C., Ip W.-H., Kramm J.R., Küppers M., Lara L.M., Lazzarin M., Lopez Moreno J.J., Marzari F., Naletto G., Oklay N., Thomas N., Tubiana C., and Wenzel K.-P. The global shape, density and rotation of Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from preperihelion Rosetta/OSIRIS observations. *Icarus*. 2016. Vol. 277. P. 257–278. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.05.002
20. Alexandrov O., and Beyer R.A. Multiview shape-from-shading for planetary images. *Earth Space Sci.* 2018. Vol. 5, Iss. 10. P. 652–666. DOI: 10.1029/2018EA000390
21. Wildey R.L. Radarclinometry of the earth and Venus from Space-Shuttle and Venera-15 imagery. *Earth Moon Planets*. 1990. Vol. 48. P. 197–231. DOI: 10.1007/BF00113857
22. Watters T.R., and Robinson M.S. Radar and photoclinometric studies of wrinkle ridges on Mars. *J. Geophys. Res.* 1997. Vol. 102, Iss. E5. P. 10889–10903. DOI: 10.1029/97JE00411
23. Корниенко Ю.В., Нгуен Суан Ань. Определение рельефа и радиооптических параметров участка поверхности с помощью радиолокатора с синтезированной апертурой. *Радиофизика и электроника: сб. науч. тр. Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. Харьков, 1996. № 1. С. 129–133.*
24. Bondarenko N.V., Dulova I.A., and Kornienko Y.V. High-resolution albedo and relief of the lunar surface with the improved photoclinometry method for the topography reconstruction from a set of images. *49th Lunar and Planetary Science Conference*, 2018. LPI Contribution No. 2083, id. 2459. URL: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2018/pdf/2459.pdf> (Last accessed: 28.01.2023).

25. Корниенко Ю.В., Дулова И.А. Оптимальное определение рельефа поверхности по совокупности фотометрических и альтиметрических данных. *Радиофизика и электроника*. 2019. Т. 24, № 4. С. 46—52. DOI: 10.15407/fej2019.04.048
26. Корниенко Ю.В., Дулова И.О., Бондаренко Н.В. Урахування альтиметричної інформації при визначенні рельєфу поверхні планети методом поліпшеної фотоклинометрії за полем нахилів. *Радиофизика і радіоастрономія*. 2021. Т. 26, № 2. С. 173-188. DOI: 10.15407/rpra26.02.173
27. Дулова И.А., Корниенко Ю.В., Скуратовский С.И. Определение рельефа поверхности клинометрическим методом при избытке или недостатке исходных данных. *Радиофизика и электроника*. 2007. Т. 12, № 2. С. 408—415.
28. Дулова И.А., Скуратовский С.И., Бондаренко Н.В., Корниенко Ю.В. Восстановление рельефа поверхности по одиночным изображениям с помощью фотометрического метода. *Астрономический вестник*. 2008. Т. 42, № 6. С. 557—571.
29. Бондаренко Н.В., Дулова И.А., Корниенко Ю.В. Топография полигональных структур на Марсе в месте посадки КА «Phoenix» по результатам вычисления рельефа с помощью метода улучшенной фотоклинометрии по изображениям HiRISE. *Астрономический вестник*. 2014. Т. 48, № 4. С. 263—279. DOI: 10.7868/S0320930X14040033
30. Bondarenko N.V., Dulova I.A., and Kornienko Yu.V. Photometric functions and the improved photoclinometry method: mature Lunar mare surfaces. *51st Lunar and Planetary Science Conference*, 2020. Abstract No. 1845. URL: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2020/eposter/1845.pdf> (Last accessed: 28.01.2023).
31. Robinson M.S., Brylow S.M., Tschimmel M., Humm D., Lawrence S.J., Thomas P.C., Denevi B.W., Bowman-Cisneros E., Zerr J., Ravine M.A., Caplinger M.A., Ghaemi F.T., Schaffner J.A., Malin M.C., Mahanti P., Bartels A., Anderson J., Tran T.N., Eliason E.M., McEwen A.S., Turtle E., Jolliff B.L., and Hiesinger H. Lunar Reconnaissance Orbiter camera (LROC) instrument overview. *Space Sci. Rev.* 2010. Vol. 150, Iss. 1—4. P. 81—124. DOI: 10.1007/s11214-010-9634-2
32. Дулова И.А., Корниенко Ю.В. Случайная погрешность определения рельефа поверхности по ее радиояркости. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2001. Т. 6, № 4. С. 310—316. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/122282> (дата звернення: 28.01.2023).
33. Bayes T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1763. Vol. 53. P. 360—418.
34. Смирнов М.М. *Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка*. Москва: Наука, 1964. 104 с.
35. Дулова И.А., Корниенко Ю.В., Скуратовский С.И. Совмещение изображений при определении рельефа поверхности фотоклинометрическим методом. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2015. Т. 20, № 1. С. 30—36. DOI: 10.15407/rpra20.07.030
36. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука, 1978. 592 с.
37. Guo P. The numerical solution of Poisson equation with Dirichlet boundary conditions. *J. Appl. Math. Phys.* 2021. Vol. 9, Iss. 12. P. 3007—3018. DOI: 10.4236/jamp.2021.912194
38. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы)*. Москва: Наука, 1974. 696 с.
39. Ландсберг Г.С. *Оптика*. Москва: Наука, 1976. 928 с.
40. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука, 1984. 832 с.

Стаття надійшла 16.05.2023

REFERENCES

1. Parusimov, V.G., and Kornienko, Y.V., 1973. On determination of the most probable relief of a surface region by its optical image. *Astrometriya i astrofizika*, 19, pp. 20—24 (in Russian).
2. Van Diggelen, J., 1951. A photometric investigation of the slopes and the heights of the ranges of hills in the Maria of the Moon. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 11, pp. 283—289.
3. Nyquist, H., 1928. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32, pp. 110—113. DOI: 10.1103/PhysRev.32.110
4. Huang, T.S., 1986. *Advances in computer vision and image processing*. USA: JAI Press.
5. Boncelet, C., and Bovik, A.C. ed., 2005. Image Noise Models. *Handbook of image and video processing*. USA: Academic Press, pp. 397—409.
6. Howard, A.D., Blasius, K.R., and Cutts, J.A., 1982. Photoclinometric determination of the topography of the Martian north polar cap. *Icarus*, 50(2—3), pp. 245—258. DOI: 10.1016/0019-1035(82)90125-7
7. Goldspiel, J.M., Squyres, S.W., and Jankowski, D.G., 1993. Topography of small Martian valleys. *Icarus*, 105(2), pp. 479—500. DOI: 10.1006/icar.1993.1143
8. Squyres, S.W., 1981. The topography of Ganymede's grooved terrain. *Icarus*, 46(2), pp. 156—168. DOI: 10.1016/0019-1035(81)90204-9
9. Barnes, J.W., Brown, R.H., Soderblom, L., Sotin, C., Le Mouèlic, S., Rodriguez, S., Jaumann, R., Beyer, R.A., Buratti, B.J., Pitman, K., Baines, K.H., Clark, R., and Nicholson, P., 2008. Spectroscopy, morphometry, and photoclinometry of Titan's dunefields from Cassini/VIMS. *Icarus*, 195(1), pp. 400—414. DOI: 10.1016/j.icarus.2007.12.006
10. Mouginiis-Mark, P.J., and Wilson, L., 1981. MERC: a FORTRAN IV program for the production of topographic data for the planet Mercury. *Comput. Geosci.*, 7(1), pp. 35—45. DOI: 10.1016/0098-3004(81)90038-8
11. Muinonen, K., Lumme, K., and Irvine, W. M., 1991. Slope variations on the surface of Phobos. *Planet. Space Sci.*, 39(1—2), pp. 327—334. DOI: 10.1016/0032-0633(91)90153-2
12. Schenk, P.M., and Moore, J.M., 1995. Volcanic constructs on Ganymede and Enceladus: Topographic evidence from stereo images and photoclinometry. *J. Geophys. Res.*, 100(E9), pp. 19009—19022. DOI: 10.1029/95JE01854

13. Lohse, V., Heipke, C., and Kirk, R.L., 2006. Derivation of planetary topography using multi-image shape-from shading. *Planet. Space Sci.*, **54**(7), pp. 661–674. DOI: 10.1016/j.pss.2006.03.002
14. Korokhin, V., Velikodsky, Y., Shkuratov, Y., Kaydash, V., Mall, U., and Videen, G., 2018. Using LROC WAC data for lunar surface photoclinometry. *Planet. Space Sci.*, **160**, pp. 120–135. DOI: 10.1016/j.pss.2018.05.020
15. Velichko, S., Korokhin, V., Velikodsky, Y., Kaydash, V., Shkuratov, Y., and Videen, G., 2020. Removal of topographic effects from LROC NAC images as applied to the inner flank of the crater Hertzprung S. *Planet. Space Sci.*, **193**, 105090. DOI: 10.1016/j.pss.2020.105090
16. Velichko, S., Korokhin, V., Shkuratov, Y., Kaydash, V., Surkov, Y., and Videen, G., 2022. Photometric analysis of the Luna spacecraft landing sites. *Planet. Space Sci.*, **216**, 105475. DOI: 10.1016/j.pss.2022.105475
17. Gaskell, R.W., Barnouin-Jha, O.S., Scheeres, D.J., Konopliv, A.S., Mukai, T., Abe, S., Saito, J., Ishiguro, M., Kubota, T., Hashimoto, T., Kawaguchi, J., Yoshikawa, M., Shirakawa, K., Kominato, T., Hirata, N., and Demura, H., 2008. Characterizing and navigating small bodies with imaging data. *Meteorit. Planet. Sci.*, **43**(6), pp. 1049–1061. DOI: 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00692.x
18. Raymond, C.A., Jaumann, R., Nathues, A., Sierks, H., Roatsch, T., Preusker, F., Scholten, F., Gaskell, R.W., Jorda, L., Keller, H.U., Zuber, M.T., Smith, D.E., Mastrodemos, N., and Mottola, S., 2011. The dawn topography investigation. *Space Sci. Rev.*, **163**, pp. 487–510. DOI: 10.1007/s11214-011-9863-z
19. Jorda, L., Gaskell, R., Capanna, C., Hviid, S., Lamy, P., Ďurech, J., Faury, G., Groussin, O., Gutiérrez, P., Jackman, C., Keihm, S.J., Keller, H.U., Knollenberg, J., Kührt, E., Marchi, S., Mottola, S., Palmer, E., Schloerb, F.P., Sierks, H., Vincent, J.-B., A'Hearn, M.F., Barbieri, C., Rodrigo, R., Koschny, D., Rickman, H., Barucci, M.A., Bertaux, J.L., Bertini, I., Cremonese, G., Da Deppo, V., Davidsson, B., Debei, S., De Cecco, M., Fornasier, S., Fulle, M., Güttler, C., Ip, W.-H., Kramm, J.R., Küppers, M., Lara, L.M., Lazzarin, M., Lopez Moreno, J.J., Marzari, F., Naletto, G., Oklay, N., Thomas, N., Tubiana, C., and Wenzel, K.-P., 2016. The global shape, density and rotation of Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from preperihelion Rosetta/OSIRIS observations. *Icarus*, **277**, pp. 257–278. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.05.002
20. Alexandrov, O., and Beyer, R.A., 2018. Multiview shape-from-shading for planetary images. *Earth Space Sci.*, **5**(10), pp. 652–666. DOI: 10.1029/2018EA000390
21. Wildey, R.L., 1990. Radarclinometry of the earth and Venus from Space-Shuttle and Venera-15 imagery. *Earth Moon Planets*, **48**, pp. 197–231. DOI: 10.1007/BF00113857
22. Watters, T.R., and Robinson, M.S., 1997. Radar and photoclinometric studies of wrinkle ridges on Mars. *J. Geophys. Res.*, **102**(E5), pp. 10889–10903. DOI: 10.1029/97JE00411
23. Nguen Suan An, and Kornienko, Y.V., 1998. Determination of the relief and radiooptical parameters of a surface area by means of a synthetic aperture radar. *Telecommun. Radio Eng.*, **52**(5), pp. 29–33. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v52.i5.40
24. Bondarenko, N.V., Dulova, I.A., and Kornienko, Y.V., 2018. High-resolution albedo and relief of the Lunar surface with the improved photoclinometry method for the topography reconstruction from a set of images. In: *49th Lunar and Planetary Science Conference*, LPI Contrib. No. 2083, id. 2459 [online]. [viewed 28 January 2023]. Available from: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2018/pdf/2459.pdf>
25. Kornienko, Y.V., and Dulova, I.A., 2019. Optimal surface relief reconstruction from both the photometric and the altimetric data. *Radiofiz. Electron.*, **24**(4), pp. 46–52 (in Russian). DOI: 10.15407/rej2019.04.046
26. Kornienko, Y.V., Dulova, I.A., and Bondarenko, N.V., 2021. Involvement of altimetry information into the improved photoclinometry method for relief retrieval from a slope field. *Radio Phys. Radio Astron.*, **26**(2), pp. 173–188 (in Ukrainian). DOI: 10.15407/rpra26.02.173
27. Dulova, I.A., Kornienko, Yu.V., and Skuratovskiy, S.I., 2008. A clinometric technique for relief derivation from redundant or deficient input data. *Telecommun. Radio Eng.*, **67**(18), pp. 1605–1620. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v67.i18.10
28. Dulova, I.A., Skuratovskiy, S.I., Bondarenko, N.V., and Kornienko, Yu.V., 2008. Reconstruction of the surface topography from single images with the photometric method. *Sol. Sys. Res.*, **42**(6), pp. 522–535. DOI: 10.1134/S0038094608060051
29. Bondarenko, N.V., Dulova, I.A., and Kornienko, Yu.V., 2014. Topography of polygonal structures at the Phoenix landing site on Mars through the relief retrieval from the HiRISE images with the improved photoclinometry method. *Sol. Syst. Res.*, **48**(4), pp. 243–258. DOI: 10.1134/S0038094614040030
30. Bondarenko, N.V., Dulova, I.A., and Kornienko, Yu.V., 2020. Photometric functions and the improved photoclinometry method: mature Lunar mare surfaces. In: *51th Lunar and Planetary Science Conference*. Abstract No. 1845 [online]. [viewed 28 January 2023]. Available from: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2020/eposter/1845.pdf>
31. Robinson, M.S., Brylow, S.M., Tschimmel, M., Humm, D., Lawrence, S.J., Thomas, P.C., Denevi, B.W., Bowman-Cisneros, E., Zerr, J., Ravine, M.A., Caplinger, M.A., Ghaemi, F.T., Schaffner, J.A., Malin, M.C., Mahanti, P., Bartels, A., Anderson, J., Tran, T.N., Eliason, E.M., Mcewen, A.S., Turtle, E., Jolliff, B.L., and Hiesinger, H., 2010. Lunar Reconnaissance Orbiter camera (LROC) instrument overview. *Space Sci. Rev.*, **150**(1–4), pp. 81–124. DOI: 10.1007/s11214-010-9634-2
32. Dulova, I.A., and Kornienko, Yu.V., 2001. Random error of surface relief reconstruction by radio brightness. *Radio Phys. Radio Astron.*, **6**(4), pp. 310–316 (in Russian). Available from: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/122282> [viewed 28 January 2023].
33. Bayes, T., 1763. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **53**, pp. 360–418.
34. Smirnov, M.M., 1964. *Second-order partial differential equations*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
35. Dulova, I.A., Kornienko, Yu.V., and Skuratovskiy, S.I., 2015. Images matching in case of surface relief reconstruction with the photoclinometric method. *Radio Phys. Radio Astron.*, **20**(1), pp. 30–36 (in Russian). DOI: 10.15407/rpra20.07.030

36. Samarskiy, A.A., Nikolayev, E.S. 1978. *Methods for solving grid equations*. Moscow, USSR: Nauka Publ. (in Russian).
37. Guo, P., 2021. The numerical solution of Poisson equation with Dirichlet boundary conditions. *J. Appl. Math. Phys.*, **9**(12), pp. 3007–3018. DOI: 10.4236/jamp.2021.912194
38. Liptser, R.S., and Shiryaev, A.N., 1974. *Statistics of random processes (non-linear filtering and related issues)*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
39. Landsberg, G.S., 1976. *Optics*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
40. Korn, G., and Korn, T., 2000. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Dover Publ., Revised ed.

Received 16.05.2023

I.A. Dulova¹, and N.V. Bondarenko^{1,2}

¹ O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine
12, Acad. Proskury St., Kharkiv, 61085, Ukraine

² University of California – Santa Cruz, Santa Cruz, 95064, USA

AN IMPROVED PHOTOCLINOMETRY TECHNIQUE FOR SURFACE RELIEF RETRIEVAL FROM IMAGES: ERROR LEVELS FOR HEIGHT AND SLOPE ESTIMATES

Subject and Purpose. Computer simulation methods are used for investigating the errors that arise in the course of retrieval, by means of an improved photogrammetry technique, of planetary surface reliefs from sets of their photo images. The work has been aimed at evaluating the level of errors in numerically calculated heights and slopes of the reliefs, as retrieved from images with a variety of signal-to-noise ratios, also including estimates for possibly minimal errors.

Methods and Methodology. The improved photogrammetry approach permits calculating the most probable relief realizations for parts of a planetary surface, proceeding from sets of their photographic images. Two optional ways for implementing the method are analyzed, namely application of an optimized Fourier transform-based filtering, or solution of Poisson's equation within the finite-difference technique.

Results. Computer experiments have demonstrated that the reliefs retrievable from photo images with the use of the improved photogrammetry methods are always qualitatively similar to real ones. In the case of calculations within the finite-difference method the level of errors in height determination made 0.21 to $0.27\sigma_0$, where σ_0 stands for the root-mean-square deviation in the height of the relief being modeled. In the case of application of the Fourier analysis-based method the level of errors in the calculated heights varied between 0.86 and $0.33\sigma_0$, while the signal-to-noise ratio for the initial images changed from 1.0 to 100 . Within this version of the method the theoretical prediction for the lowest error in the calculated height varied from 0.83 to $0.13\sigma_0$. The relief belonging to the middle portion of the area under study is always retrievable to a better accuracy, as compared with the sites adjacent to the image borders, no matter which of the two available techniques has been applied.

Conclusions. The improved photogrammetry method allows retrieving surface reliefs from sets of their images, with error levels for estimates of height equaling either 0.21 to $0.27\sigma_0$ (in the case of application of the finite difference computational technique), or $0.33\sigma_0$ (if the Fourier analysis has been applied, with the signal-to-noise ratio $SNR = 50$). It is recommended that relief retrieval were performed over sites of a larger surface area than might be strictly necessary for the purpose, since the error value estimated for the middle part of the site always turns out to be several times smaller than the error calculated over the entire area under study.

Keywords: optimal filtering; planetary surface relief; error in height; photometry.